UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
C.d.S. Ingegneria Civile e Ambientale

Eserciziario di Analisi Matematica II [1]

Michele Miranda
Dipartimento di Matematica e Informatica
via Machiavelli 35, I-44121 Ferara
e-mail: michele.miranda@unife.it

a.a. 2019-2020

[1]versione aggiornata al 3 dicembre 2019

Indice

Capitolo 9

Equazioni differenziali

Esercizio 9.1 Dopo averne discussa esistenza ed unicità, si risolva il seguente Problema di Cauchy,

$$\begin{cases} ty'(t) + y(t) = 0 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Si dica inoltre su quale intervallo $I = (a, b)$ è definita la soluzione trovata e si calcolino i limiti

$$\lim_{t \to a^+} y(t), \qquad \lim_{t \to b^-} y(t).$$

Esercizio 9.2 Si risolta il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t - 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Per tale problema, si costruisca inoltre la successione di funzioni $(u_h(t))_{h \in \mathbb{N}}$ che si utilizza nella dimostrazione del Teorema di esistenza ed unicità, cioè la successione

$$u_0(t) \equiv 1, \qquad u_{h+1}(t) = 1 + \int_0^t (u_h(s) + s - 1)ds,$$

verificando la convergenza di u_h alla soluzione.

Esercizio 9.3 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \tan(x)y(x) = \dfrac{\sin(x)}{1 + \sin(x)}, \\ \\ y(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 9.4 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1 + 2x}{\cos y} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 9.5 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (x + y'(x))^2 - x - y''(x) - 1; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 9.6 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$4y'(x) + y(x) = y^3(x)(x^3 - 4x).$$

Esercizio 9.7 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + 2y^{(2)}(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$$

Esercizio 9.8 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(3)}(x) = \frac{y^{(2)}(x)}{(x+1)^3}.$$

Esercizio 9.9 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y(x)y''(x) - (y'(x))^2 = y^4(x).$$

Esercizio 9.10 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$(1 + x^2)y'(x) + xy(x) = \frac{1}{(1 + x^2)}.$$

Esercizio 9.11 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2}{x}y(x) + \frac{x+1}{x}.$$

Esercizio 9.12 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x)(1 - x^2) - xy(x) - xy^2(x) = 0.$$

Esercizio 9.13 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{6x} + \frac{x}{y^5(x)}.$$

Esercizio 9.14 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y(x)e^{2x} - (1 + e^{2x})y'(x) = 0.$$

Esercizio 9.15 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$e^{x+y(x)}y'(x) + x = 0.$$

Esercizio 9.16 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x^3 + y^3(x)}{xy^2(x)}.$$

Esercizio 9.17 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2x + y(x) - 1}{4x + 2y(x) + 5}.$$

Esercizio 9.18 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{4x - y(x) + 7}{2x + y(x) - 1}.$$

Esercizio 9.19 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = -\dfrac{x}{y'(x)} \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 9.20 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x+1)y''(x) - (x+2)y'(x) + x + 2 = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 9.21 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x)y''(x) = y^2(x)y'(x) + y'(x)^2 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 9.22 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y(x)y''(x) - y'(x)(1 + y'(x)) = 0.$$

Esercizio 9.23 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'(x) + (y'(x)^2 - 6x)y''(x) = 0 \\ y'(2) = 2 \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 9.24 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 1 + y(x)y''(x) - y'(x)^2 = 0 \\ y'(1) = 1 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 9.25 Utilizzando il metodo delle variazioni delle costanti, risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy''(x) - xy'(x) = 3x^2 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 9.26 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$2y''(x) - y'(x) - y(x) = 4xe^{2x}.$$

Esercizio 9.27 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = x \sin x.$$

Esercizio 9.28 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$\frac{y'(x) - y(x)}{y''(x)} = 3.$$

Esercizio 9.29 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x.$$

Esercizio 9.30 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 4y(x) = \sin x \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 9.31 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = 2x \cos x \cos 2x.$$

Esercizio 9.32 Utilizzando il metodo della variazione delle costanti, risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Esercizio 9.33 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - 2y(x) = 4x^2 e^{x^2}.$$

Esercizio 9.34 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(3)}(x) + y^{(2)}(x) = x^2 + 1 + 3xe^x.$$

