UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
C.d.S. Ingegneria Civile e Ambientale

Eserciziario di Analisi Matematica II [1]

Michele Miranda
Dipartimento di Matematica e Informatica
via Machiavelli 35, I-44121 Ferara
e-mail: michele.miranda@unife.it

a.a. 2019-2020

[1] versione aggiornata al 13 novembre 2019

Indice

Capitolo 7

Integrali curvilinei e di superficie

Esercizio 7.1 Date le funzioni

$$f(x,y,z) = 4x^2 y \cos(yz), \qquad F(x,y,z) = (2x^2, \sin y, e^{z^2}),$$

si determino le funzioni Δf, rot$F$ e div$F$.

Esercizio 7.2 Si calcolino divergenza e rotore per i seguenti campi vettoriali:

$$F(x,y,z) = (y,x,0), \qquad F(x,y,z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}(x,y,z),$$

Esercizio 7.3 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\varphi f ds$$

per le seguenti funzioni e curve:

1. $f(x,y) = e^{x+y}$, $\varphi(t) = (t, t-1)$, $t \in [1,2]$;
2. $f(x,y) = xy$, $\varphi(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,1]$;
3. $f(x,y) = \frac{x}{1+y^2}$, $\varphi(t) = (\cos t, \mathrm{sen} t)$, $t \in [0, \pi/2]$;
4. $f(x,y) = \sqrt{1+4x^2} + 3y$, $y = x^2$, $x \in [0,1]$;
5. $f(x,y) = x^2$, $y = x^2 + \ln x$, $x \in [1,2]$;
6. $f(x,y) = (x^2+y^2)^2$, $\varrho = e^{2\theta}$ con $\theta \in (-\infty, 0]$;
7. $f(x,y,z) = e^{2z}$, $\varphi(t) = (\cos \ln t, \mathrm{sen} \ln t, \ln t)$, $t \in [1, e^2]$;

8. $f(x,y,z) = \sqrt{z}$, $\varphi(t) = (\cos t, \text{sen} t, t^2)$, $t \in [0,\pi]$.

Esercizio 7.4 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\varphi F \cdot d\vec{s}$$

dove:

1. $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ e $\varphi(t) = (\cos t, \text{sen} t)$, $t \in [0,2\pi]$;
2. $F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + 1, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + 3\right)$, $\varphi(t) = (\cos t, \text{sen} t, 0)$, $t \in [0,2\pi]$;
3. il campo del punto precedente ma con $\varphi(t) = (\cos t, \text{sen} t, t)$, $t \in [0,2\pi]$.

Esercizio 7.5 Dire se il campo

$$F(x,y) = \left(xy, \frac{x^2}{2}\right)$$

è conservativo o meno; calcolare quindi il lavoro del campo F lungo la curva $r : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$r(t) = \left(t, \arctan \frac{1-\cos(3t)}{2-\text{sen}^2 t}\right).$$

Esercizio 7.6 Dire se i seguenti campi sono conservativi e, in caso, determinarne i potenziali;

$$F(x,y) = (2x+3y, 4x-5y), \qquad G(x,y) = \left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}, -\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right).$$

Esercizio 7.7 Calcolare l'integrale

$$\int_E x^2 dxdy,$$

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$, sia come integrale doppio sia passando mediante il Teorema della divergenza.

Esercizio 7.8 Calcolare la circuitazione del campo $F(x,y) = (y^2, x)$ lungo il bordo del quadrato $[0,1]^2$, sia mediante la definizione, sia utilizzando il Teorema del rotore di Stokes.

Esercizio 7.9 Calcolare divergenza e rotore dei seguenti campi;

$$F(x,y,z) = (2x^2, \text{sen} y, e^{z^2}), \qquad G(x,y,z) = (yz, -x\cos z, ye^x).$$

Esercizio 7.10 Si dica se i seguenti campi sono conservativi o meno e in caso se ne determino i potenziali;

1. $F(x,y,z) = (x - xe^z, -z, e^z)$;

2. $F(x,y,z) = (x - xe^x, -y, e^z)$;

3. $F(x,y,z) = (x^2, y, z^3)$.

Esercizio 7.11 Utilizzare il Teorema della divergenza per calcolare l'area della porzione di piano racchiusa dall'asteroide, cioé la curva $r : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ parametrizzata da

$$r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

Esercizio 7.12 Si calcoli l'area dell'elicoide, cioè della superficie parametrizzata da $r : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t,s) = (t \cos s, t\,\mathrm{sen} s, s).$$

Esercizio 7.13 Dato il campo $F(x,y,z) = (y, z, -x)$, si calcoli il flusso del campo rotore di F, cioè $\Phi(\mathrm{rot}F, \Sigma)$, con $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$.

Esercizio 7.14 Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (xy, xy, z)$ passante per la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) : z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}.$$

Esercizio 7.15 Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (x,y,z)$$

uscente dalla superficie della sfera $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

Esercizio 7.16 Si determini il flusso del campo

$$F(x,y,z) = \frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3}(x,y,z), \qquad k, q > 0$$

uscente dalla superficie $\Sigma = \{y = a, x^2 + z^2 \leq R^2\}$, $a > 0$.

Esercizio 7.17 Si determini il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (y, z, -x)$$

uscente dalla superficie $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$.

Esercizio 7.18 Si determini il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (x, -y, z)$$

uscente dalla superficie del cilindro $\Sigma = \partial E$ con $E = \{x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$.

Esercizio 7.19 Dire se il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

è conservativo o meno e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

Esercizio 7.20 Dire se il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{2x+y}{(x^2+xy)^{2/3}}, \frac{x}{(x^2+xy)^{2/3}} + 2y \right)$$

è conservativo o meno e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

Esercizio 7.21 Dimostrare che il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2xz-y}{x^2+y^2}, \frac{x+2yz}{x^2+y^2}, \log(x^2+y^2) \right)$$

non è conservativo ma è dotato di potenziali locali.

Esercizio 7.22 Verificare che il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + 1, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + 3 \right)$$

è conservativo e determinarne i potenziali.

