UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
C.d.S. Ingegneria Civile e Ambientale

Eserciziario di Analisi Matematica II [1]

Michele Miranda
Dipartimento di Matematica e Informatica
via Machiavelli 35, I-44121 Ferara
e-mail: michele.miranda@unife.it

a.a. 2019-2020

[1] versione aggiornata al 22 ottobre 2019

Indice

Capitolo 4

Funzioni implicite e superfici

Esercizio 4.1 Studiare le curve di livello delle funzioni

$$x-(y-3)^2, \qquad (x+3)(y-2)$$

studiando in particolare l'applicabilità del Teorema della funzione implicita.

Esercizio 4.2 Dire in quali punti del piano si può applicare il Teorema della funzione implicita alla funzione

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy;$$

in particolare, dire quali insiemi di livello di f sono curve regolari e descrivere cosa succede nei punti in cui non si può applicare il Teorema delle funzioni implicite. Si scriva infine l'equazione della retta tangente ai livelli di f in un generico punto (x_0,y_0) e si particolarizzi la formula trovata nel punto $(2,2)$.

Esercizio 4.3 Si verifichi che le condizioni del Teorema delle funzioni implicite sono soddisfatte nel punto $(2,1)$ per la funzione

$$f(x,y)=3xy^2-2x^3y+10.$$

Si scriva quindi il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione $y=g(x)$ definita implicitamente in $(2,1)$ dall'equazione $f(x,y)=0$.

Esercizio 4.4 Dire se e dove si puó applicare il teorema delle funzioni implicite alla funzione

$$f(x,y)=x^2-y^2-2x+2y.$$

In particolare, si descrivano le proprietà degli insiemi di livello, scrivendo le equazioni delle rette tangente e normale in ogni punto.

Esercizio 4.5 Data la funzione $f(x,y)=xe^y-y$, mostrare che in $(0,0)$ si può applicare il Teorema della funzione implicita; descrivere inoltre il livello $E_0=\{f=0\}$, almeno in un intorno di $(0,0)$.

Esercizio 4.6 Rappresentare la curva definita implicitamente da

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 - 12y^2 = 0.$$

Esercizio 4.7 Rappresentare nel piano la curva definita implicitamente da

$$(xy - \sqrt{5})(y^2 - x^2 - 4) = 0.$$

Esercizio 4.8 Dimostrare che l'equazione

$$x^3 + y^3 + x^2y - 3y^2 = 0$$

definisce implicitamente una curva; dimostrare che tale curva è il grafico di una funzione rispetto alla x negli intervalli $x \in (-\infty, -\sqrt{3}]$ e $x \in [\sqrt{3}, +\infty)$.

Esercizio 4.9 Applicare il Teorema della funzione implicita alla funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 2y$$

per studiare gli insiemi di livelli di f; si consideri in particolare il livello $E_0 = \{f = 0\}$.

Esercizio 4.10 Determinare i punti a tangente orizzontale dell'insieme $x^4 + y^4 - 3x^2y = 0$.

Esercizio 4.11 Studiare, per ogni $x \in \mathbb{R}$, le proprietà della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente da

$$2y^3 + 4x^2y - 3x^4 + x + 6y = 0.$$

Esercizio 4.12 Dimostrare che in ogni punto dell'insieme

$$E_c = \{2x^2 + y^2 = c\}$$

la derivata di $f(x, y) = y^2/x$ in direzione normale ad E_c è nulla.

Esercizio 4.13 Verificare che il luogo dei punti del piano per cui risulta

$$y \log x - x \cos y = 0$$

definisce implicitamente una curva regolare in un intorno del punto $(1, \pi/2)$: scrivere gli sviluppi di Taylor al secondo ordine della funzione $y = g(x)$ così definita.

Esercizio 4.14 Determinare i punti a tangenza orizzontale dei livelli della funzione

$$f(x, y) = 4(x^4 + x^2y^2) - 12x^3y + x^2.$$

Esercizio 4.15 Verificare la validità del Teorema della funzione implicita per le seguenti funzioni nei punti indicati;

$$f(x, y) = \ln(xy) - 2x + y, \qquad (1, 1),$$

$$g(x, y, z) = z \arctan(xy) - z + 2, \qquad (0, 0, 2).$$

Determinare quindi i polinomio di Taylor del secondo ordine delle funzioni implicite.

Esercizio 4.16 Data $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$, dire in quali punti si può applicare il Teorema della funzione implicita e dedurre da questo informazioni sugli insiemi di livello di f.

Esercizio 4.17 Data $f(x,y,z) = x^2e^z+ze^y+y^2$, mostrare che vale il Teorema della funzione implicita in $(0,0,0)$ e scrivere l'equazione del piano tangente al livello $\{f = 0\}$ in tale punto.

Esercizio 4.18 Dimostrare che l'equazione

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 1$$

definisce implicitamente una funzione $z = g(x,y)$. Determinare le derivate parziali di g e studiare le proprietà dell'insieme $E_1 = \{x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 1\}$ in un intorno di $(0,0,1)$.

Esercizio 4.19 Dimostrare che per la funzione

$$f(x,y,z) = e^z - z^2 - x^3 - y^3$$

vale il Teorema della funzione implicita; studiare inoltre le proprietà dell'insieme di livello $E_0 = \{f = 0\}$ in un intorno del punto $(1,0,0)$.

Esercizio 4.20 Dimostrare che la funzione $f : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$f(u,v) = \left(u\cos v, u\sin v, \frac{u^2}{2}\sin(2v)\right)$$

definisce una superficie parametrizzata regolare.

Esercizio 4.21 Si dimostri che l'elicoide parametrizzato da $f : [0,1] \times [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$$

è una superficie regolare (eventualmente dire dove tale superficie non è regolare). Si tracci un disegno approssimato di tale superficie.