Esercizio 9.35 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + y^{(2)}(x) = x^3.$$

Esercizio 9.36 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(3)}(x) + 2y^{(2)}(x) + 2y'(x) + y(x) = x \\ \\ y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 9.37 Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale;

$$y''(t) = (y'(t))^2 + 1.$$

Esercizio 9.38 Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y''(t) = y'(t)(1 + y(t)) \\ \\ y(0) = 0 \\ \\ y'(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 9.39 Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = (1 + t)e^t \cos(2t) \\ \\ y(0) = 1, \\ \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 9.40 Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale;

$$y''(t) - y(t) = \frac{1}{1 + e^t}.$$

9.1 Soluzioni

Soluzione 9.1 L'equazione data può essere vista sia come equazione a variabili separabili, sia come equazione lineare del primo ordine; nel caso in cui la si vede come equazione a variabili separabili, abbiamo

$$y'(t) = -\frac{1}{t}y(t),$$

da cui si vede che $a(t) = -\frac{1}{t}$ e $b(y) = y$ definite per $a : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siccome il dato iniziale viene dato in $t_0 = 1$, il problema va risolto in $(0, +\infty)$; inoltre, l'equazione $b(y) = 0$ è risolta solo per $y = 0$, che non soddisfa la condizione iniziale. Per trovare la soluzione scriviamo quindi, dato che abbiamo un problema ai valori iniziali,

$$\int_1^t \frac{y'(s)}{y(s)}ds = - \in_1^t \frac{1}{s}ds$$

e quindi la soluzione sarà data da

$$y(t) = \frac{2}{t}.$$

Tale funzione è definita su $y : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e si nota che

$$\lim_{t\to 0} y(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to +\infty} y(t) = 0.$$

Soluzione 9.2 L'equazione data è un'equazione lineare con $a(t) = 1$ e $b(t) = t - 1$, definite su tutto $\mathbb{R}$. Dato che abbiamo un problema ai dati iniziali, possiamo considerare la funzione

$$A(t) = \int_0^t a(s)ds = t,$$

da cui la soluzione che sarà data da

$$y(t) = e^t\Big(1 + \int_0^t e^{-s}(s-1)ds\Big) = e^t - t.$$

Per la seconda parte dell'esercizio, partiamo con la funzione $u_0(t) = 1$ e costruiamo

$$u_1(t) = 1 + \int_0^t \Big(u_0(s) + s - 1\Big)ds = 1 + \int_0^t sds = 1 + \frac{t^2}{2},$$

così come

$$u_2(t) = 1 + \int_0^t \Big(u_1(s) + s - 1\Big)ds = 1 + \int_0^t \Big(s + \frac{s^2}{2}\Big)ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}.$$

Iterando troveremo quindi che

$$u_{h+1}(t) = 1 + \int_0^t \Big(u_h(s) + s - 1\Big)ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^{h+2}}{(h+2)!}$$

Si riconosce quindi lo sviluppo dell'esponenziale a cui è stato tolto il termine contenente t; avremo quindi che

$$\lim_{h\to+\infty} u_h(t) = 1 + \sum_{h=2}^{\infty} \frac{t^h}{h!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} - t = e^t - t.$$

Soluzione 9.3 L'equazione data è una equazione differenziale lineare a coefficienti non costanti; per trovare la soluzione usiamo quindi la formula risolutiva per questo tipo di equazione. Calcoliamo anzitutto

$$A(x) = \int \tan x dx = -\ln|\cos x|.$$

Una osservazione preliminare; la funzione $\tan x$ è definita per $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ Gli intervalli su cui è definita sono quindi della forma $(\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi)$ e l'unico tra questi intervalli che contiene il dato iniziale $x_0 = 0$ è $(-\pi/2, \pi/2)$. Su tale intervallo $|\cos x| = \cos x$, quindi $A(x) = -\ln\cos x$. L'integrale generale sarà quindi dato da

$$y(x) = \cos x \left(c + \int \frac{\text{sen}x}{\cos x(1+\text{sen}x)} dx. \right).$$

