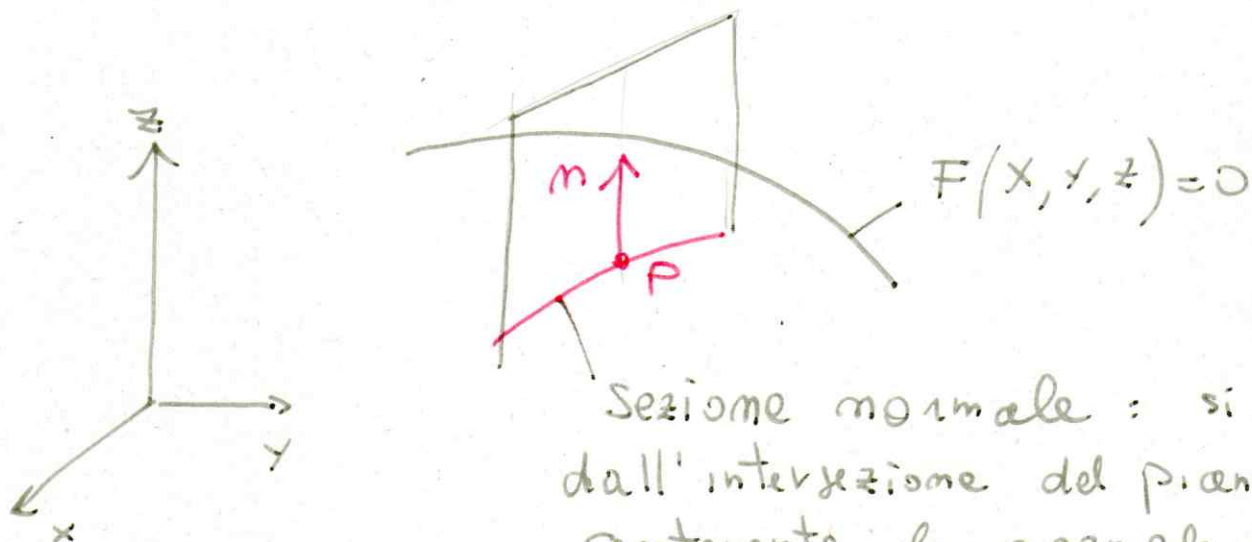


GEOMETRIA DELL' ELLISSOIDE

ALCUNI RICHIAMI:

CONSIDERO UNA GENERICA SUPERFICIE DI
EQUAZIONE $F(x, y, z) = 0$



Sezione normale: si ottiene
dall'intersezione del piano
contenente la normale n
alla sup. in P .

CONSIDERO IN UN PUNTO P , LA NORMALE ALLA
SUP. ED UNO DEGLI ∞ PIANI CHE LA CONTENGONO
L'INTERSEZIONE E' COSTITUITA DA UNA CURVA
DETTA SEZIONE NORMALE.

DEFINITA UNA TERNA O, x, y, z I
COSINI DIRETTORI DELLA NORMALE SONO:

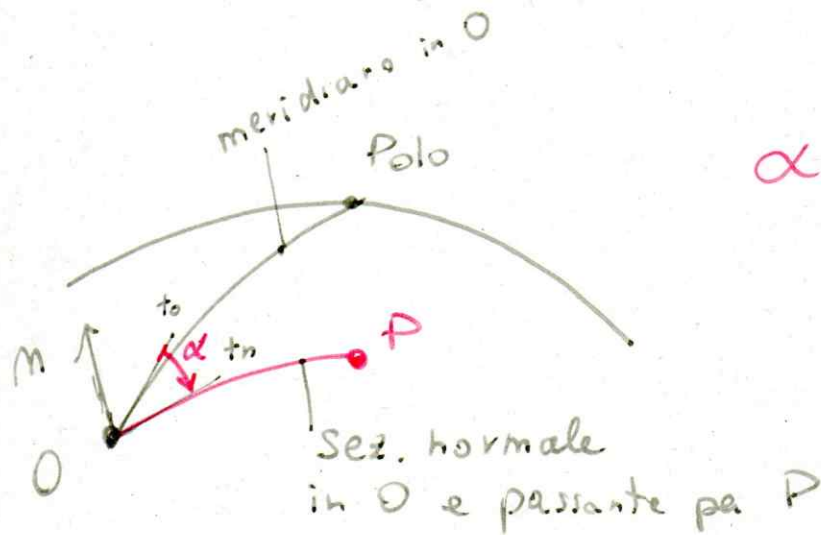
$$\begin{cases} \cos \hat{m}_x = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{M} \\ \cos \hat{m}_y = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{M} \\ \cos \hat{m}_z = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{M} \end{cases}$$