Esercizio 4.22 Si dimostri che la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva

$$r(t) = (x(t), z(t)) = (t(1+t), \sin(\pi t)), \qquad t \in [0,1],$$

è una superficie regolare (eventualmente, dire in quali punti viene meno la regolarità) e si scriva l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto $(\frac{5\sqrt{2}}{32}, \frac{5\sqrt{2}}{32}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Esercizio 4.23 Dire se la funzione $r : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$r(t,s) = (\sin^2 t\cos s, \sin^2 t\sin s, \cos^2 t)$$

definisce o meno una superficie parametrizzata regolare.

Esercizio 4.24 Studiare le proprietà delle superfici ottenute ruotando la curva

$$x = z(z-1), \qquad z \in [0,1]$$

sia attorno all'asse z che attorno all'asse x.

Esercizio 4.25 Dire se si può applicare il Teorema della funzione implicita alla funzione

$$f(x, y, z) = (xy - z, x^2y^3 - z)$$

nel punto $(1, 1, 1)$. Determinare eventualmente la parametrizzazione del livello di f cui il punto $(1, 1, 1)$ appartiene.

Esercizio 4.26 Data la curva $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, determinare la normale $\hat{n}_r(t)$ e la binormale $\hat{b}_r(t)$ in ogni punto; dire quindi se la funzione $r : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$r(t, s) = r(t) + \cos s \hat{n}_r(t) + \sin s \hat{b}_r(t)$$

definisce una superficie parametrizzata regolare.

Esercizio 4.27 Dire se per la funzione

$$(e^{x^2-1} - y\cos(z - 1), x + y + z - 3)$$

si applica il Teorema della funzione implicita. In particolare si consideri il punto $(1, 1, 1) \in E_{(0,0)}$ e si sciva in tale punto l'equazione della retta tangente e del piano ortogonale al livello.

4.1 Alcuni esempi senza dimostrazioni

Presentiamo qui alcuni esempi di superfici parametrizzate; invitiamo comunque ad effettuare la verifica che tali superfici sono regolari, anche se i conti sono lunghi.

4.1.1 Proiezione stereografica della sfera

La sfera nello spazio è data da $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Si è già visto durante le lezioni di teoria che tale superficie può essere paramtrizzata mediante le coordinate polari e tale parametrizzazione è singolare nei punti appartenenti all'asse z (i due poli). Presentiamo qui una parametrizzazione con una sola singolarità, il solo polo nord; meglio di così non si potrà fare, in quanto esistono teoremi che dimostrano che la sfera non può essere parametrizzata completamente da una funzione definita in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

La proiezione stereografica consiste nel fissare il polo nord $(0, 0, 1)$ e proiettare i punti della sfera sul piano $z = 0$; con ciò intendiamo considerare il segmento che connette il punto $(0, 0, 1)$ con un generico punto del piano $(u, v, 0)$, e su questo segmento fissare quell'unico punto, eccettuato il polo nord, che appartiene alla sfera. Stiamo quindi considerando il segmento

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + t(u, v, -1)$$

e ricaviamo t imponendo la condizione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tale t definisce quindi la parametrizzazione $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$r(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2 + 1}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1).$$

4.1.2 Nastro di Möbius

Il nastro di Möbius è un esempio di una superficie non orientabile; si ottiene prendendo un segmento di lunghezza R, il segmento con vertici in $(0,0,0)$ e $(R,0,0)$, ed effettuare una doppia rotazione, una nel piano xz ed una attorno all'asse z con velocità dimezzata. Tale parametrizzazione si ottiene considerando la funzione $r : [0,R] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(u,v) = R(\cos v, \sin v, 0) + \left(u - \frac{R}{2}\right)\left(\cos\frac{v}{2}\cos v, \cos\frac{v}{2}\sin v, \sin\frac{v}{2}\right).$$

Si provi a scrivere il vettore

$$\hat{n}(u,v) = \frac{r_u(u,v) \times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v) \times r_v(u,v)\|}$$

e si noti che $\hat{n}(u,0) = -\hat{n}(u,2\pi)$. Questo significa che il vettore normale, quando si effettua un giro, invece di puntare verso l'alto, punterà verso il basso, cioè la faccia superiore del nastro diventa quella inferiore. Se si effettuano due giri, cioè se $v \in [0,4\pi]$, allora si torna al punto di partenza; il nastro di Möbius è un esempio di una superficie le cui faccie possono essere percorse su ambo i lati partendo da un qualsiasi punto. In Figura 4.1 è raffigurato il nastro di Möbius.

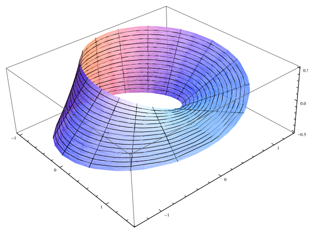


Figura 4.1: Nastro di Möbius

4.2 Soluzioni

Soluzione 4.1 I livelli della prima funzione sono i luoghi soluzione delle equazioni

$$x - (y-3)^2 = c, \qquad c \in \mathbb{R};$$

si tratta quindi di parabole lungo l'asse x con asse coincidente con la retta $y = 3$ (si veda la figura 4.2.

Come si intuisce, tutti questi livelli sono curve regolari; in effetti, se calcoliamo il gradiente di f otteniamo

$$\nabla f(x,y) = (1, -(2(y-3))) =\neq (0,0).$$

In particolare, dato che la prima componente non si annulla mai, i livelli sono sempre grafici di funzioni $x = g(y)$ ed in effetti

$$x = (y-3)^2 + c = g(y).$$

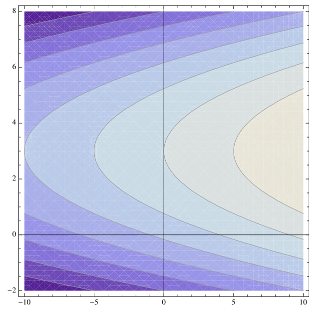


Figura 4.2: Insiemi di livello della funzione $x - (y-3)^2$.

La derivata rispetto ad y si annulla per $y = 3$ e quindi intorno ai punti di coordinate $(x, 3)$ il livello della funzione non è localmente grafico di una funzione $y = h(x)$.