Calcoliamo quest'ultimo integrale; utilizzando la sostituzione $t = \tan x/2$ e le formule parametriche, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{\text{sen}x}{\cos x(1+\text{sen}x)} dx =& \int \frac{4t}{(1-t)(1+t)^3} dt \\
=& \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} dt + \int \frac{1}{(1+t)^2} dt - 2 \int \frac{1}{(1+t)^3} dt \\
=& \ln \sqrt{\left| \frac{1+t}{1-t} \right|} - \frac{t}{(1+t)^2} \\
=& \ln \sqrt{\left| \frac{1+\tan x/2}{1-\tan x/2} \right|} - \frac{\tan x/2}{(1+\tan x/2)^2} \\
=& \ln \sqrt{\left| \frac{\cos x/2 + \text{sen}x/2}{\cos x/2 - \text{sen}x/2} \right|} - \frac{\text{sen}x/2 \cos x.2}{(\cos x/2 + \text{sen}x/2)^2}.
\end{aligned}$$

In definitiva la soluzione è data

$$y(x) = \frac{1}{2} \cos x \ln \frac{1+\text{sen}x}{\cos x} + \frac{1}{2} \frac{\cos x}{1+\text{sen}x}.$$

Soluzione 9.4 l'equazione proposta si presenta nella forma a variabili separabili, cioè

$$\cos y(x) y'(x) = 1 + 2x.$$

Integrando quindi ambo i membri tra 0 e x, si ottiene

$$\sin y(x) - \sin 0 = x + x^2,$$

da cui

$$y(x) = \arcsin(x + x^2).$$

Soluzione 9.5 Ponendo $z(x) = x + y'(x)$, l'equazione differenziale può essere riscritta nella forma

$$x + y' = (x + y')^2 - y'' - 1,$$

cioè
$$z = z^2 - z'.$$
Questa è una equazione differenziale del prim'ordine a variabili separabili, la cui soluzione è data da
$$\left|\frac{z(x)-1}{z(x)}\right| = \alpha e^{x-x_0}, \quad \alpha > 0;$$
se imponiamo le condizioni iniziali, notiamo che possiamo togliere il modulo e troviamo che $\alpha = 1/2$ e quindi
$$z(x) = \frac{2}{2-e^x}.$$
A questo punto il problema diventa
$$\begin{cases} x + y' = \frac{2}{2-e^x} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$
Tale problema ha per soluzione la funzione
$$y(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(2-e^x).$$

Soluzione 9.6 L'equazione proposta è una equazione di tipo Bernoulli; dividendo infatti l'equazione per y^3 (si noti che tale operazione è lecita se si cercano soluzioni non nulle), si ottiene
$$4y^{-3}y' + y^{-2} = x^3 - 4x,$$
da cui, ponendo $z = y^{-2}$, si ricava l'equazione
$$-2z' + z = x^3 - 4x.$$
Questa è una equazione differenziale lineare a coefficienti non costanti, la cui soluzione è data da
$$z(x) = ce^{x/2} + x^3 + 6x^2 + 20x + 40.$$
La soluzione del problema sarà quindi data da
$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{ce^{x/2} + x^3 + 6x^2 + 20x + 40}}.$$

Soluzione 9.7 L'equazione data è una equazione lineare a coefficienti costanti; le soluzioni le cerchiamo quindi nella forma $y = e^{\lambda x}$. Quindi tali funzioni sono soluzioni se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico
$$P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0;$$
polinomio può essere riscritto nella forma
$$P(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda-1)^2$$
e quindi le radici complesse sono date da $\lambda = 1$ (con molteplicità 2) e $\lambda = \pm i$. La soluzione generale sarà quindi data dalla funzione
$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{ix} + c_4e^{-ix}$$
con $c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, 4$, oppure se si vogliono usare solo numeri reali
$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3\sin x + c_4\cos x, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Soluzione 9.8 L'equazione di terzo grado assegnata può essere ridotta ad una equazione del primo ordine con la sostituzione $v = y''$, da cui

$$v' = \frac{v}{(x+1)^3}.$$

Tale equazione ha per soluzione

$$|v(x)| = \alpha e^{-1/2(x+1)^2}, \quad \alpha > 0,$$

e quindi la soluzione del problema originale diventa

$$y(x) = \pm\alpha \int_{x_0}^{t} \int_{x_0}^{\tau} e^{-1/2(\tau+1)^2} d\tau dt + c_1 + c_2.$$