Esercizio 7.23 Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma \frac{z+y^2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} d\Sigma$$

dove

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2, x^2+y^2 \geq 1, x^2+4y^2 \leq 4\}.$$

Esercizio 7.24 Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma \frac{x}{\sqrt{4z+1}} d\Sigma$$

dove Σ è la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2, x^2+y^2-y \leq 0, y \geq 1/2, x \geq 0\}.$$

Esercizio 7.25 Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (x^3 e^{-z}, 3xz, 3x^2 e^{-z})$$

uscente dall'emisfero superiore della sfera di equazione $x^2+y^2+z^2 \leq 16$.

Esercizio 7.26 Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x^2, y, z)$$

uscente dal tetraedro $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

Esercizio 7.27 Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3}(x, y, z)$$

uscente da una qualsiasi superficie chiusa contenente all'interno l'origine (Legge di Gauss).

Esercizio 7.28 Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = (x + y, z - y, x^3 y)$$

sulla superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Esercizio 7.29 Verificare la formula del Teorema di Stokes per il campo $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x - y)$ e la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y = z\}.$$

Esercizio 7.30 Date le funzioni

$$f(x, y, z) = 4x^2 y \cos(yz), \qquad F(x, y, z) = (2x^2, \sin y, e^{z^2}),$$

si determino le funzioni Δf, rot$F$ e div$F$.

Esercizio 7.31 Dato il campo

$$F(x, y, z) = (x - xe^z, -z, e^z)\,,$$

si dica se è conservativo ed in caso affermativo se ne determini un potenziale.

Esercizio 7.32 Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (xy, xy, z)$ passante per la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}.$$

Esercizio 7.33 Utilizzare il Teorema della divergenza per calcolare l'area della porzione di piano racchiusa dall'asteroide, cioé la curva $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ parametrizzata da

$$r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

Esercizio 7.34 Dato il campo $F(x, y, z) = (y, z, -x)$, calcolare il flusso del campo rot$F$ attraverso la superficie $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ orientata con il campo normale verso l'alto. Verificare la validità del risultato utilizzando il Teorema di Stokes.

Esercizio 7.35 Calcolare il lavoro del campo $F(x, y, z) = (y-z, z+x, x+y)$ lungo la curva parametrizzata da

$$r(t) = (2\cos t, \sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Esercizio 7.36 Si calcoli l'area della superficie parametrizzata da

$$r(t, s) = (t\cos s, t\sin s, t^2), \qquad (t, s) \in [0, 1] \times [0, \pi].$$

Esercizio 7.37 Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma z d\Sigma$$

con $\Sigma = \{z = xy, 0 \leq y \leq x\sqrt{3}, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 7.38 Determinare il flusso del campo $F(x, y, z) = (0, ye^{-x}, 0)$ passante per la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq y\}.$$

7.1 Soluzioni

Soluzione 7.1 Con un conto diretto troviamo che

$$\begin{aligned}\Delta f(x, y, z) =& \operatorname{div}\nabla f(x, y, z)\\ =& \operatorname{div}(8xy\cos(yz), 4x^2\cos(yz) - 4x^2yz\sin(yz), -4x^2y^2\sin(yz))\\ =& (8y - 4x^2yz^2 - 4x^2y^3)\cos(yz) - 8x^2z\sin(yz),\end{aligned}$$

mentre per il campo F si ha che

$$\operatorname{rot}F(x, y, z) = 0, \qquad \operatorname{div}F(x, y, z) = 4x + \cos y + 2ze^{z^2}.$$

Soluzione 7.2 Il primo campo è definito ed è regolare in tutto $\mathbb{R}^3$; per quanto riguarda la divergenza abbiamo

$$\operatorname{div}F(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}y + \frac{\partial}{\partial y}x + \frac{\partial}{\partial z}0 = 0,$$

mentre per quanto riguarda il rotore abbiamo

$$\operatorname{rot}F(x, y, z) = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & x & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 1-1) = 0.$$

Quindi il campo ha sia divergenza che rotore nullo. Quest'ultimo fatto, unito al fatto che il dominio di F è semplicemente connesso, implica che il campo è conservativo; per cercare il potenziale di F, bisogna risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = F_1(x, y, z) = y \\ \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} = F_2(x, y, z) = x \\ \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} = F_3(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Integrando la prima equazione si ottiene che

$$U(x, y, z) = yx + c,$$

dove c è una costante per x (cioè la derivata parziale rispetto ad x è nulla), ma in generale non per y e z; scriveremo quindi $c = c(y, z)$. Sostituendo l'espressione di U appena trovata nella seconda equazione, si trova

$$x + \frac{\partial c(y, z)}{\partial y} = x,$$

da cui $c(y, z) = c(z)$ in quanto la sua derivata parziale rispetto ad y si annulla. Infine, sostituendo nella terza equazione troveremo che $c(z) = c$, cioè c è una costante pura. Abbiamo quindi che il potenziale è dato da

$$U(x, y, z) = xy + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Per quanto riguarda il secondo campo, il suo dominio è $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$; la sua divergenza è data da

$$\mathrm{div}F(x, y, z) = -\frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} + \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^5} = 0,$$

mentre il rotore è dato da

$$\mathrm{rot}F(x, y, z) = \left(\frac{3yz - 3zy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^5}, \frac{3xz - 3zx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^5}, \frac{3yx - 3xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^5} \right) = 0,$$

quindi anche questo campo ha sia divergenza che rotore nullo. In particolare, siccome anche in questo caso il dominio del campo è semplicemente connesso, avremo che il campo è conservativo e il suo potenziale, come mostra un conto diretto, è dato da

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Soluzione 7.3

1. Si tratta semplicemente di usare la formula

$$\int_\varphi f ds = \int_1^2 f(\varphi(t))\|\varphi'(t)\|dt = \int_1^2 f(t, t-1)\|(1,1)\|dt = \sqrt{2}\int_1^2 e^{2t-1}dt = \frac{e(e^2-1)}{\sqrt{2}}.$$

2. La curva è data da $\varphi(t) = (t, t^2)$, quindi $\varphi'(t) = (1, 2t)$, da cui

$$\int_\varphi f = \int_0^1 f(t, t^2)\|\varphi'(t)\|dt = \int_0^1 t^3\sqrt{1 + 4t^2}dt = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120}.$$