con:

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

DI SEZIONI NORMALI CE NE SONO INFINITE.

POSSONO ESSERE RIFERITE SULL'ELLIPSOIDE
AD UN ANGOLO DETTO AZIMUT RISPETTO
AL MERIDIANO

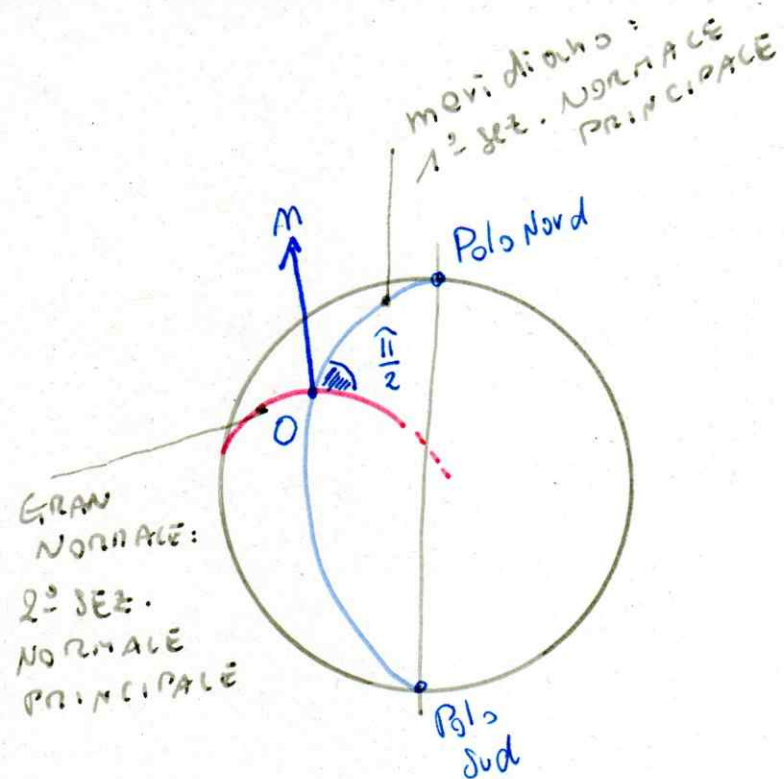


α = AZIMUT

AZIMUT: ANGOLO DI CUI t_o (t_g al merid.)
DEVE RUOTARE IN SENSO ORARIO PER
SOVRAPPORSI ALLA t_n (t_g alla sez. normale)