Soluzione 9.9 Si noti che nell'equazione data non compare la dipendenza da x; in questo tipo di equazioni si cambia in qualche modo il punto di vista, e si vede la funzione y come variabile libera e si cerca di esprimere le varie derivate come derivate in funzione della variabile y. A tale scopo si introduce la funzione

$$z(y) = y'(x),$$

e si calcola la derivata rispetto a y di tale funzione in modo da ottenere

$$\frac{dz(y)}{dy} = \frac{dy'(x)}{dy} = \frac{dy'(x)}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{y''(x)}{y'(x)} = \frac{y''(x)}{z(y)},$$

e quindi si ottiene l'equazione differenziale

$$z\frac{dz}{dy} - \frac{z^2}{y} - y^3 = 0,$$

che può essere riscritta come

$$\frac{d(z^2)}{2dy} - \frac{z^2}{y} = y^3$$

otteniamo la soluzione

$$z^2(y) = y^2\left(c + y^2\right).$$

Si tratta quindi poi di risolvere l'equazione differenziale

$$(y'(x))^2 = y(x)^2\left(c + \frac{y^2}{2}\right).$$

Soluzione 9.10 L'equazione data è di tipo lineare a coefficienti non costanti, la cui soluzione è data da

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(c - \frac{1}{x^2 - x\sqrt{x^2+1}+1}\right).$$

Soluzione 9.11 L'equazione data è una equazione lineare a coefficienti non costanti; applicando quindi la formula risolutiva si trova che

$$y(x) = cx^2 - \frac{2x+1}{2}.$$

Soluzione 9.12 l'equazione data è una equazione di tipo Bernoulli; con la sostituzione $z = y^{-1}$, si ottiene l'equazione lineare a coefficienti non costanti

$$z' = \frac{x}{x^2-1}z + \frac{x}{x^2-1},$$

che ha per soluzione

$$z(x) = \sqrt{|x^2-1|}\left(c + \int \frac{t}{(t^2-1)\sqrt{|t^2-1|}}dt\right),$$

che produce, a seconda dei dati iniziali, una delle seguenti due soluzioni

$$z(x) = c\sqrt{x^2-1} - 1$$

$$z(x) = c\sqrt{1-x^2} - 1.$$

Quindi la soluzione originale sarà una delle due tra

$$\frac{1}{c\sqrt{x^2-1}-1}$$

e

$$\frac{1}{c\sqrt{1-x^2}-1}$$

Soluzione 9.13 L'equazione data è di tipo Bernoulli, e quindi con la sostituzione $z = y^6$ si ottiene la soluzione

$$z(x) = \frac{1}{|x|}\left(c + \int 6t|t|dt\right).$$

Se cerchiamo la soluzione per $x > 0$, integrando e tornando alla funzione y, si ottiene

$$y(x) = \sqrt[6]{2x^2 + \frac{c}{|x|}}.$$

Soluzione 9.14 L'equazione data è a variabili separabili

$$\frac{y'}{y} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}},$$

e quindi la soluzione è data da

$$|y(x)| = c\sqrt{e^{2x}+1}, \quad c > 0.$$

Soluzione 9.15 Riscrivendo l'equazione nella forma

$$y'e^y e^x = -x,$$

notiamo che siamo ricondotti ad una equazione a variabili separabili, la cui soluzione è data da

$$y(x) = \ln(c + (x+1)e^{-x}).$$

Soluzione 9.16 L'equazione data può essere ricondotta ad una equazione di tipo omogeneo

$$y' = \frac{1 + (y/x)^3}{(y/x)^2},$$

che con la sostituzione $y = xz$ si riconduce all'equazione a variabili separabili

$$z + xz' = \frac{1 + z^3}{z^2},$$

la cui soluzione è data da

$$z(x) = \sqrt[3]{c + 3\ln|x|}.$$

Si tratta quindi poi di porre

$$y'(x) = xz(x) = x\sqrt[3]{c + 3\ln|x|}.$$

Soluzione 9.17 Siamo in presenza di una equazione differenziale nella forma

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right);$$

per equazioni di questo tipo si procede come segue. Se $a\beta - b\alpha = 0$ (che vuol dire che le rette a numeratore e a denominatore sono parallele, eventualmente coincidenti), allora notando che, supponendo $a, b, \alpha, \beta \neq 0$

$$\alpha x + \beta y = \frac{\alpha}{a}\left(ax + \frac{a\beta}{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{a}(ax + by),$$

ponendo $z = ax + by$, da cui $z' = a + by'$, si ottiene l'equazione a variabili separabili

$$\frac{z' - a}{b} = f\left(\frac{z + c}{(\alpha/az + \gamma)}\right).$$

Nel caso in cui $a\beta - b\alpha \neq 0$, significa che le due rette a numeratore e a denominatore si incontrano in un punto (x_0, y_0) dato come unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0 \end{cases}$$