3. Si ha che

$$\int_\varphi f ds = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + \mathrm{sen}^2 t}dt = [\arctan \mathrm{sen} t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Si ha che

$$\int_\varphi f ds = \int_0^1 (\sqrt{1+4x^2}+3x^2)\sqrt{1+4x^2}dx = \frac{7}{3}+\frac{27\sqrt{5}}{32}-\frac{3\,\mathrm{arcsenh}\,2}{64}.$$

5. Si ottiene che

$$\int_\varphi f ds = \int_1^2 x^2\|(1,2x+1/x)\|dx = \int_1^2 x\sqrt{4x^4+5x^2+1}dx =$$
$$=\frac{1}{128}\left(-52\sqrt{10}+148\sqrt{85}+9\ln(13+4\sqrt{10})-9\ln(37+4\sqrt{85})\right)$$

6. La curva in questione è data da $\varphi(\vartheta)=(e^{2\vartheta}\cos\vartheta, e^{2\vartheta}\mathrm{sen}\vartheta)$, e quindi l'integrale diventa

$$\int_\varphi f ds = \int_{-\infty}^0 e^{10\vartheta}\sqrt{5}d\vartheta = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

7. Si ha che

$$\int_\varphi f ds = \int_1^{e^2} e^{2\ln t}\left\|\left(-\frac{\mathrm{sen}\ln t}{t},\frac{\cos\ln t}{t},\frac{1}{t}\right)\right\| dt$$
$$= \int_1^{e^2}\sqrt{2}tdt = \frac{e^4-1}{\sqrt{2}}.$$

8. Si ottiene

$$\int_\varphi f ds = \int_0^\pi t\sqrt{1+4t^2} = \int_0^\pi t\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{(1+4\pi^2)^{3/2}-1}{12}.$$

Soluzione 7.4

1. Dalla definizione di integrale curvilineo per campi vettoriali, si ottiene

$$\int_\varphi F\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} F(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t,\mathrm{sen}t)\cdot(-\mathrm{sen}t,\cos t)dt$$
$$= \int_0^{2\pi}(\mathrm{sen}^2 t+\cos^2 t)dt = 2\pi.$$

2. Si ottiene

$$\int_\varphi F\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} F(\cos t,\mathrm{sen}t,0)\cdot(-\mathrm{sen}t,\cos t,0)dt$$
$$= \int_0^{2\pi}(2\cos t, 2\mathrm{sen}t+1,3)\cdot(-\mathrm{sen}t,\cos t,0)dt = 0.$$

3. Si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_\varphi F \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \mathrm{sen}t, t) \cdot (-\mathrm{sen}t, \cos t, 1)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\cos t}{1+t^2}, \frac{2\mathrm{sen}t}{1+t^2} + 1, \frac{2t}{1+t^2} + 3 \right) \cdot (-\mathrm{sen}t, \cos t, 1)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(3 + \cos t + \frac{2t}{1+t^2} \right) dt = 6\pi + \ln(1 + 4\pi^2).
\end{aligned}$$

Soluzione 7.5 Notiamo che

$$\mathrm{rot}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y) = 0,$$

quindi il campo è irrotazionale e definito su tutto $\mathbb{R}^2$; quindi F è conservativo ed ammette quindi un potenziale U. Tale potenziale è determinato dalle condizioni

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x,y) = xy, \qquad \frac{\partial}{\partial y}U(x,y) = \frac{x^2}{2};$$

si ottiene così il potenziale

$$U(x,y) = \frac{x^2 y}{2} + c.$$

Dato che il campo è conservativo, il lavoro del campo lungo la curva sarà determinato dai valori del potenziale nei punti estremi della curva, cioè

$$\int_r F d\vec{s} = U(r(\pi)) - U(r(0)) = U\left(\pi, \frac{\pi}{4}\right) - U(0,0) = \frac{\pi^3}{8}.$$

Soluzione 7.6 Calcoliamo il rotore dei due campi dati;

$$\mathrm{rot}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y) = 1;$$

quindi F non è irrotazionale e quindi non può essere conservativo. Per il secondo campo abbiamo che

$$\mathrm{rot}G(x,y) = 0,$$

e quindi G è irrotazionale. Il dominio di G è dato da

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\},$$

che è unione di quattro aperti connessi e semplicemente connessi (i quattro quadranti del piano cartesiano). Quindi G è conservativo su ognuno dei quattro quadranti e il potenziale è dato da

$$U(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + c,$$

con c costante che può assumere valori differenti su ogni componente connessa.

Soluzione 7.7 Possiamo calcolare l'integrale passando alle coordinate polari

$$\int_E x^2 dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\sqrt{2}} \varrho^3 \cos^2 \vartheta d\varrho = \frac{3\pi}{4}.$$

Se vogliamo usare il Teorema della divergenza, dobbiamo cercare un campo F per cui

$$\text{div}F(x,y) = x^2;$$

possiamo quindi considerare il campo $F(x,y) = (0, x^2y)$ (così come si potrebbero considerare i campi $(x^3/3, 0)$ o $(x^3/6, x^2y/2)$). Il bordo dell'insieme E viene quindi parametrizzato dalle due curve

$$r_1(t) = \sqrt{2}(\cos t, \text{sen}t), \qquad r_2(t) = (\cos t, -\text{sen}t),$$

con $t \in [0, 2\pi]$. La scelta delle curve è stata fatta in modo che il bordo esterno di E venga percorso in senso antiorario, mentre quello interno in senso orario. Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}\int_{\partial E} F \cdot \hat{n}_E =& \int_0^{2\pi} F(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\text{sen}t) \cdot (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\text{sen}t)dt+ \\ &+ \int_0^{2\pi} F(\cos t, -\text{sen}t) \cdot (-\cos t, \text{sen}t)dt \\ =& \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(2t)dt = \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