Per quanto riguarda la seconda funzione, i livelli sono disegnati in figura 4.3; si vede che tutti il livelli sono grafici di funzioni eccettuato il livello $c = 0$;

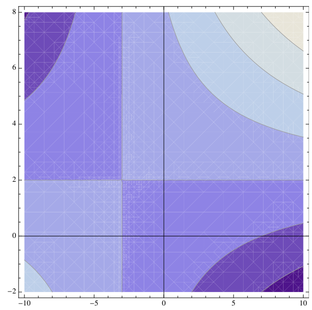


Figura 4.3: Insiemi di livello della funzione $(x+3)(y-2)$.

in effetti

$$(x+3)(y-2) = c$$

ha come luogo di soluzioni le rette $x = -3$ e $y = 2$ se $c = 0$, altrimenti siamo in presenza di iperboli

$$y = 2 + \frac{c}{x+3}, \qquad c \neq 0, x \neq -3,$$

oppure

$$x = -3 + \frac{c}{y-2}, \qquad c \neq 0, y \neq 2.$$

Controllando le condizioni del Teorema delle funzioni implicite si nota che

$$\nabla g(x, y) = (y - 2, x + 3),$$

che quindi si annulla per $(x, y) = (-3, 2)$, che quindi è l'unico punto attorno al quale il livello non è una curva.

Soluzione 4.2 Iniziamo col calcolare il gradiente di f;

$$\nabla f(x, y) = 3(x^2 - y, y^2 - x);$$

i punti in cui tale gradiente si annulla sono solo $(0,0)$ e $(1,1)$, quindi questi sono i soli due punti in cui il Teorema della funzione implicita non si applica. Per i punti che non appartengono alla parabola $y = x^2$, il teorema si potrà applicare per dedurre che i livelli sono localmente grafico rispetto alla variabile y, cioè della forma $x = g(y)$, mentre per i punti che non appartengono alla parabola $x = y^2$, il teorema si potrà applicare per dedurre che i livelli sono grafici $y = g(x)$. Per la retta tangente basterà applicare la formula

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0,$$

cioè in un punto generico (x_0, y_0):

$$3(x_0^2 - y_0, y_0^2 - x_0)(x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Tale equazione nel punto $(x_0, y_0) = (2, 2)$ diventa

$$x + y = 4.$$

Soluzione 4.3 Anzitutto, $f(2, 1) = 0$, quindi $(2, 1) \in E_0 = \{f = 0\}$. Inoltre,

$$\nabla f(x, y) = (3y^2 - 6x^2y, 6xy - 2x^3), \qquad \nabla f(2, 1) = (-21, -4).$$

Quindi il Teorema della funzione implicita si può applicare sia rispetto alla variabile x che rispetto alla variabile y. In particolare, esisterà una funzione $g : (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ con $g(2) = 1$ e tale che $E_0 \cap (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ è il grafico di g per ε opportuno. Per determinare lo sviluppo di Taylor di g di ordine 3 attorno a $x_0 = 2$ dovremo derivare tre volte l'espressione

$$0 = 3xg(x)^2 - 2x^3g(x) + 10.$$

Otterremo le espressioni, per la derivata prima

$$0 = 3g(x)^2 + 6xg(x)g'(x) - 6x^2g(x) - 2x^3g'(x),$$

mentre per la derivata seconda

$$0 = 12g(x)g'(x) + 6xg'(x)^2 + 6xg(x)g''(x) - 12xg(x) - 12x^2g'(x) - 2x^3g''(x)$$

ed infine per la derivata terza

$$\begin{aligned} 0 =& 18g'(x)^2 + 18g(x)g''(x) + 18xg'(x)g''(x) + 6xg(x)g'''(x) - 12g(x) - 36xg'(x) + \\ &- 18x^2g''(x) - 2x^3g'''(x). \end{aligned}$$

Se ne deduce quindi lo sviluppo

$$g(x) = 1 - \frac{21}{4}(x-2) + \frac{1983}{32}(x-2)^2 - \frac{183421}{192}(x-2)^3 + o((x-2)^3).$$

Soluzione 4.4 Si nota che

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2, -2y + 2),$$

che si annulla unicamente per $(x, y) = (1, 1)$. Questo implice che ogni livello c per cui $(1, 1) \notin E_c = \{f = c\}$ é localmente grafico rispetto ad una delle due variabili. Tali livelli saranno grafici rispetto ad x se $y \neq 1$, mentre saranno grafici rispetto alla y se $x \neq 1$. Siccome $f(1,1) = 0$, ne deduciamo che i livelli E_c con $c \neq 0$ saranno (unioni) di curve regolari, mentre il livello E_0 avrà dei problemi nel punto $(1,1)$ e sarà regolare negli altri punti. Dato che $\nabla f(x_0, y_0)$ è un vettore ortogonale agli insiemi di livello, se ne deduce che le equazioni delle rette tangenti si possono trovare utilizzando la formula

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Così ad esempio, nel punto $(0,2)$ otterremo la retta $(-2,-2)(x, y-2) = 0$, che è la retta

$$y = -x + 2.$$

Per avere una idea grafica di quello che è stato detto in questo esercizio, possiamo anche calcolare esplicitamente gli insiemi di livello; dato che

$$f(x,y) = (x-1)^2 - (y-1)^2,$$

troviamo che

$$E_0 = \{y = x\} \cup \{y = 2 - x\},$$

che sono due rette che si incontrano nel punto $(1,1)$. Sarà quindi chiaro che intorno a tale punto E_0 non può essere il grafico rispetto ad alcuna variabile.

Gli altri livelli saranno invece rami di iperbole, centrate in $(1,1)$; ogni ramo di tali iperboli è una curva regolare.