(notare che la condizione data sui coefficienti implica l'invertibilità della matrice dei coefficienti di tale sistema). In tal caso si procede alla sostituzione

$$\begin{cases} \xi = x - x_0 \\ \eta = y - y_0 \end{cases}$$

e si cerca la soluzione $\eta(\xi)$ soluzione dell'equazione

$$\eta' = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{\alpha\xi + \beta\eta}\right)$$

e questa è una equazione di tipo omogeneo.

Nel nostro caso siamo nella condizione $a\beta - b\alpha = 0$, quindi ponndo $z = 2x+y$, otteniamo l'equazione

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5}$$

la cui soluzione è data da

$$\frac{2z(x)}{5} + \frac{7}{25} \ln|5z(x) + 9| = x + c,$$

e quindi la soluzione è data nella forma implicita

$$\frac{2y(x)}{5} + \frac{7}{25} \ln|10x + 5y(x) + 9| = \frac{x}{5} + c.$$

Soluzione 9.18 Utilizzando la discussione dell'esercizio precedente, con il cambio di variabili

$$\begin{cases} \xi = x + 1 \\ \\ \eta = y - 3 \end{cases}$$

otteniamo l'equazione

$$\eta' = \frac{4\xi - \eta}{2\xi + \eta},$$

che, posto $\eta(\xi) = \xi w(\xi)$, si trova la soluzione

$$\left| \frac{w-1}{(4-w)^2} \right| = \alpha|\xi|, \quad \alpha > 0.$$

Tornando alla funzione η, abbiamo trovato che

$$|\eta(\xi) - \xi| = \alpha \left(4 - \frac{\eta(\xi)}{\xi} \right) \xi^2;$$

si ricava quindi la soluzione $y(x)$ tornando indietro con le sostituzioni.

Soluzione 9.19 L'equazione data può essere riscritta come

$$y'y'' = -x$$

o meglio ancora come

$$\frac{d(y')^2}{2dx} = -x.$$

Integrando quindi tra il punto iniziale $x_0 = 0$ e x, si ottiene che

$$\int_0^x \frac{d(y'(t))^2}{2dx} dt = -\int_0^x t dx,$$

da cui si ricava, tenendo presente che $y'(0) = 1 > 0$,

$$y'(x)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y'(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

La soluzione sarà quindi data da, tenendo presente che $y(0) = 1$,

$$y(x) = 1 + \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

Soluzione 9.20 Notando che nell'equazione non compare la y, si può porre $v = y'$ in modo da ottenere un'equazione lineare a coefficienti non costanti

$$\begin{cases} v' = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) v - \frac{x+2}{x+1} \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$v(x) = 1.$$

La soluzione del problema iniziale sarà quindi data da

$$y(x) = x.$$

Soluzione 9.21 Nell'equazione data non compare la variabile x, quindi si può introdurre la funzione $z(y) = y'(x)$; con questa sostituzione otteniamo

$$\dot{z}(y) = \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{y''}{z},$$

si ottiene l'equazione

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{z}{y} + y, \\ z(1) = z(y(0)) = y'(0) = 1; \end{cases}$$

la soluzione di tale equazione è data da

$$z(y) = y^2.$$

Si tratta ora di risolvere il problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^2 \\ \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$y(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Soluzione 9.22 Come nell'esercizio precedente, nell'equazione non compare la variabile x e quindi si pone $z(y) = y'$; si ottiene quindi che

$$|z(y) + 1| = c|y|, \quad c > 0,$$

e quindi il problema è risolto se si risolve l'equazione

$$|y' + 1| = c|y|, \qquad c > 0.$$

Se togliamo il modulo, ottieniamo quindi

$$y' = cy - 1, \qquad c \neq 0.$$

Integrando tale equazione, che può essere vista sia come equazione a variabili separabili che lineare del primo ordine, otteniamo le soluzioni