DEFINITO $R(\alpha)$ = RAGGIO DI CURVATURA
DELLA SEZ. NORMALE

$R(\alpha)$ DIPENDE DALL'AZIMUT α



Si dimostra che
tra le ∞ sez.
normali NE

ESISTONO 2 A cui

CORRISPONDONO 1

RAGGI DI CURVATURA
MINIMO E MASSIMO



SEZIONI NORMALI
PRINCIPALI

- MERIDIANO
- GRAN NORMALE

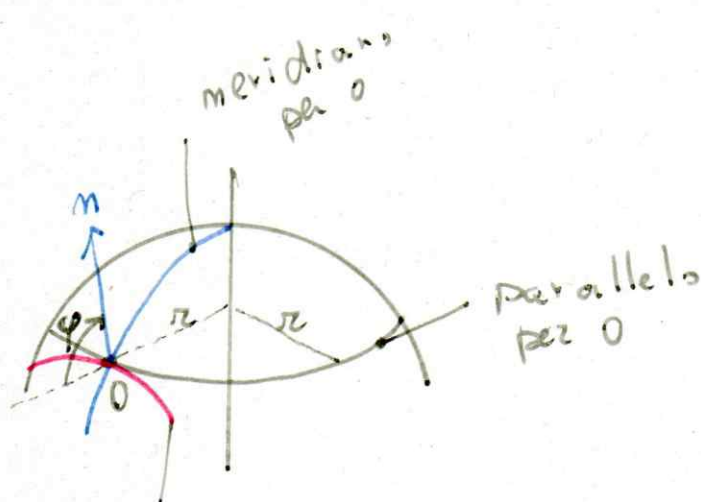
IL MERIDIANO DI RAGGIO DI CURV. ρ E' LA
SEZ. NORMALE ^{PRINCIPALE} CON RAGGIO MINIMO

LA GRAN NORMALE E' LA SEZ. NORMALE PRINCIP.
CON RAGGIO DI CURVATURA MASSIMO N

L'AZIMUT DEL MERIDIANO E' NULLO

L'AZIMUT DELLA GRAN NORMALE E' $\frac{\pi}{2}$

[N appartiene ad un piano detto
"PRIMO VERTICALE"]



GRAN NORMALE È AL PIANO "PRIMO VERTICALE"

PER CALCOLO IL VALORE DI N SI UTILIZZA IL RAGGIO DI CURVATURA DI r

SI NOTI CHE IL PARALLELO NON È UNA SEZIONE NORMALE (A PARTE L'EQUATORE) MA È UNA SEZ. OBLIQUA, OTTENUTA INTERSECANDO L'ELLIPSOIDE CON UN PIANO CHE NON CONTIENE LA NORMALE "m" MA CHE FORMA UN ANGOLO PARI ALLA LATITUDINE φ CON IL PRIMO VERTICALE

VALE IL TEOREMA DI MEUSNIER

IN GENERALE:

$$R_{\text{sez. piana obliqua}} = R_{\text{sez. normale}} \cdot \cos \theta$$

con θ angolo tra i due piani

Quindi per l'ellissoide

5

$$r = N \cos \varphi$$

Da cui:

$$N = \frac{r}{\cos \varphi} = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

Si osserva che $N > p$

$$\text{con } p = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

PER UNA GENERICA SEZ. NORMALE DI
AZIMUT α VALE LA FORMULA DI EULERO.

$$R(\alpha) = \frac{pN}{N \cos^2 \varphi + p \sin^2 \varphi}$$

ovviamente

$$\times \alpha = 0^\circ \Rightarrow R(0^\circ) = p$$

$$\times \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow R\left(\frac{\pi}{2}\right) = N$$

6
SI PUO' ANCHE CALCOLARE UN VALORE
MEDIO AL VARIARE DI α

$$R_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(\alpha) d\alpha = \sqrt{\rho \cdot N}$$

R_m E' IL RAGGIO DELLA SFERA LOCALE.

SFERA TANGENTE ALL'ELLIPSOIDE IN
O DI RAGGIO R_m .

7

RIASSUMENDO: CURVE NOTEVOLI IN UN PTO
SULL' ELLISSOIDE E LORO
RAGGI DI CURVATURA

$$r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} ; \quad p = \frac{a(1 - e^2)}{(\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi})^3}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} ; \quad R_m = \sqrt{pN}$$