Soluzione 4.5 Iniziamo col calcolare il gradiente della funzione;

$$\nabla f(x,y) = (e^y, xe^y - 1).$$

Si nota subito che $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0$ per ogni punto (x,y), quindi si potrà sempre applicare il Teorema della funzione implicita per dire che i livelli $E_c = \{f = c\}$ sono delle curve parametrizzate da $(g(y), y)$; tale curva nel nostro caso si può scrivere esplicitamente, ricavando la variabile x dall'equazione $xe^y - y = c$, cioè

$$x = g(y) = (y + c)e^{-y}.$$

In particolare il livello E_0 è dato da

$$E_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = ye^{-y}\},$$

da cui il fatto che tale livello è globalmente il grafico di una funzione. Se si vuole vedere tale livello come grafico rispetto alla variabile x, allora si deve applicare il Teorema delle funzioni implicite richiedendo che la derivata di f rispetto ad y non si annulli; tale condizione si traduce in $xe^y - 1 \neq 0$. Quindi, eccettuati i punti contenuti nel grafico della funzione $y = -\log x$, $x > 0$, si può applicare il Teorema della funzione implicita. Si noti che i grafici di $y = -\log x$ e $x = ye^{-y}$ si toccano esattamente nel punto $(1/e, 1)$. La funzione implicita $y = h(x)$ che realizza il luogo di zeri di f altro non è che l'inversa della funzione $x = g(y)$ precedentemente trovata; questo ovviamente sotto la condizione che g sia invertibile. Ma la funzione g ha un massimo per $y = 1$, con valore $g(1) = 1/e$. In corrispondenza di tale punto si ha $g'(1) = 0$; quindi la funzione g non sarà iniettiva (si provi a tracciare il grafico di g), anche se lo è se ristretta a $y \leq 1$ o $y \geq 1$. In corrispondenza del massimo di g la funzione h avrà la derivata che tende ad infinito (il grafico di h si ottiene semplicemente ruotando il grafico di g), e quindi intorno al punto $(1/e, 1)$, E_0 non potrà essere un grafico rispetto alla variabile x.

Soluzione 4.6 Il luogo di zeri si può determinare esplicitamente risolvendo direttamente l'equazione, che è equivalente a $2\sqrt{3}|y| = |x^2 + y^2 - 1|$. L'insieme delle soluzioni è dato da

$$\{2\sqrt{3}y = x^2 + y^2 - 1\} \cup \{2\sqrt{3}y = 1 - x^2 - y^2\}.$$

Il primo insieme è la circonferenza di raggio 2 centrata in $(0, \sqrt{3})$, mentre il secondo insieme è la circonferenza di raggio 2 centrata in $(0, -\sqrt{3})$. Si nota quindi che nell'intersezione di queste due circonferenze, cioè nei punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, l'insieme non è il grafico di una funzione, né rispetto alla x, né rispetto alla y. Inoltre, nei punti con $x = 0$, dove y può assumere i valori $2 + \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} + 2$, $\sqrt{3} - 2$ e $-\sqrt{3} - 2$ l'insieme non è grafico rispetto alla x, così come nei punti con $y = \pm\sqrt{3}$ dove x assume i valori ± 2 l'insieme non è grafico rispetto alla x. Ritroviamo questi risultati applicando il Teorema della funzione implicita alla funzione $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 - 12y^2$, il cui gradiente è dato da

$$\nabla f(x, y) = (4x(x^2 + y^2 - 1), 4y(x^2 + y^2 - 7)).$$

La derivata rispetto ad x si annulla per $x = 0$ e nei punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$; per questi valori di x si ha la condizione $f(x, y) = 0$ solo nei punti $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 2+\sqrt{3})$, $(0, 2 - \sqrt{3})$, $(0, -2 + \sqrt{3})$ e $(0, -2 - \sqrt{3})$. Quindi, eccettuati tali punti, il livello zero di f si può vedere come grafico rispetto alla variabile y. Infine, se ripetiamo lo stesso ragionamento per vedere il luogo di zeri come grafico rispetto alla variabile x, troviamo che la derivata parziale di f rispetto ad y si annulla per $y = 0$ e nei punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 7$. In corrispenza di tali punti, la condizione $f(x, y) = 0$ viene soddisfatta nei punti $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e nei quattro punti $(2, \sqrt{3})$, $(-2, \sqrt{3})$, $(2, -\sqrt{3})$ e $(-2, -\sqrt{3})$.

Soluzione 4.7 La curva si può descrivere esplicitamente come unione dei seguenti insiemi

$$\{xy = \sqrt{5}\} \cup \{y^2 - x^2 = 4\},$$

che sono due iperboli (in tutto quattro rami di iperboli). Si può scrivere tale luogo come grafico di funzioni rispetto alla variabile x come $y = \frac{\sqrt{5}}{x}$ oppure $y = \pm\sqrt{4 + x^2}$. Tuttavia, questi grafici si incontrano nei due punti $(-1, -\sqrt{5})$ e $(1, \sqrt{5})$, da cui il fatto che in corrispondenza di tali punti la curva non potrà essere vista come grafico di una funzione. Applichiamo ora il Teorema della funzione implicita alla funzione $f(x, y) = (xy - \sqrt{5})(y^2 - x^2 - 4)$, iniziando col calcolare il suo gradiente;

$$\nabla f(x, y) = (y(y^2 - x^2 - 4) - 2x(xy - \sqrt{5}), x(y^2 - x^2 - 4) + 2y(xy - \sqrt{5})).$$

Studiamo semplicemente la derivata rispetto alla y; analoghe conseguenze si potranno dedurre studiando la derivata rispetto alla x. Tale derivata si annulla unicamente quando

$$\begin{cases} xy = \sqrt{5} \\ y^2 - x^2 = 4, \end{cases}$$

cioè esattamente dove le iperboli si intersecano. Eccettuati tali punti, il luogo di zeri sarà sempre localmente il grafico di una funzione rispetto alla x; si noti che comunque il luogo degli zeri non è globalmente il grafico di una funzione, ma unione di più grafici.

Soluzione 4.8 Calcoliamo il gradiente di f:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 2xy, 3y^2 + x^2 - 6y).$$

Quindi, la derivata rispetto alla y si annulla per $x^2 + 3(y-1)^2 = 3$, che rappresenta l'equazione di una ellisse di semiassi $\sqrt{3}$, 1 centrata in $(0,1)$. Quindi, se $|x| > \sqrt{3}$, sicuramente la derivata parziale rispetto ad y non si annulla, e quindi si può applicare il Teorema della funzione implicita. Si riescono a recuperare anche i valori $|x| = \sqrt{3}$, in quanto per tali valori la derivata di f rispetto ad y si annulla in corrispondenza di $y = 1$, ma i punti $(-\sqrt{3}, 1)$ e $(\sqrt{3}, 1)$ non appartengono alla curva che stiamo studiando.

