Secondo parziale di Geometria (Ing. Civile) 1-6-2010-B

1) Determinare $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che $d(r,s) < \sqrt{17}$, con

$$r \equiv \begin{cases} x = 4z + 7 \\ y = z - 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 4z + \alpha \\ y = 3z + \beta \end{cases}$$

b) Classificare e studiare la conica di equazione $\mathcal{C} \equiv 9x^2 + 4y^2 + 54x - 16y + 61 = 0$.

c) Trovare l'equazione del cono che proietta la conica $\mathcal{C}$ del piano xy dal punto $V(0,0,1)$.

2) Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ tale che

$$T(-1,0,0) = (-9, -\alpha, 2) \ , \quad T(0,1,0) = (0,4,1) \ , \quad T(0,0,-1) = (0,0,-9) \ .$$

Trovare

a) $T(x,y,z)$

b) la matrice A associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$

c) i valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la matrice A del punto b) è diagonalizzabile.

3) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (A \text{ è simmetrica})$$

a) Diagonalizzare A mediante una matrice ortogonale U.

b) Determinare la decomposizione spettrale del tensore T associato alla matrice A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

c) Trovare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $< T, \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} >$ sia minore di -7, dove $\mathbf{v} = (-1,-1,-1)$ e $\mathbf{w} = (1, \alpha, 1)$.

d) Verificare che A è definita positiva e trovare $\mathrm{tr}(\sqrt{A})$ e $\det(\sqrt{A})$ senza calcolare $\sqrt{A}$ (motivare la risposta).

Facoltativo Dimostrare che se $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base dello spazio euclideo reale V e T e T' sono tensori in V tali che $T(\mathbf{v}_i) = T'(\mathbf{v}_i)$ per $i = 1, \ldots, n$ allora $T = T'$.

Compito di Geometria per Ingegneria Civile (12 C.F.U.) del 14-07-2010

1) Sia

$$W = \{(3x+2y+z+t, -y+z-2t, x+kz-t) \; : \; x,y,z,t \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^3 \quad (k \in \mathbf{R}).$$

a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ trovare una base e la dimensione di W.
b) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{w} = (4, \alpha, 2)$ a W $(k, \alpha \in \mathbf{R})$.

2) Discutere i seguenti sistemi lineari:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} 2x - 2y + z = -1 \\ 4x + ky - z = \alpha \\ x - 3y + 2z = -3 \end{cases} \quad , \quad \text{(b)} \quad \begin{cases} 2x - 2y + z - t = 0 \\ 4x + ky - z + \alpha t = 0 \\ x - 3y + 2z - 3t = 0 \end{cases} \quad (\alpha, k \in \mathbf{R})$$

3) Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ tale che:

$$T(0,1,1) = (-1,-7,\alpha) \; , \; T(0,1,0) = (1,1,0) \; , \; T(1,0,0) = (\alpha, 0, 0) \; .$$

a) Trovare $T(x,y,z)$.
b) Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ ed i valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

4) Sia $\quad A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.
b) Trovare la decomposizione spettrale del tensore T associato ad A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.
c) Trovare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $< T, \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} >$ sia maggiore di $\mathrm{tr}(A) - 4$ dove $\mathbf{v} = (1,1,\alpha)$.
d) Verificare che A è definita positiva e trovare il polinomio caratteristico di $\sqrt{A}$ (cioè $\Delta_{\sqrt{A}}(\lambda)$).

5) Siano:

$$r \equiv \begin{cases} x = 4z + 2 \\ y = -2z + 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 4z + \alpha \\ y = z + \beta \end{cases} \quad .$$

Trovare:
a) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che $d(r,s) < \sqrt{17}$.
b) le equazioni delle eventuali sfere passanti per $Q(0,0,6)$, di raggio $R = \sqrt{41}$ e aventi il centro C sulla retta r.

6) a) Ridurre a forma canonica e studiare, in Oxy, la conica $\mathcal{C} \equiv 2x^2 - 4x + y = 0$.
b) Trovare l'equazione del cilindro che proietta la curva $\mathcal{C}$ del piano xy (vedi a) parallelamente alla retta $r \equiv \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}$.

Compito di Geometria per Ingegneria Civile del 30-06-2010

1) Sia

$$W = \{(x-2y-z, x+y+z, 2x-y, 3x+z) \ : \ x,y,z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^4 .$$

Con il metodo di "riduzione a scala"
a) trovare una base e la dimensione di W,
b) discutere l'appartenenza di $\mathbf{w} = (0,0,2,k)$ a W ($k \in \mathbf{R}$).

2) Siano:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} 2x-2y-z+t=3 \\ x+\alpha y+2z+3t=4 \\ \beta x+y+z=\gamma \end{cases} \quad , \quad \text{(ii)} \quad \begin{cases} 2x-2y-z+t=0 \\ x+\alpha y+2z+3t=0 \\ \beta x+y+z=0 \end{cases} \quad (\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R})$$

a) Discutere (i).
b) Trovare (senza risolvere il sistema !) la dimensione del sottospazio W di $\mathbf{R}^4$ delle soluzioni di (ii).

3) Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ tale che:

$$T(1,0,0) = (1,-2,-1) \ , \ T(0,1,0) = (0,\alpha,2) \ , \ T(1,0,1) = (1,-2,0) \ .$$

a) Trovare $T(x,y,z)$.
b) Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ ed i valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

4) Sia $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.
b) Trovare la decomposizione spettrale del tensore T associato ad A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.
c) Trovare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $< T, \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} >$ sia minore della traccia di A, dove $\mathbf{v} = (1,\alpha,1), \mathbf{w} = (-1,-1,-1)$.
d) Esprimere A^3 come combinazione lineare di A^2, A e I_3.

5) Siano:

$$r \equiv \begin{cases} x = 4z+\alpha \\ y = 3z+\beta \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 4z+7 \\ y = z-5 \end{cases} \quad .$$

Trovare:
a) le equazioni ridotte della retta t passante per $P(1,2,1)$ e perpendicolare sia ad r che ad s,
b) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che $d(r,s) > \sqrt{17}$.

6) a) Studiare, in Oxy, la conica $\mathcal{C} \equiv 9x^2+4y^2-36x-24y+36=0$.
b) Trovare l'equazione del cono che proietta la curva $\mathcal{C}$ del piano xy (vedi a)) dal punto $V(0,0,-1)$.
c) Precisare "cosa" rappresenta l'equazione di $\mathcal{C}$ nello spazio $Oxyz$.