Alcuni valori per l'ellissoide Internazionale

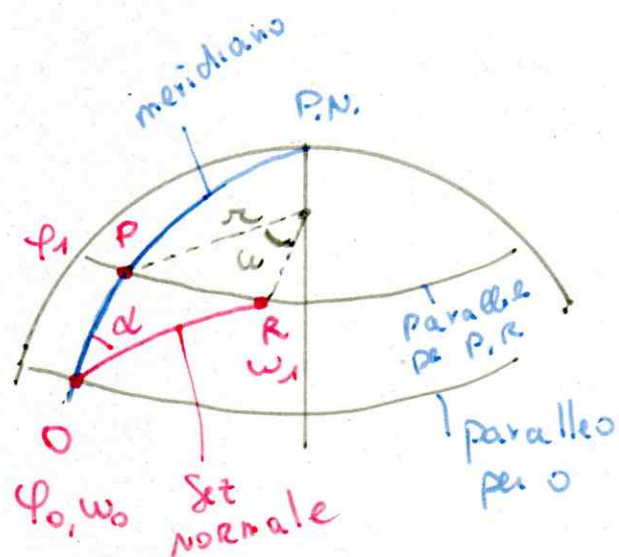
$$\varphi = 0^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 6335 \text{ km} \\ r = N = a = 6378 \text{ km} \\ R_m = 6356 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$\varphi = 45^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 6367 \text{ km} \\ r = 6517 \text{ km} \\ N = 6389 \text{ km} \\ R_m = 6378 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$\varphi = 90^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 6399 \text{ km} \\ r = 0 \\ R_m = p = N = 6399 \text{ km} \end{array} \right.$$

ARCHI FINITI DI MERIDIANI E PARALLELI

18



TRIANGOLO
ELLISSOIDICO OPR
DEFINITO DA
UN ARCO DI MERIDIANO
OP E DA UN ARCO
DI PARALLELO PR
E DALLA SEZ.
NORMALE OR

ϕ_0, ω_0 : coord. di O

ϕ_1, ω_0 : " di P

ϕ_1, ω_1 : " di R

ARCO FINITO DI MERIDIANO:

$$S_{OP} = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \rho(\phi) d\phi \approx \rho_m (\phi_1 - \phi_0)$$

|
x archi limitati (e ϕ in
radianti)

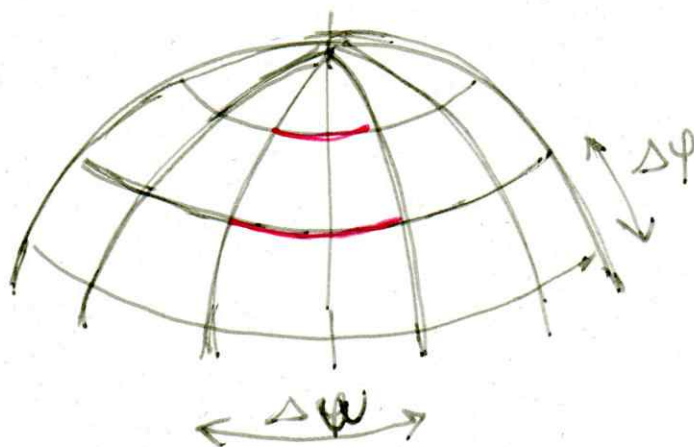
ARCO FINITO DI PARALLELO:

$$S_{PR} = \int_{\omega_0}^{\omega_1} r(\phi_1) d\omega = r(\phi_1) [\omega_1 - \omega_0]$$

(ω in rad.)

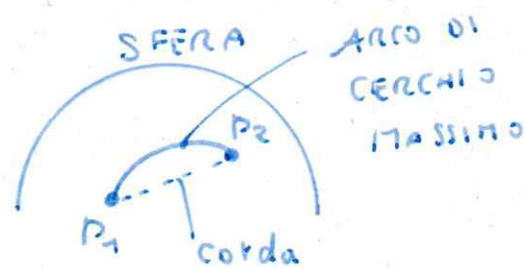
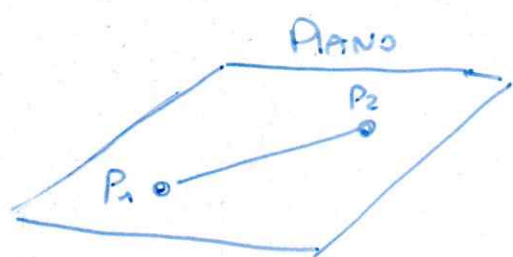
QUALCHE VALORE APPROSSIMATO PER
ELLIPSOIDE INTERNAZIONALE E $\varphi^0 = 45^\circ$