$$y(x) = \alpha e^{cx} + \frac{1}{c}.$$

Soluzione 9.23 Siccome nell'equazione data non compare la variabile y, si può porre $v = y'$ in modo da ottenere l'equazione differenziale al prim'ordine

$$\begin{cases} v'(v^2 - 6x) + 2v = 0 \\ \\ v(2) = 2 \end{cases}$$

Notiamo che se moltiplichiamo l'equazione per v (operazione lecita in quanto v non può annullarsi mai), allora otteniamo, ponendo $z = v^2$, l'equazione

$$\begin{cases} \frac{z'}{2}(z - 6x) + 2z = 0 \\ \\ z(2) = 4 \end{cases}$$

che è una equazione omogenea la cui soluzione in forma inplicita è data

$$|z(x) - 2x|^2 = c|z|^3, \qquad c > 0.$$

Imponendo la condizione iniziale si trova $c = 0$, cioè $z(x) = 2x$, da cui $v(x) = \sqrt{2x}$. A questo punto dobbiamo risolvere $y'(x) = \sqrt{2x}$ con la condizione iniziale $y(2) = 0$, cioè

$$y(x) = \frac{1}{3}\Big(2x\sqrt{2x} - 8\Big).$$

Soluzione 9.24 Siccome nell'equazione non compare la variabile indipendente, poniamo $z(y) = y'(x)$, e quindi si ottiene l'equazione

$$\begin{cases} yzz'(y) = z^2(y) - 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Questa è un'equazione a variabili separabili con $a(y) = \frac{1}{y}$ e $b(z) = \frac{z^2-1}{z}$; la funzione b si annulla per $z = \pm 1$ e il dato iniziale è proprio $z(0) = 1$, quindi la soluzione è $z(y) = 1$. Questo porta all'equazione $y'(x) = 1$, cioè, tenendo presente che $y(0) = 0$, $y(x) = x$.

Soluzione 9.25 L'equazione può essere riscritta nella forma

$$y'' - y' = 3x;$$

la soluzione dell'omogenea è data da

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x,$$

mentre per la soluzione particolare si trova la funzione

$$y_1(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x.$$

La soluzione, imponendo le condizioni iniziali, sarà quindi determinata da

$$y(x) = 4e^x - \frac{3}{2}x^2 - 3x - 3.$$

Soluzione 9.26 La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x/2};$$

per la determinazione della soluzione particolare otteniamo la funzione

$$y_1(x) = \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right) e^{2x}.$$

La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x/2} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right) e^{2x}.$$

Soluzione 9.27 La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x;$$

per quanto riguarda la soluzione particolare si trova che

$$y_1(x) = \frac{x}{4}\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x,$$

e quindi la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{x}{4}\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x.$$

Soluzione 9.28 L'equazione differenziale può essere riscritta nella forma

$$3y'' - y' + y = 0,$$

e quindi si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea a coefficienti costanti. Il suo polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = 3\lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1/6 - i\sqrt{11}/6)(\lambda - 1/6 + i\sqrt{11}/6);$$

la soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = e^{x/6}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{11}}{6}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{11}}{6}x\right).$$

Soluzione 9.29 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

La soluzione particolare è data da

$$y_1(x) = xe^x\left((ax^2 + bx + c)\cos 2x + (dx^2 + ex + f)\sin 2x\right).$$

La soluzione generale sarà data dalla somma delle due.

Soluzione 9.30 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x;$$

per quanto riguarda la soluzione particolare, si ottiene

$$y_1(x) = \frac{1}{3} \sin x.$$

A questo punto, imponendo le condizioni iniziali, si ottiene la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{3} \sin 2x + \cos 2x + \frac{1}{3} \sin x.$$

Soluzione 9.31 La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x;$$

per calcolare la soluzione particolare scriviamo

$$2x \cos x \cos 2x = x \cos 3x + x \cos x,$$

e quindi applicando il principio di sovrapposizione, cioè tenendo conto che la soluzione particolare di una somma di funzioni è data dalla somma delle soluzioni particolari, si ricava che le soluzioni particolari sono date da

$$y_1(x) = \frac{x}{4} \cos x + \frac{x^2}{4} \sin x,$$
$$y_2(x) = \frac{3}{32} \sin 3x - \frac{x}{8} \cos 3x.$$