Soluzione 7.8 Possiamo parametrizzare il bordo di $[0,1]^2$ mediante le quattro curve, tutte definite in $[0,1]$,

$$r_1(t) = (t, 0), r_2(t) = (1, t), r_3(t) = (1-t, 1), r_4(t) = (0, 1-t).$$

Le curve sono parametrizzate in modo che la circuitazione avvenga in senso antiorario; si ottiene che

$$\int_{r_1} F d\vec{s} = \int_0^1 F(t,0) \cdot (1,0)dt = \int_0^1 (0,t) \cdot (1,0)dt = 0,$$

mentre su r_2

$$\int_{r_2} F d\vec{s} = \int_0^1 F(1,t) \cdot (0,1)dt = \int_0^1 (t^2, 1) \cdot (0,1)dt = 1,$$

e ancora su r_3

$$\int_{r_3} F d\vec{s} = \int_0^1 F(1-t, 1) \cdot (-1, 0)dt = -\int_0^1 (1,t) \cdot (1,0)dt = -1,$$

ed infine su r_4

$$\int_{r_4} F d\vec{s} = \int_0^1 F(0, 1-t) \cdot (0,-1)dt = -\int_0^1 ((1-t)^2, 0) \cdot (0,1)dt = 0.$$

Sommando si ottiene che, denotando con r la curva somma delle quattro curve date,

$$\oint_r F d\vec{s} = 0.$$

Se vogliamo usare il Teorema di Stokes, cioè la formula

$$\oint_r F d\vec{s} = \int_{[0,1]^2} \mathrm{rot} F(x,y) dxdy,$$

notiamo che

$$\mathrm{rot} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y) = 1 - 2y,$$

e quindi

$$\int_{[0,1]^2} \mathrm{rot} F(x,y) dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (1-2y) dy = 0.$$

Si noti che in questo caso la circuitazione è nulla anche se il campo non è conservativo.

Soluzione 7.9 Abbiamo che

$$\mathrm{div} F(x,y,z) = 4x + \cos y + 2ze^{z^2}, \qquad \mathrm{rot} F(x,y,z) = (0,0,0),$$

quindi il campo F è irrotazionale ma non solenoidale, mentre

$$\mathrm{div} G(x,y,z) = -\cos z, \qquad \mathrm{rot} G(x,y,z) = (e^x - x\,\mathrm{sen} z, y - ye^x, -\cos z - z),$$

quindi G non è né irrotazionale né solenoidale.

Soluzione 7.10 Abbiamo quanto segue;

1. per il primo campo,
$$\mathrm{rot} F(x,y,z) = (1, -xe^z, 1),$$
quindi la condizione necessaria affinchè il campo sia conservativo non è verificata, quindi il campo non può essere conservativo e di conseguenza non può ammettere potenziale;

2. per il secondo campo,
$$\mathrm{rot} F(x,y,z) = (0,0,0),$$
quindi F è irrotazionale e dato che il suo dominio è tutto $\mathbb{R}^3$ e quindi semplicemente connesso, F è conservativo;

3. per il terzo e ultimo campo,
$$\mathrm{rot} F(x,y,z) = (0,0,0),$$
quindi anche questo campo è irrotazionale e definito su tutto $\mathbb{R}^3$, quindi conservativo.

Soluzione 7.11 Per il calcolo dell'area della regione E racchiusa dall'astroide utilizziamo la formula

$$\int_E \mathrm{div} F(x,y) dxdy = \int_\gamma F \cdot \hat{n} d\gamma$$

dove $\gamma = \partial E$ e $\hat{n}$ é la normale a γ uscente da E. Per semplicitá, prendiamo come F il campo con divergenza 1 dato da $F(x, y) = (x, 0)$; se utilizziamo la paremetrizzazione r data nel testo, la normale uscente dall'insieme sará data da

$$\hat{n}(t) = \frac{(3\sin^2 t\cos t, 3\cos^2 t\sin t)}{\|(3\sin^2 t\cos t, 3\cos^2 t\sin t)\|},$$

da cui, tenuto conto che $\|\hat{n}(t)\| = \|r'(t)\|$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(E) &= \int_0^{2\pi} (\cos^3 t, 0) \cdot (3\sin^2 t\cos t, 3\cos^2 t\sin t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3\sin^2 t\cos^4 t dt = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) dt = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

Soluzione 7.12 Per il calcolo dell'area abbiamo bisogno di determinare $r_t(t, s) \times t_s(t, s)$; si trova che

$$r_t(t, s) \times r_s(t, s) = (\mathrm{sen} s, -\cos s, t),$$

da cui

$$\mathrm{Area}(\Sigma) = \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \|r_t(t, s)\times r_s(t, s)\| dtds = \int_0^{2\pi} ds \int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt = \pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})).$$

Soluzione 7.13 Il rotore del campo dato é $\mathrm{rot}F(x, y, z) = (-1, 1, -1)$ e la superficie data é il grafico

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \qquad (x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \le R^2\};$$

il flusso sará quindi dato da

$$\begin{aligned}\Phi(\mathrm{rot}F, \Sigma) &= \int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma = \int_D (-1, 1, -1) \cdot (-\nabla g(x, y), 1)dxdy \\ &= \int_D \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} - 1\right) dxdy = -\int_D dxdy \\ &= -\,\mathrm{Area}(D) = -\pi R^2.\end{aligned}$$

Il conto si puó anche effettuare applicando il Teorema di Stokes, cioé

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot \hat{n} d\Sigma = \int_\gamma F \cdot d\vec{s},$$

dove γ é la curva che descrive il bordo di Σ, con orientazione indotta dall'orientazione di Σ. Siccome Σ é orientata con la normale verso l'alto, γ é la circonferenza di raggio R contenuta nel piano $z = 0$ orientata in senso antiorario, cioé parametrizzata dalla solita funzione

$$r(t) = (R\cos t, R\sin t, 0).$$

Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}\int_\gamma F \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} F(R\cos t, R\sin t, 0) \cdot (-R\sin t, R\cos t, 0)dt \\ &= -\int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 t dt = -\pi R^2.\end{aligned}$$