		1"	1'	1°
ARCO DI MERIDIANO	S_{OP}	31 m	1,85 km	111 km
ARCO DI PARALLELO	S_{PR}	22 m	1,3 km	80 km



GEODETICHE

10



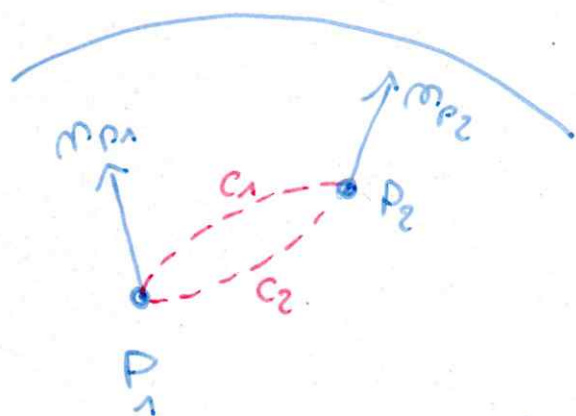
$S_{P_1 P_2}$: segmento di
retta =
= Distanza $P_1 P_2$

$S_{P_1 P_2}$: arco di cerchio
massimo

CURVA DI LUNGHEZZA
MINIMA $\equiv$ DISTANZA
MISURATA SULLA SFERA

QUANT'E' INVECE LA DISTANZA TRA
DUE PUNTI SULL'ELLISSOIDE ?

LE SEZIONI NORMALI NON POSSONO ESSERE
UTILIZZATE PER INDIVIDUARE LA CURVA DI
LUNGHEZZA MINIMA, INFATTI:



C_1 : Sez. norm. in P_1 passante in P_2

C_2 : " " in P_2 " in P_1

IN GENERALE

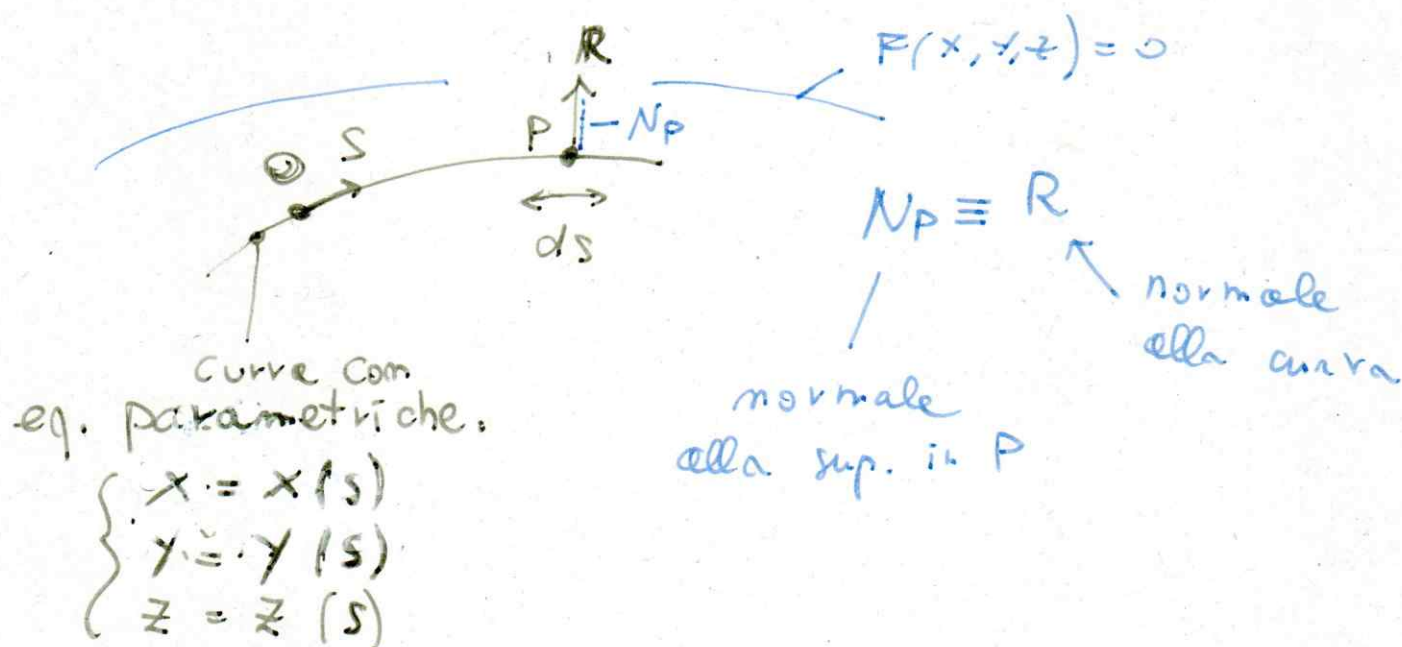
m_{P_1} e m_{P_2} Sono
sghembe $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ i 2 piani
normali non
coincidono.