Soluzione 4.9 Calcoliamo il gradiente di f:

$$\nabla f(x,y) = (2x - 2, -2y + 2).$$

Il gradiente è diverso da 0 sempre eccetto che per $(x,y) = (1,1)$. Quindi tutti i livelli di f saranno descritti da curve regolari, eccettuato il livello che contiene il punto $(1,1)$. In tale punto la funzione vale $f(1,1) = 0$, quindi non si può concludere che il livello E_0 sia una curva regolare. In effetti, tale livello è dato dall'equazione $(x-1)^2 = (y-1)^2$, che ha come luogo di soluzioni l'insieme

$$\{y = x\} \cup \{y = -x + 2\}.$$

Soluzione 4.10 I punti cercati sono i punti in cui l'insieme si può scrivere come grafico di una funzione $y = g(x)$ con $g'(x) = 0$. Dobbiamo cercare quindi tutti i punti in cui si può applicare il Teorema della funzione implicita per ottenere una funzione $y = g(x)$ e per tali punti la derivata si deve annullare; questo significa cercare i punti (x,y) per cui $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, dato che

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

Siccome

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 6xy, 4y^3 - 3x^2),$$

i punti in cui si può applicare il Teorema della funzione implicita per ottenere $y = g(x)$ come luogo di zeri sono quelli per cui $y \neq \sqrt[3]{\frac{3x^2}{4}}$; per tali punti, quelli in cui $g'(x) = 0$ sono determinati dalla condizione

$$2x(2x^2 - 3y) = 0.$$

Tra questi, troviamo i punti con $y = \frac{3}{2}x^2$ che individuano i due punti $(3/2, 3/2)$ e $(-3/2, 3/2)$ come punti in cui il livello ha tangente orizzontale.

Soluzione 4.11 Verifichiamo anzitutto che si possa applicare il Teorema della funzione implicita per ottenere una funzione $y = g(x)$; consideriamo quindi la derivata rispetto ad y della funzione $f(x,y) = 2y^3 + 4x^2 - 3x^4 + x + 6y$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y^2 + 4x^2 + 6.$$

Siccome tale derivata é sempre diversa da zero, per ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, possiamo caratterizzare il luogo di zeri di f localmente come grafico di una funzione. Tale funzione sarà di classe C^∞ in quanto f é un polinomio.

Possiamo ad esempio considerare il punto $(x, y) = 0$; avremo quindi che esiste una funzione $y = g(x)$, $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ per cui $g(0) = 0$ e

$$2g(x)^3 + 4x^2 - 3x^4 + x + 6g(x) = 0.$$

Possiamo ricavare le derivate di $g(x)$ derivando l'espressione precedente;

$$6g(x)^2 g'(x) + 8xg(x) + 4x^2 g'(x) - 12x^3 + 1 + 6g'(x) = 0.$$

Valutando l'espressione precedente per $x = 0$, si ottiene che $g'(0) = -1/6$. Derivando ancora l'espressione precedente una volta si ricava che $g''(0) = 0$, mentre un'ulteriore derivazione implica che $g'''(0) = \frac{25}{108}$. Se ne deduce la seguente apporssimazione per la funzione g:

$$g(x) = -\frac{x}{6} + \frac{73x^3}{648} + o(x^3).$$

Soluzione 4.12 Dove la funzione f è differenziabile, la derivata direzionale di f è data da

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot v.$$

La funzione è differenziabile per ogni $x \neq 0$, quindi eccettuati tali punti possiamo scrivere

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x} \right).$$

Gli insiemi E_c sono i livelli della funzione $g(x, y) = 2x^2 + y^2$, quindi la direzione normale a E_c è descritta dal gradiente di $g(x, y)$. Basta quindi verificare che i gradienti di f e g siano ortogonali tra loro:

$$\nabla f(x, y) \cdot \nabla g(x, y) = \left(-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x} \right) \cdot (4x, 2y) = -\frac{4y^2}{x} + \frac{4y^2}{x} = 0.$$

Soluzione 4.13 Scriviamo il gradiente di $f(x, y) = y \log x - x \cos y$;

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{x} - \cos y, \log x + x \sin y \right).$$

Si nota che se $y \log x - x \cos y = 0$, allora tale gradiente non si annulla mai. Quindi possiamo applicare il teorema della funzione implicita; possiamo scrivere localmente che $y = g(x)$ definisce il luogo degli zeri di f e dalla relazione

$$g(x) \log x - x \log g(x) = 0,$$

con $g(1) = \frac{\pi}{2}$ ricaviamo lo sviluppo di g. Considerando le derivate di g, otteniamo il seguente sviluppo;

$$g(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(x - 1) - \frac{3\pi}{4}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2).$$

Soluzione 4.14 I punti cercati sono i punti in cui si può applicare il Teorema delle funzioni implicite e per cui si possa scrivere $y = g(x)$ con $g'(x_0) = 0$ nel punto (x_0, y_0) in considerazione. Ciò equivale a cercare i punti in cui il gradiente è non nullo ma $\frac{\partial}{\partial x} f = 0$. Si cercano quindi i punti (x, y) per cui

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(8x^2 - 18xy + 4y^2 + 1) = 0.$$

Per $x = 0$ si nota che anche $\frac{\partial}{\partial y} f = 0$, cioè il Teorema della funzione implicita non si applica. Restano quindi i punti delle iperboli

$$x = \frac{1}{8}\left(9y \pm \sqrt{49y^2 - 8.}\right)$$

A questi punti vanno tolti i due punti $(\pm 1/\sqrt{10}, \pm 3/2\sqrt{10})$, nei quali anche la derivata rispetto ad y di f si annulla e quindi il Teorema della funzione implicita non si applica.