La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{x}{4} \cos x + \frac{x^2}{4} \sin x + \frac{3}{32} \sin 3x - \frac{x}{8} \cos 3x.$$

Soluzione 9.32 La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x};$$

per calcolare la soluzione generale si applica il metodo della variazione delle costanti, per ottenere la soluzione

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x e^{-x} \ln |x| - x e^{-x}.$$

Soluzione 9.33 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x};$$

per quanto riguarda la soluzione particolare, usando il metodo della variazioni delle costanti, si trova che la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + e^{x^2}.$$

Soluzione 9.34 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x},$$

mentre per il calcolo della soluzione particolare usiamo il principio di sovrapposizione delle soluzioni, e cioè utilizziamo il fatto che quando il termine forzante, la parte non omogenea dell'equazione differenziale, è somma di più funzioni, allora la soluzione particolare può essere determinata sommando le varie soluzioni particolari. Utilizzando questo principio, abbiamo che associata a $x^2 + 1$ la soluzione particolare è data da

$$y_1(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2,$$

mentre associata a $3xe^x$ la soluzione particolare è data da

$$y_2(x) = e^x \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right).$$

La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + e^x \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right).$$

Soluzione 9.35 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x,$$

mentre una soluzione particolare, sarà data da

$$y_1(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 12x^2;$$

la soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 12x^2.$$

Soluzione 9.36 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + e^{-x/2}\left(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

mentre la soluzione particolare è data da $y_1 = x - 2$. Imponendo infine le condizioni iniziali, si trova che la soluzione è data dalla funzione

$$y(x) = e^{-x} + e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x - 2.$$

Soluzione 9.37 L'equazione data non dipende esplicitamente da y (in realtà neanche da t); possiamo quindi ridurre la complessità ponendo $v(t) = y'(t)$ in modo da ottenere l'equazione del primo ordine

$$v'(t) = v(t)^2 + 1,$$

la cui soluzione generale, in forma implicita, è data da

$$\arctan v(t) = t + c_1.$$

Tale soluzione è definita fin tanto che $t + c_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ ed è data, esplicitamente, da

$$v(t) = \tan(t + c_1).$$

Ricordando che $v(t) = y'(t)$, integrando la soluzione trovata, ricaviamo che

$$y(t) = -\log|\cos(t + c_1)| + c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Soluzione 9.38 L'equazione data è di tipo autonomo in quanto non compare la variabile indipendente t; possiamo quindi porre

$$z(y) := y'(t),$$

da cui, dato che $y''(t) = \frac{d}{dt}z(y(t)) = \frac{d}{dy}z(y)y'(t) = \frac{d}{dy}z(y)z(y)$, si giunge all'equazione del primo ordine

$$\begin{cases} z(y)\frac{d}{dy}z(y) = z(y)(1 + y) \\ \\ z(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

dove il dato iniziale è stato ricavato ponendo $\frac{1}{2} = y'(0) = z(y(0)) = z(0)$. Siccome $z \equiv 0$ non è soluzione del problema ai valori iniziali, possiamo dividere per z ed integrare per ottenere che

$$z(y) = \frac{y^2 + 2y + 1}{2} = \frac{(y + 1)^2}{2}.$$

Risolviamo ora il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{(y(t)+1)^2}{2} \\ \\ y(0) = 0; \end{cases}$$

tale problema ha per soluzione la funzione

$$y(t) = \frac{t}{2 - t}$$

che sarà quindi la soluzione cercata.