Soluzione 7.14 La superficie Σ è il grafico della funzione $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ sul dominio $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ (si ricava dalla condizione $z \geq 0$); per il calcolo del flusso, possiamo quindi utilizzare la parametrizzazione cartesiana $(x, y, g(x, y))$ e, non essendo specificata l'orientazione di Σ, scegliamo l'orientazione per la quale ν_Σ punti verso l'alto. Troveremo quindi che

$$\begin{aligned}\Phi(F,\Sigma) =& \int_D F(x,y,g(x,y)) \cdot (-\nabla g(x,y), 1) dxdy \\ =& \int_D (xy, xy, 1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) dxdy \\ =& \int_D (1 - x^2 - y^2) dxdy \\ =& 2\pi \int_0^2 (1 - \varrho^2)\varrho d\varrho = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Soluzione 7.15 Il flusso può essere calcolato in due modi; il primo è mediante la definizione

$$\Phi(F,\Sigma) = \int_\Sigma F \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma = \int_\Sigma (x,y,z) \cdot \frac{1}{R}(x,y,z) d\Sigma = R\text{Area}(\Sigma) = 4\pi R^3,$$

dove si è tenuto conto che il vettore

$$\hat{n}_\Sigma(x,y,z) = \frac{1}{R}(x,y,z)$$

descrive il versore normale a Σ nel punto $(x,y,z) \in \Sigma$ in quanto $\|(x,y,z)\| = R$. Il secondo metodo è utilizzare il Teorema della divergenza e scrivere

$$\Phi(F,\Sigma) = \int_{B_R(0)} \text{div}F(x,y,z) dxdydz = 3\text{Vol}(B_R(0)) = 4\pi R^3$$

in quanto $\text{div}F(x,y,z) = 3$.

Soluzione 7.16 Calcoliamo il flusso usando la definizione (in questo caso, la superficie Σ non è un bordo di un insieme, quindi non possiamo usare il Teorema della divergenza);

$$\Phi(F,\Sigma) = \int_\Sigma F \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma.$$

Come normale alla superficie Σ, in quanto quest'ultima è contenuta nel piano $y = a$, possiamo prendere $\hat{n}_\Sigma(x,y,z) = (0,1,0)$; in questo modo stiamo considerando la parametrizzazione

$$r(x,z) = (x,a,z), \qquad x^2 + z^2 \leq R^2.$$

L'integrale di superficie diventa quindi

$$\begin{aligned}\Phi(F,\Sigma) =& \int_{\{x^2+z^2 \leq R^2\}} \frac{kqa}{\sqrt{x^2+z^2+a^2}^3} dxdz = kqa \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \frac{\varrho}{\sqrt{a^2+\varrho^2}^3} d\varrho \\ =& 2\pi kq \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right).\end{aligned}$$

Soluzione 7.17 Anche in questo caso, la superficie non è il bordo di un insieme e quindi utilizziamo direttamente la definizione di flusso:

$$\Phi(F,\Sigma) = \int_\Sigma (y,z,-x)\cdot \frac{1}{R}(x,y,z)d\Sigma = \frac{1}{R}\int_\Sigma (yx+yz-xz)d\Sigma.$$

Per il calcolo di quest'ultimo integrale, possiamo passare alle coordinate sferiche oppure vedere Σ come il grafico della funzione $z = g(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$; utilizzeremo questo secondo approccio.

$$\begin{aligned}\Phi(F,\Sigma) =& \frac{1}{R}\int_{\{x^2+y^2\le R^2\}} \left(yx+(y-x)\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy\\ =&\int_{\{x^2+y^2\le R^2\}}\left(\frac{xy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}+y-x\right)dxdy = 0\end{aligned}$$

in quanto le funzioni da integrare sono dispari sia rispetto ad x che rispetto a y.

Il conto precedente poteva essere semplificato come segue; se è vero che Σ non è il bordo di un insieme, è però vero che è parte del bordo dell'insieme $E = \{x^2+y^2+z^2 = R^2, z \ge 0\}$; l'atra parte del bordo di E è costituito dalla superficie $S = \{x^2+y^2 \le R^2, z = 0\}$, e quindi dal teorema della divergenza

$$\int_{\Sigma\cup S} F\cdot \hat{n} d\Sigma = \int_E \mathrm{div}F(x,y,z)dxdydz = 0$$

in quanto $\mathrm{div}F = 0$, e quindi, tenendo presente che S è contenuta nel piano $z = 0$ e che $(0,0,1)$ è un vettore normale ad S ma entrante in E (e non uscente), se ne deduce che

$$\Phi(F,\Sigma) = \int_S F\cdot(0,0,1)dxdy = -\int_S xdxdy = 0.$$

Soluzione 7.18 Possiamo calcolare l'integrale più semplicemente utilizzando il Teorema della divergenza, in quanto

$$\Phi(F,\Sigma) = \int_E \mathrm{div}F(x,y,z)dxdydz = \mathrm{Vol}(E) = \pi h R^2$$

in quanto $\mathrm{div}F = 1$. Verifichiamo tale identità calcolando l'integrale di superficie dividento $\Sigma = \Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$ con

$$\Sigma_1 = \{x^2+y^2 = R^2, 0\le z\le h\}, \qquad \Sigma_2 = \{x^2+y^2\le R^2, z = 0\},$$
$$\Sigma_3 = \{x^2+y^2\le R^2, z = h\}.$$

Su Σ_1 utilizzeremo il campo $\hat{n}_\Sigma = \frac{1}{R}(x,y,0)$, mentre su Σ_2 il campo $\hat{n}_\Sigma = (0,0,-1)$ e infine su Σ_3 il campo $\hat{n}_\Sigma = (0,0,1)$. Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}\Phi(F,\Sigma) =& \int_{\Sigma_1} F\cdot\frac{1}{R}(x,y,0)d\Sigma + \int_{\Sigma_2} F\cdot(0,0,-1)\Sigma + \int_{\Sigma_3} F\cdot(0,0,1)d\Sigma\\ =&\frac{1}{R}\int_{\Sigma_1}(x^2-y^2)d\Sigma - \int_{\Sigma_2} zd\Sigma + \int_{\Sigma_3} zd\Sigma\\ =&\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^h (R^2\cos^2\vartheta - R^2\mathrm{sen}^2\vartheta)dt + \pi h R^2 = \pi h R^2.\end{aligned}$$

Per il calcolo dell'integrale su Σ_1 abbiamo utilizzato la parametrizzazione

$$r(\vartheta, t) = (R\cos\vartheta, R\mathrm{sen}\vartheta, t), \qquad \vartheta \in [0, 2\pi), t \in [0, h],$$

per la quale si ha che $\|r_\vartheta \times r_t\| = R$.