Soluzione 4.15 Per quanto riguarda la prima funzione abbiamo che

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{x} - 2, \frac{1}{y} + 1\right),$$

da cui $\nabla f(1,1) = (-1,2)$; quindi il Teorema della funzione implicita si può applicare rispetto a tutte e due le variabili; in particolare il livello E_{-1} è localmente il grafico di una funzione $y = g(x)$. Per tale funzione si ha che $g(1) = 1$, mentre derivando due volte l'equazione

$$\ln(xg(x)) - 2x + g(x),$$

si trova che $g'(1) = \frac{1}{2}$ e $g''(1) = \frac{5}{8}$, quindi

$$\begin{aligned} g(x) =& g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{1}{2}g''(1)(x-1)^2 + o((x-1)^2) \\ =& 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{5}{16}(x-1)^2 + o((x-1)^2). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la seconda funzione si ha che

$$\nabla g(x,y,z) = \left(\frac{yz}{1+x^2y^2}, \frac{xz}{1+x^2y^2}, \arctan(xy) - 1\right),$$

da cui $\nabla g(0,0,2) = (0,0,-1)$. Quindi, dato che $g(0,0,2) = 0$, troviamo che il livello E_0 è localmente il grafico di una funzione $z = h(x,y)$ e la direzione z è l'unica direzione in cui si può applicare il Teorema della funzione implicita intorno al punto $(0,0,2)$. Derivando fino ad ottenere tutte le derivate seconde l'espressione

$$h(x,y)\arctan(xy) - h(x,y) + 2 = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

mentre

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0) = 2.$$

Tenendo presente che $h(0,0) = 2$, troviamo quindi che

$$h(x,y) = 2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}(x,y)\cdot(x,y) + o(\|(x,y)\|^2) = 2 + 2xy + o(\|(x,y)\|^2).$$

Soluzione 4.16 Siccome $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$, si deduce che l'unico punto in cui il Teorema della funzione implicita è $(0,0,0)$. Così ad esempio nel punto $(1,0,0)$, il livello $\{f = 1\}$ sarà localmente un grafico $x = g(y,z)$, in $(0,1,0)$ lo stesso livello sarà localmente un grafico $y = g(x,z)$ mentre in $(0,0,1)$ il livello $\{f = -1\}$ sarà localmente il grafico di una funzione $z = g(x,y)$.

In $(0,0,0)$ avremo infine che il livello $\{f = 0\}$ ha una singolarità; infatti tale livello è un cono con vertice proprio in $(0,0,0)$ e tale cono non può essere descritto come un grafico rispetto ad alcuna scelta delle variabili.

Soluzione 4.17 Si ha $\nabla f(x,y,z) = (2xe^z, ze^y + 2y, x^2e^z + e^y)$, e quindi $\nabla f(0,0,0) = (0,0,1)$. Se ne deduce che il livello $\{f = 0\}$, a cui il punto $(0,0,0)$ appartiene, è localmente il grafico di una funzione $z = g(x,y)$. Per tale funzione si ha che

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = 0.$$

Il piano tangente sarà quindi orizzontale e descritto dall'equazione $z = 1$.

Soluzione 4.18 Il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = (3x^2 + yz, 3y^2 + xz, 3z^2 + xy)$$

che si annulla esclusivamente in $(0,0,0)$. Tale punto non appartiene ad E_1, quindi tale livello è sicuramente localmente un grafico attorno ad ogni suo punto. In particolare, in $(0,0,1)$ il gradiente diventa $\nabla f(0,0,1) = (0,0,3)$, quindi potremo scrivere $z = g(x,y)$ e ricaviamo subito anche che $\nabla g(0,0) = (0,0)$. Si possono anche calcolare le derivate seconde di g, ottenendo che

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = -\frac{1}{3}.$$

Da questo si deduce l'espansione

$$g(x,y) = 1 - \frac{1}{3}xy + o(\|(x,y)\|^2).$$

Soluzione 4.19 Il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = (-3x^2, -3y^2, e^z - 2z).$$

Si nota che la terza componente di tale vettore non è mai nullo; per dedurre questo basta studiare la funzione $e^z - 2z$ trovandone il minimo, per scoprire che è sempre positiva. Quindi possiamo sempre scrivere che i livelli di f sono localmente grafici $z = g(x,y)$. In particolare, in $(1,0,0)$, il gradiente di f diventa $\nabla f(1,0,0) = (-3,0,1)$, quindi il livello E_0 sarà localmente attorno a tale punto grafico $z = g(x,y)$ ma anche $x = g(y,z)$. Non possiamo però dire che è grafico $y = g(x,z)$. Possiamo scrivere l'equazione del piano tangente ad E_0 in $(1,0,0)$ che sarà data da:

$$(-3,0,1) \cdot (x - 1, y, z) = 0,$$

cioè

$$3x - z + 1 = 0.$$

Soluzione 4.20 Per vedere se f definisce una superficie parametrizzata regolare dobbiamo vedere se f è di classe C^1 e se il rango della matrice Jacobiana è pari a 2. Abbiamo che

$$Df(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \\ u\sin(2v) & u^2\cos(2v) \end{pmatrix}.$$

Da qui si deduce che f è di classe C^1 in quanto tutte le derivate parziali sono continue. La matrice Jacobiana ha rango 1 se $u = 0$, quindi non avremo regolarità per $u = 0$. Per $u \neq 0$ la matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}$$

è invertibile, quindi il rango di $Df(u,v)$ è sempre 2 per $u \neq 0$, cioè f definisce una superficie parametrizzata regolare per $u \neq 0$. Possiamo anche scrivere il vettore normale alla superficie

$$\begin{aligned} f_u(u,v) \times f_v(u,v) =& (\cos v, \sin v, u\sin(2v)) \times (-u\sin v, u\cos v, u^2\cos(2v)) \\ =& (-u^2\sin v, -u^2\cos v, u). \end{aligned}$$

La superficie è raffigurate in Figura 4.6(a).