Soluzione 9.39 Per risolvere il problema dato, risolviamo prima l'equazione omogenea considerando il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5;$$

tale polinomio ha due radici complesse coniugate $1 \pm 2i$, da cui la soluzione generale dell'omogenea che è data da

$$y_H(t) = e^t\Big(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)\Big).$$

Per la ricerca della soluzione particolare, notiamo anzitutto che possiamo scrivere il termine forzante come

$$(1+t)e^t\cos(2t) = e^{1\cdot t}\Big((1+t)\cos(2\cdot t) + 0\cdot\sin(2\cdot t)\Big)$$

in cui riconosciamo la possibilità di poter applicare il metodo per somiglianza. Abbiamo $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $p_1(t) = 1+t$ polinomio di grado 1 e $q_1(t) = 0$ polinomio di grado 0. Siccome $\lambda = \alpha + i\beta = 1+2i$ è radice, con molteplicità 1, del polinomio caratteristico, la soluzione particolare va cercata nella forma

$$y_P(t) = te^t\Big((at+b)\cos(2t) + (ct+d)\sin(2t)\Big) = e^t\Big((at^2+bt)\cos(2t) + (ct^2+dt)\sin(2t)\Big);$$

siccome

$$\begin{aligned} y_P'(t) = e^t\Big[&\cos(2t)\Big((a+2c)t^2 + (2a+b+2d)t + b\Big) + \\ &+ \sin(2t)\Big((c-2a)t^2 + (2c-2b+d)t + d\Big)\Big], \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} y_P''(t) = e^t\Big[&\cos(2t)\Big((4c-3a)t^2 + (4a-3b+8c+4d)t + 2a+2b+4d\Big) + \\ &+ \sin(2t)\Big(-(4a+3c)t^2 - (8a+4b-4c+3d)t - 4b+2c+2d\Big)\Big] \end{aligned}$$

Imponendo l'equazione

$$y_P''(t) - 2y_P'(t) + 5y_P(t) = (1+t)e^t\cos(2t),$$

arriviamo all'equazione

$$e^t\Big[\cos(2t)\Big(8ct + 2a + 4d\Big) + \sin(2t)\Big(-8at - 4b + 2c\Big)\Big] = e^t(1+t)\cos(2t)$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} 8c = 1 \\ 2a + 4d = 1 \\ -8a = 0 \\ -4b + 2c = 0 \end{cases}$$

Otteniamo quindi che una soluzione particlare è data da

$$y_P(t) = e^t\left[\frac{t}{16}\cos(2t) + \Big(\frac{t^2}{8} + \frac{t}{4}\Big)\sin(2t)\right]$$

Quindi la soluzioni generale dell'equazione omogenea è data da

$$y(t) = e^t\Big(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)\Big) + e^t\left[\frac{t}{16}\cos(2t) + \Big(\frac{t^2}{8} + \frac{t}{4}\Big)\sin(2t)\right].$$

Infine, imponendo le condizioni iniziali, si ottengono i valori $c_1 = 1$ e $c_2 = -\frac{1}{32}$; in definitiva la soluzione del Problema di Cauchy è data da

$$y(t) = e^t\left[\Big(1 + \frac{t}{16}\Big)\cos(2t) + \Big(-\frac{1}{32} + \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4}\Big)\sin(2t)\right].$$

Soluzione 9.40 Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è dato da $\lambda^2 - 1$, quindi la soluzione generale dell'omogenea è data da

$$y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Per trovare la soluzione particolare, applichiamo il metodo della variazione delle costanti; supponiamo quindi che

$$y(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t};$$

derivando otteniamo che

$$y'(t) = c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} + c_1(t)e^t - c_2(t)e^{-t}.$$

Poniamo quindi la condizione

$$c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} = 0$$

e deriviamo una seconda volta, ottenendo

$$y''(t) = c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} + c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}.$$

Impondi quindi la condizione

$$y''(t) - y(t) = \frac{1}{1+e^t}$$

si arriva all'equazione

$$c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t}.$$

Dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} = 0 \\ c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} = \dfrac{1}{1+e^t} \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$\begin{cases} c_1'(t) = \dfrac{1}{2e^t(1+e^t)} \\ c_2'(t) = -\dfrac{e^t}{2(1+e^t)}. \end{cases}$$

Integrando otteniamo

$$\begin{cases} c_1(t) = c_1 - \dfrac{t}{2} - \dfrac{e^{-t}}{2} + \dfrac{1}{2}\log(1+e^t) \\ c_2(t) = c_2 - \dfrac{1}{2}\log(1+e^t). \end{cases}$$

da cui la soluzione generale dell'equazione data

$$\begin{aligned} y(t) =& c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} - \frac{te^t}{2} + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)\log(1+e^t) \\ =& c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} - \frac{te^t}{2} + \sinh(t)\log(1+e^t). \end{aligned}$$