Soluzione 7.19 Se si considera il cammino chiuso $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, si ottiene che

$$\int_\gamma F \cdot d\vec{s} = 2\pi,$$

e quindi il campo risulta non essere conservativo. Otteniamo però che $\mathrm{rot}F = 0$, quindi F ammette potenziale locale U; per calcolare tale potenziale bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

che ha per soluzione, integrando la prima rispetto a x e sostituendo nella seconda, la funzione

$$U(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c.$$

Il campo ammette quindi potenziale locale, ma il dominio è dato da $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ che non è semplicemente connesso; per rendere il campo conservativo, dovremmo rendere il dominio semplicemente connesso, cosa che può essere fatta se consideriamo ad esempio il dominio

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0\}.$$

Soluzione 7.20 Notare che il dominio del campo è dato da

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = 0 \text{ o } y = -x\},$$

che è semplicemente connesso anche se non connesso. Quindi per vedere se il campo è conservativo basta e serve che si abbia $\mathrm{rot}F = 0$, cosa facilmente verificata. Per trovare il potenziale U, bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{2x+y}{(x^2+xy)^{2/3}} \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{x}{(x^2+xy)^{2/3}} + 2y \end{cases}$$

che ammette per soluzione la funzione

$$U(x, y) = 3(x^2+xy)^{2/3} + y^2 + c$$

con la costante c che può assumere valori diversi su ogni componente connessa.

Soluzione 7.21 Si noti che preso il cammino chiuso $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ si ha

$$\int_\gamma F \cdot d\vec{s} = 2\pi,$$

e quindi il campo non è conservativo. Però si ha che $\mathrm{rot}F = 0$, e quindi il campo ammette potenzile locale, che si ricava essere

$$U(x, y, z) = z \ln(x^2 + y^2) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c.$$

Soluzione 7.22 Il dominio è semplicemente connesso e $\mathrm{rot}F = 0$, quindi il campo è conservativo. Il potenziale infine è dato dalla funzione

$$U(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) + y + 3z + c.$$

Soluzione 7.23 L'integrale che si vuole calcolare è l'integrale della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{z + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}}$$

sulla superficie, data come grafico della funzione

$$z = g(x, y) = x^2 - y^2$$

sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

Usando quindi la definizione di integrale superficiale, si ottiene che

$$d\Sigma = \sqrt{1 + \|\nabla g(x, y)\|^2} dxdy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy,$$

da cui

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \frac{z + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} d\Sigma &= \int_D \frac{x^2 - y^2 + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy \\ &= \int_D x^2 dxdy = \frac{7}{4}\pi.\end{aligned}$$

Soluzione 7.24 La superficie sulla quale si vuole calcolare l'integrale è dato dal grafico della funzione

$$z = g(x, y) = x^2 + y^2$$

con $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - y \leq 0\,,\ y \geq 1/2\,, x \geq 0\}$. Quindi otteniamo che

$$d\Sigma = \sqrt{1 + \|\nabla g(x, y)\|} dxdy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy$$

e l'integrale di superficie diventa quindi

$$\int_D \frac{x}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy = \int_D x dxdy = \frac{1}{24}.$$

Soluzione 7.25 Per calcolare il flusso di tale campo si puó procedere in due modi, o scrivendo l'integrale di superficie, oppure cercare di applicare il Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$. Lasciamo il primo caso come esercizio e vediamo come procedere nel secondo caso. Per poter applicare il Teorema dalla divergenza dobbiamo avere a che fare con superfici chiuse, quindi, siccome nel nostro caso abbiamo solo l'emisfero superiore E della sfera $x^2+y^2+z^2=16$, dobbiamo prima di tutto chiudere tale superficie; il modo più semplice per fare ciò è considerare l'insieme

$$S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

A questo punto abbiamo che, se

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\},$$

allora $\partial A = E \cup S$ e quindi

$$\int_{E\cup S} F \cdot \nu d\Sigma = \int_{\partial A} F \cdot \nu d\Sigma = \int_A \mathrm{div} F dxdydz.$$

Quindi, dato che $\mathrm{div}F = 0$,

$$\int_E F \cdot \nu d\Sigma = -\int_S F \cdot \nu d\Sigma.$$

Ma su S si ha che $F(x, y, 0) = (x^3, 0, 3x^2)$, $\nu = (0, 0, -1)$ e $d\Sigma = dxdy$, quindi

$$\int_S F \cdot \nu d\Sigma = -\int_{x^2+y^2\leq 16} 3x^2 dxdy = -192\pi;$$

in definitiva abbiamo trovato che

$$\int_E F \cdot \nu d\sigma = 192\pi.$$

Soluzione 7.26 Utilizzando il Teorema della divergenza, tenendo presente che

$$\mathrm{div}F(x, y, z) = 2x + 2,$$

otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_{\partial T} F \cdot \nu d\Sigma &= \int_T \mathrm{div} F dxdydz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (2x + 2)dz = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Per controllare che tale risultato sia giusto, si potrebbe calcolare l'integrale di superficie del campo vettoriale F.