Soluzione 4.21 Calcoliamo la matrice Jacobiana della parametrizzazione:

$$Df(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava che

$$f_u(u,v) \times f_v(u,v) = (\sin v, -\cos v, u),$$

e quindi $\|f_u \times f_v\| = \sqrt{1+u^2}$. La superficie è quindi regolare ovunque. Per avere un'idea qualitativa di tale superficie, si possono considerare le curve con u o v costante. Per u costante si ottiene un'elica cilindrica, mentre per v costante si ottiene un segmento che parte dal punto $(0,0,v)$ ed ha per direzione $(\cos v, \sin v, 0)$. La superficie risultante è un'elicoide (una scala a chiocciola). Si utilizzi MATLAB per avere una rappresentazione più fedele di tale superficie; una rappresentazione è data in Figura 4.6(b).

Soluzione 4.22 La superficie che si ottiene ruotando la curva data attorno all'asse z può essere parametrizzata da $f : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$f(t,\vartheta) = ((t+t^2)\cos\vartheta, (t+t^2)\sin\vartheta, \sin(\pi t)).$$

La matrice Jacobiana di tale parametrizzazione è data da

$$Df(t,\vartheta) = \begin{pmatrix} (1+2t)\cos\vartheta & -(t+t^2)\sin\vartheta \\ (1+2t)\sin\vartheta & (t+t^2)\cos\vartheta \\ \pi\cos(\pi t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce quindi che

$$f_t(t,\vartheta)\times f_\theta(t,\vartheta) = (t+t^2)(-\pi\cos\vartheta\cos(\pi t), -\pi\sin\vartheta\cos(\pi t), 1+2t),$$

da cui

$$\|f_t(t,\vartheta)\times f_\theta(t,\vartheta)\| = |t+t^2|\sqrt{\pi^2\cos(\pi t)+(1+2t)^2}.$$

La superficie è quindi regolare nel dominio in considerazione purché $t\neq 0$. Per l'equazione del piano tangente, dobbiamo prima trovare i valori di t e ϑ per cui $f(t,\vartheta) = (\frac{5\sqrt{2}}{32}, \frac{5\sqrt{2}}{32}, \frac{\sqrt{2}}{2})$; si trova che $t = 1/4$ e $\vartheta = \pi/4$ sono tali valori; il piano tangente sarà quindi dato da

$$f_t(1/4,\pi/4)\times f_\theta(1/4,\pi/4)\cdot\left(x-\frac{5\sqrt{2}}{32}, y-\frac{5\sqrt{2}}{32}, z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,$$

e cioè il piano di equazione

$$\pi x+\pi y-3z+\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{16} = 0.$$

La superficie è raffigurate in Figura 4.6(c).

Soluzione 4.23 La parametrizzazione è sicuramente di classe C^1; per le derivate abbiamo che

$$r_t(t,s) = 2\cos t\sin t(\cos s, \sin s, -1),$$

mentre

$$r_s(t,s) = (-\sin^2 t\sin s, \sin^2 t\cos s, 0).$$

Quindi

$$r_t(t,s)\times r_s(t,s) = 2\sin^3 t\cos t(\cos s, \sin s, 1),$$

da cui

$$\|r_t(t,s)\times r_s(t,s)\| = 2\sqrt{2}\sin^3 t|\cos t|;$$

quindi la parametrizzazione non è regolare per $t = 0, \pi/2, \pi$.

Soluzione 4.24 Si tratta di ruotare la curva che nel piano xz è parametrizzata da

$$r(t) = (t(t-1), t), \qquad t\in[0,1].$$

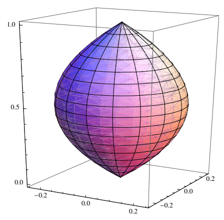
Abbiamo allora che $r'(t) = (2t-1, 1)$, cioè $\|r'(t)\| = \sqrt{4t^2-4t+2}$, quindi la curva è regolare. Siccome per $t = 0, 1$ $r_1(t) = 0$, allora la curva ruotata attorno all'asse z non sarà regolare in tali punti. La parametrizzazione della curva ruotata attorno a z sarà quindi data da

$$r(t,s) = (t(t-1)\cos s, t(t-1)\sin s, t)$$

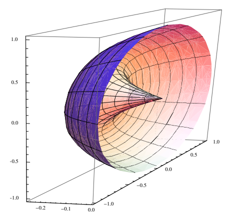
e tale superficie è rappresentata in Figura 4.4(a). Per la rotazione attorno ad x, avremo che $r_2(t) = 0$ per $t = 0$ e quindi in tale punto la superficie non sarà regolare; per la parametrizzazione si avrà che

$$r(t,s) = (t(t-1), t\cos s, t\sin s)$$

e tale superficie è rappresentata in Figura 4.4(b).



(a) Rotazione attorno ad asse z



(b) Rotazione attorno ad asse x

Figura 4.4: Rotazioni della curva r attorno ai due assi, z e x.

Soluzione 4.25 Calcoliamo la matrice Jacobiana di f,

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & -1 \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

In $(1,1,1)$ tale matrice vale

$$Df(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi il rango è pari a 2 in tale punto, quindi si può applicare il teorema della funzione implicita per dire che intorno a $(1,1,1)$ l'insieme $\{f(x,y,z) = (0,0)\}$ è localmente una curva. La parametrizzazione locale si può ottenere determinando

$$\begin{cases} xy = z \\ x^2y^3 = z. \end{cases}$$

Parametrizzando ponendo $y = t$ si trova la curva

$$r(t) = \Big(\frac{1}{t^2}, t, \frac{1}{t}\Big).$$

Questa parametrizzazione è definita per t intorno ad 1 mentre diventa degenere per $t \to 0$. Ci si può chiedere se esiste una parametrizzazione globale; in realtà si può vedere che l'insieme $\{f(x,y,z) = (0,0)\}$ non è globalmente una curva, ma ha dei punti singolari.