LE CURVE UNIVOQUE E DI LUNGHEZZA MINIMA
TRA DUE PUNTI SULL' ELLISSOIDE SONO LE

GEODETICHE: CARATTERIZZATE DALL' AVERE
IN OGNI PUNTO LA NORMALE ^{PRINCIPALE} ALLA CURVA
COINCIDENTE CON LA NORMALE ALLA SUP.

LA NORMALE PRINCIPALE R DI UNA CURVA
APPARTIENE AL PIANO OSCULATORE CHE A
SUA VOLTA E' IL CERCHIO DI RAGGIO R
CHE MEGLIO APPROSSIMA LA CURVA IN UN
INTERNO INFINITESIMO ds DI UN PUNTO P



i coseni direttori di R sono

$$\cos \hat{R}_x = R \frac{d^2 x}{ds^2} ; \cos \hat{R}_y = R \frac{d^2 y}{ds^2}$$

$$\cos \hat{R}_z = R \frac{d^2 z}{ds^2}$$

da porre uguali ai coseni direttori della normale N_p alla superficie

$$\cos \hat{m}_x = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{M}; \quad \cos \hat{m}_y = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{M}$$

$$\cos \hat{m}_z = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{M} \quad \cos M = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

UGUAGLIANDO SI OTTIENE

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{dx^2}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{dy^2}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{dz^2}{ds^2}} = RM$$

QUESTE EQUAZIONI NON SONO GENERALMENTE INTEGRABILI MA NEL CASO DELL'ELLISS. DI ROTAZIONE ASSUMONO UNA FORMA PIU' SEMPLICE

$$x \frac{dy^2}{ds^2} - y \frac{dx^2}{ds^2} = 0$$

ED INTEGRANDO:

$$\boxed{x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = C_1}$$

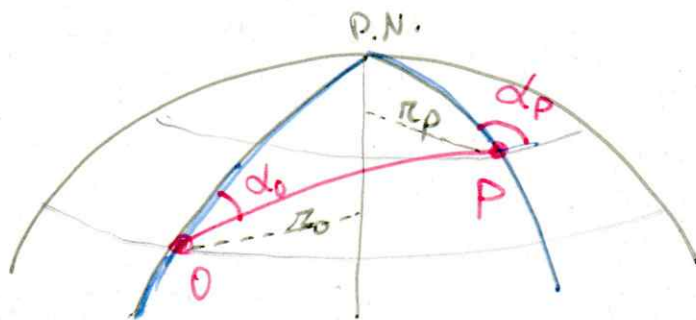
(1)

13

CHE NON PUO' ESSERE ULTERIORMENTE
 INTEGRATA. SI DIMOSTRA PERO' CHE PER
 UNA CURVA CHE SODDISFA LA (1) VALE
 IL TEOREMA DI CLAIRAUT

$$r \sin \alpha = C$$

IN OGNI PUNTO DI UNA GEODETICA
 E' COSTANTE IL PRODOTTO DEL RAGGIO
 DEL PARALLELO PER IL SENO
 DELL' AZIMUT DELLA CURVA



$$r_0 \cdot \sin \alpha_0 = r_p \cdot \sin \alpha_p = C$$