Soluzione 7.27 Notiamo anzitutto che il campo dato ha la proprietà che $\mathrm{div}F(x, y, z) = 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Questo vuol dire che se T è un qualsiasi dominio che non contiene l'origine, si ha che

$$\int_{\partial T} F \cdot \nu d\Sigma = 0.$$

A questo punto, se $\Sigma = \partial A$ è una qualsiasi superficie chiusa che contiene al suo interno l'origine, non possiamo concludere che il flusso sia nullo in quanto la singolarità del campo F cade proprio nella porzione di spazio racchiusa dalla superficie Σ. Siccome l'origine è un punto interno a Σ, esisterà un raggio R tale che la palla $B_R(0)$ è tutta contenuta all'interno di Σ consideriamo quindi la porzione di spazio $T = A \backslash B_R(0)$, abbiamo che $\partial T = \Sigma \cup \partial B_R(0)$ e a questo punto l'origine non è più all'interno di T, quindi

$$0 = \int_T \mathrm{div} F dxdydz = \int_\Sigma F \cdot \nu d\Sigma - \int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\Sigma$$

dove il segno meno nell'ultimo integrale tiene conto che ν è la normale esterna alla palla $B_R(0)$ che però rappresenta in tali punti la normale entrante nella regione T. Quindi

$$\int_\Sigma F \cdot \nu d\Sigma = \int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\Sigma;$$

su $\partial B_R(0)$ abbiamo che il campo si scrive

$$F(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{R^3}$$

mentre la normale uscente da $B_R(0)$ si scrive come

$$\nu(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{R}.$$

Per calcolare l'integrale utilizziamo le coordinate polari e tenendo presente che

$$d\Sigma = R^2 \mathrm{sen}\varphi d\varphi d\vartheta,$$

otteniamo che

$$\int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\Sigma = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} R^2 \mathrm{sen}\varphi d\vartheta = 4\pi.$$

Soluzione 7.28 Notiamo anzitutto che $\mathrm{div} F = 0$, quindi possiamo provare ad applicare il Teorema della divergenza; per fare questo dobbiamo considerare una superficie chiusa, dobbiamo cioè chiudere la superficie data. Per fare questo possiamo ad esempio considerare la superficie

$$S = \{(x, y, 4) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Se poniamo

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

abbiamo che $\partial A = S \cup \Sigma$, e quindi dalla condizione $\mathrm{div} F = 0$ si ricava che

$$\int_\Sigma F \cdot \nu d\Sigma = -\int_S F \cdot \nu d\Sigma.$$

Ma su S la normale uscente è data dal vettore $(0, 0, 1)$ e $d\Sigma = dxdy$, quindi

$$\int_\Sigma F \cdot \nu d\Sigma = \int_{x^2+y^2 \leq 4} x^3 y dxdy = 0.$$

Soluzione 7.29 La superficie Σ può essere parametrizzata da

$$r(t,s) = \left(t\cos s, \frac{t}{\sqrt{2}}\text{sen}s, \frac{t}{\sqrt{2}}\text{sen}s\right), \qquad (t,s) \in [0,1]\times[0,2\pi];$$

con tale parametrizzazione troviamo che

$$r_t(t,s) \times r_s(t,s) = \left(0, -\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Abbiamo inoltre che

$$\text{rot}F(x,y,z) = (-2,0,0),$$

e quindi troviamo che

$$\int_\Sigma \text{rot}F\cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma = \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} (-2,0,0)\cdot\left(0,-\frac{t}{\sqrt{2}},\frac{t}{\sqrt{2}}\right)dtds = 0.$$

Utilizziamo ora la formula

$$\int_\Sigma \text{rot}F\cdot\hat{n}_\Sigma d\Sigma = \oint_{\partial^+\Sigma} F d\vec{s};$$

una parametrizzazione con giusta orientazione di $\partial^+\Sigma$ è data da

$$r(t) = \left(\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}t, \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}t\right), \qquad t\in[0,2\pi].$$

Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial^+\Sigma} F d\vec{s} =& \int_0^{2\pi} F\left(\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}t, \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}t\right)\cdot\left(-\text{sen}t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)dt \\
=& \int_0^{2\pi}\left(\sqrt{2}\text{sen}t, \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}t, \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}t\right)\cdot\left(-\text{sen}t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)dt \\
=& \sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t - \text{sen}^2 t)dt = 0.
\end{aligned}$$

Soluzione 7.30 Con un conto diretto troviamo che

$$\begin{aligned}
\Delta f(x,y,z) =& \text{div}\nabla f(x,y,z) \\
=& \text{div}(8xy\cos(yz), 4x^2\cos(yz) - 4x^2yz\sin(yz), -4x^2y^2\sin(yz)) \\
=& (8y - 4x^2yz^2 - 4x^2y^3)\cos(yz) - 8x^2z\sin(yz),
\end{aligned}$$

mentre per il campo F si ha che

$$\text{rot}F(x,y,z) = 0, \qquad \text{div}F(x,y,z) = 4x + \cos y + 2ze^{z^2}.$$

Soluzione 7.31 Per il campo dato si verifica che

$$\text{rot}F(x,y,z) = (-1, 1 - xe^z, 0),$$

quindi la condizione necessaria affinchè il campo sia conservativo non è verificata, quindi il campo non può essere conservativo e di conseguenza non può ammettere potenziale.

Soluzione 7.32 La superficie Σ è il grafico della funzione $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ sul dominio $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ (si ricava dalla condizione $z \geq 0$); per il calcolo del flusso, possiamo quindi utilizzare la parametrizzazione cartesiana $(x, y, g(x,y))$ e, non essendo specificata l'orientazione di Σ, scegliamo l'orientazione per la quale ν_Σ punti verso l'alto. Troveremo quindi che

$$\begin{aligned}\Phi(F,\Sigma) &= \int_D F(x,y,g(x,y)) \cdot (-\nabla g(x,y), 1)dxdy \\ &= \int_D (xy, xy, 1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1)dxdy \\ &= \int_D (2x^y + 2xy^2 + 1 - x^2 - y^2)dxdy = \int_D (1 - x^2 - y^2)dxdy \\ &=2\pi \int_0^2 (1 - \varrho^2)\varrho d\varrho = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Soluzione 7.33 Per il calcolo dell'area della regione E racchiusa dall'astroide utilizziamo la formula

$$\int_E \mathrm{div}F(x,y)dxdy = \int_\gamma F \cdot \hat{n}d\gamma$$

dove $\gamma = \partial E$ e $\hat{n}$ é la normale a γ uscente da E. Per semplicitá, prendiamo come F il campo con divergenza 1 dato da $F(x,y) = (x, 0)$; se utilizziamo la paremetrizzazione r data nel testo, la normale uscente dall'insieme sará data da

$$\hat{n}(t) = \frac{(3\sin^2 t\cos t, 3\cos^2 t\sin t)}{\|(3\sin^2 t\cos t, 3\cos^2 t\sin t)\|},$$

da cui, tenuto conto che $\|\hat{n}(t)\| = \|r'(t)\|$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(E) &= \int_0^{2\pi} (\cos^3 t, 0) \cdot (3\sin^2 t\cos t, 3\cos^2 t\sin t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3\sin^2 t\cos^4 t dt = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\left(\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right)dt = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