Soluzione 4.26 Iniziamo con uno studio astratto della regolarità per una superficie parametrizzata da

$$r(t,s) = r(t) + \alpha \cos s \hat{n}_r(t) + \beta \sin s \hat{b}_r(t), \qquad \alpha, \beta \in [0, +\infty).$$

Troviamo che

$$r_t(t,s) = r'(t) + \alpha \cos s \hat{n}'_r(t) + \beta \sin s \hat{b}'_r(t),$$

mentre

$$r_s(t,s) = -\alpha \sin s \hat{n}_r(t) + \beta \cos s \hat{b}_r(t).$$

Tenuto presente che $r'(t)$ è ortogonale sia a $\hat{n}_r(t)$ che a $\hat{b}_r(t)$, e che $\hat{n}_r(t)$ è ortogonale a $\hat{n}'_r(t)$ così come $\hat{b}_r(t)$ è ortogonale a $\hat{b}'_r(t)$, si trova che

$$r_t(t,s) \times r_s(t,s) = \alpha\beta \cos^2 s \hat{n}'_r(t) \times \hat{b}_r(t) + \alpha\beta \sin^2 s \hat{n}_r(t) \times \hat{b}'_r(t).$$

Nel caso partiocolare dell'esercizio, $\alpha = \beta = 1$ e

$$r(t) = (t\cos t, t\sin t, t), \qquad \hat{\tau}_r(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1),$$

$$\hat{n}_r(t) = (-\cos t, -\sin t, 0), \qquad \hat{b}_r(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t, -\cos t, 1),$$

$$\hat{n}'_r(t) = (\sin t, -\cos t, 0), \qquad \hat{b}'_r(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 0),$$

e quindi

$$r_t(t,s) \times r_s(t,s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t \cos^2 s, -\sin t \cos^2 s, -\sin^2 s)$$

da cui

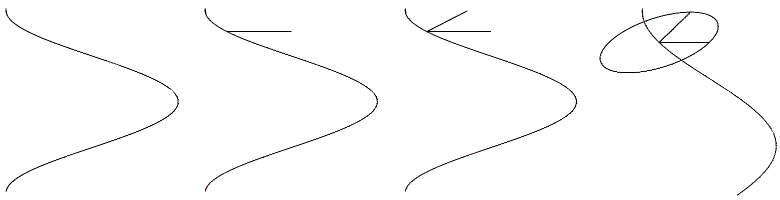
$$\|r_t(t,s) \times r_s(t,s)\|^2 = \frac{1}{2}(\cos^4 s + \sin^4 s) \neq 0.$$

Quindi la superficie data è regolare.

La parametrizzazione è data in modo esplicito da

$$\begin{aligned} r(t,s) =& (\cos t, \sin t, t) + \cos s(-\cos t, \sin t, 0) + \frac{\sin s}{\sqrt{2}}(\sin t, -\cos t, 1) \\ =& \left(\cos t - \cos t \cos s + \frac{\sin t \sin s}{\sqrt{2}}, \sin t - \sin t \cos s - \frac{\cos t \sin s}{\sqrt{2}}, t + \frac{\sin s}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

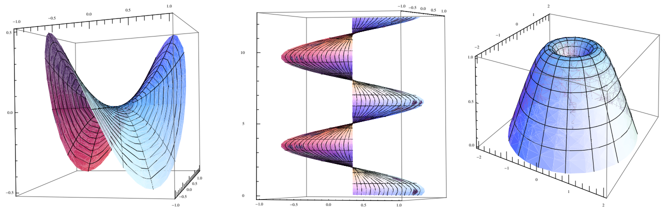
In figura è riportata la costruzione della superficie:



(a) (b) (c) (d)

Figura 4.5: Costruzione della superficie.

si parte dall'elica 4.5(a) e per ogni punto della curva si considerano il versore normale principale 4.5(b) e binormale 4.5(c), quindi sul piano passante per il punto e che contiene questi due vettori si costruisce la circonferenza unitaria 4.5(d). Facendo variare il punto si costruisce la superficie globale **??**, che sarà quindi un tubo con sezione di raggio 1 costruito attorno all'elica.



(a) Sella (b) Elicoide (c) Superficie ruotata

Figura 4.6: Parametrizzazioni di alcune superfici

Soluzione 4.27 Calcoliamo la matrice Jacobiana della funzione:

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2-1} & -\cos(z-1) & y\sin(z-1) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

Nel punto $(1,1,1)$ tale matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

matrice con rango 2. Quindi il teorema si applica e si deduce che localmente attorno al punto $(1,1,1)$ il livello $E_{(0,0)}$ è una curva. Tale curva ha come retta tangente la retta parametrizzata da

$$\begin{aligned} r(t) =& (1,1,1) + t(2,-1,0) \times (1,1,1) \\ =& (1,1,1) + t(-1,-2,3) \\ =& (1-t, 1-2t, 1+3t), \qquad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

che in forma cartesiana diventa

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + z = 4. \end{cases}$$

Il piano ortogonale avrà invece equazione

$$(-1,-2,3) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0,$$

cioè

$$x + 2y - 3z + 1 = 0,$$

che in forma parametrica diventa

$$r(t,s) = (1,1,1) + t(2,-1,0) + s(1,1,1), \qquad (t,s) \in \mathbb{R}^2.$$

Per la duscussione più generale dell'applicabilità del Teorema della funzione implicita, bisogna capire per quali punti dello spazio la matrice Jacobiana ha rango 2. Studiamo quindi la prima riga della matrice Jacobiana; avremo che la matrice avrà rango due se il vettore

$$(2xe^{x^2-1}, -\cos(z-1), y\sin(z-1)) \neq \lambda(1,1,1).$$

Nel caso $\lambda = 0$ si avrà un vettore non nullo se

$$(x,y,z) \neq \left(0, 0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Per la condizione con $\lambda \neq 0$, avremo che

$$\cos(z-1) = -\lambda \in (-1, 1),$$

quindi $\sin(z-1) = \pm\sqrt{1-\lambda^2}$, e quindi

$$y = \pm\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}},$$

ed infine

$$x = x_\lambda, \quad x_\lambda \text{l'unica soluzione dell'equazione } xe^{x^2-1} = \lambda.$$

Avremo quindi che nei punti $(x_\lambda, \pm\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \arccos(\lambda))$ assieme ai punti $(0, 0, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ il teorema non si applica.