Soluzione 7.34 Il rotore del campo dato é $\mathrm{rot}F(x,y,z) = (-1, 1, -1)$ e la superficie data é il grafico

$$z = \sqrt{R^2 - x^x - y^2}, \qquad (x,y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\};$$

il flusso sará quindi dato da

$$\begin{aligned}\Phi(\mathrm{rot}F,\Sigma) &= \int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma = \int_D (-1, 1, -1) \cdot (-\nabla g(x,y), 1)dxdy \\ &= \int_D \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} - 1\right)dxdy = -\int_D dxdy \\ &= -\mathrm{Area}(D) = -\pi R^2.\end{aligned}$$

Il conto si puó anche effettuare applicando il Teorema di Stokes, cioé

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot \hat{n}d\Sigma = \int_\gamma F \cdot d\vec{s},$$

dove γ é la curva che descrive il bordo di Σ, con orientazione indotta dall'orientazione di Σ. Siccome Σ é orientata con la normale verso l'alto, γ é la circonferenza di raggio R contenuta nel piano $z = 0$ orientata in senso antiorario, cioé parametrizzata dalla solita funzione

$$r(t) = (R\cos t, R\sin t, 0).$$

Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}\int_\gamma F \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} F(R\cos t, R\sin t, 0) \cdot (-R\sin t, R\cos t, 0)dt \\ &= -\int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 t dt = -\pi R^2.\end{aligned}$$

Soluzione 7.35 La curva r è una curva chiusa, quindi l'esercizio chiede di calcolare la circuitazione di F lungo la curva, che è data da

$$\begin{aligned}\int_r F \cdot d\vec{s} =& \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)dt \\ =& \int_0^{2\pi} (0, \sqrt{2}\sin t + 2\cos t, 2\cos t + \sqrt{2}\sin t) \cdot (-2\sin t, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos t)dt \\ =& 4\pi\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Se ne deduce quindi che il campo F non è conservativo in quanto la circuitazione non è nulla.

Soluzione 7.36 La superficie è un mezzo paraboloide (vedere Figura 7.1). Per il calcolo

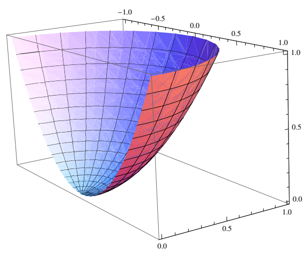

Figura 7.1:

dell'area, notiamo che

$$r_t(t,s) \times r_s(t,s) = (\cos s, \sin s, 2t) \times (-t\sin s, t\cos s, 0) = (-2t^2\cos s, -2t^2 \sin s, t),$$

da cui

$$\|r_t(t,s) \times r_s(t,s)\| = t\sqrt{1+4t^2}..$$

L'area della superficie è quindi data da

$$\text{Area}(\Sigma) = |\Sigma| = \int_0^1 dt \int_0^\pi t\sqrt{1+4t^2}ds = \frac{\pi}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

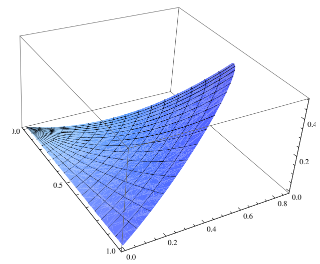

Figura 7.2:

Soluzione 7.37 La superficie data è il grafico della funzione $g(x,y) = xy$ sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\sqrt{3}\}.$$

Tale superficie è rappresentata in Figura 7.2. Quindi l'integrale di superficie è dato da

$$\int_\Sigma z d\Sigma = \int_D g(x,y)\sqrt{1 + \|\nabla g(x,y)\|^2} dxdy = \int_D xy\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$
$$= \int_0^{\pi/3} d\vartheta \int_0^1 \varrho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta \sqrt{1 + 4\varrho^2} d\varrho = \frac{25\sqrt{5}+1}{320}.$$

Soluzione 7.38 La superficie è rappresentata in Figura 7.3; si nota che Σ non è chiusa e quindi non possiamo eventualmente applicare il Teorema della divergenza, a meno di non aggiungere a Σ altre superfici per ottenere il bordo di un insieme. Applichiamo quindi la definizione di flusso; sfruttiamo la seguente parametrizzazione di Σ

$$r(t,s) = (\cos t, \sin t, s), \quad (t,s) \in D = \{(t,s) \in R^2 : t \in [0,\pi], 0 \leq s \leq \sin t\}.$$

Otteniamo quindi che

$$r_t(t,s) \times r_s(t,s) = (-\sin t, \cos t, 0) \times (0,0,1) = (\cos t, \sin t, 0),$$

da cui

$$\Phi(F,\Sigma) = \int_\Sigma F \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma = \int_D F(r(t,s)) \cdot r_t(t,s) \times r_s(t,s) dtds$$
$$= \int_0^\pi dt \int_0^{\sin t} (0, \sin t e^{-\cos t}, 0) \cdot (\cos t, \sin t, 0) ds$$
$$= \int_0^\pi dt \int_0^{\sin t} \sin^2 t e^{-\cos t} ds = \int_0^\pi \sin^3 t e^{-\cos t} dt = \int_{-1}^1 (1 - x^2) e^{-x} dx = 4e^{-1}.$$

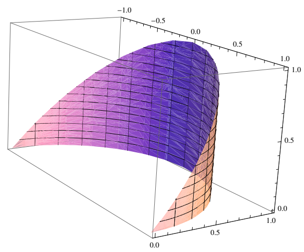

Figura 7.3: