

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
C.d.S. Ingegneria Civile e Ambientale

Eserciziario di
Analisi Matematica II ¹

Michele Miranda
Dipartimento di Matematica e Informatica
via Machiavelli 35, I-44121 Ferrara
e-mail: michele.miranda@unife.it

a.a. 2019-2020

¹versione aggiornata al 9 dicembre 2019

Indice

1	Funzioni continue in più variabili	1
1.1	Soluzioni	4
2	Curve	17
2.1	Soluzioni	20
3	Derivabilità e differenziabilità	39
3.1	Soluzioni	43
4	Funzioni implicite e superfici	69
4.1	Alcuni esempi senza dimostrazioni	72
4.1.1	Proiezione stereografica della sfera	72
4.1.2	Nastro di Möbius	73
4.2	Soluzioni	73
5	Estremi e punti stazionari	89
5.1	Massimi e minimi su insiemi	89
5.2	Punti stazionari e loro classificazione	93
5.3	Soluzioni	94
6	Integrali multipli	127
6.1	Soluzioni	132
7	Integrali curvilinei e di superficie	153
7.1	Soluzioni	158
8	Successioni e serie di funzioni	177
8.1	Successioni di funzioni	177
8.2	Serie di funzioni	178
8.3	Serie di potenze	179
8.4	Serie di Taylor	179
8.5	Serie di Fourier	181
8.6	Soluzioni	182

9	Equazioni differenziali	213
9.1	Soluzioni	218
A	Numeri complessi	233
A.1	Soluzioni	236

Appendice A

Numeri complessi

Esercizio A.1 Scrivere nelle varie forme i seguenti numeri complessi

$$1 + i, \quad 6e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad 8e^{-i\frac{\pi}{3}}, \quad (1 + i\sqrt{3})^5.$$

Esercizio A.2 Utilizzare la formula di De Moivre per $(\cos \vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)^3$ per calcolare $\cos 3\vartheta$ e $\operatorname{sen}3\vartheta$.

Esercizio A.3 Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi

$$1 + i - \frac{i}{1 - 2i}, \quad \frac{3 - i}{(1 + i)^2} - \frac{i}{1 - i}.$$

Esercizio A.4 Scrivere in forma algebrica, cartesiana, polare ed esponenziale i seguenti numeri complessi

$$\frac{1}{1 + i}, \quad -1 + i, \quad -1 - i\sqrt{3}, \quad \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^2.$$

Esercizio A.5 Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi

$$\frac{(-1/2 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}, \quad \frac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}.$$

Esercizio A.6 Provare la seguente identità;

$$1 + e^{i\pi} = 0.$$

Esercizio A.7 Dato il numero complesso $z = a + ib$, scrivere, qualora sia possibile, parte reale e parte immaginaria dei numeri

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{z - 1}{z + 1}, \quad \frac{1}{z^2}.$$

Esercizio A.8 Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano la seguente equazione

$$|z - 3 + 4i| = 5.$$

Esercizio A.9 Trovare le radici del polinomio

$$p(z) = z^2 - 5z + 7.$$

Esercizio A.10 Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^2 + (1 - i)z - 2 - 2i = 0$$

ed esprimerle in forma algebrica.

Esercizio A.11 Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$|z|^2 z - 4i\bar{z} = 0.$$

Esercizio A.12 Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$(z + i)^2 = (\sqrt{3} + i)^2.$$

Esercizio A.13 Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$z^3 = |z|^2.$$

Esercizio A.14 Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$z^2 + i\bar{z} = 1.$$

Esercizio A.15 Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$z^2 + i\sqrt{5}|z| + 6 = 0.$$

Esercizio A.16 Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$|z|^2 + 5z + 10i = 0.$$

Esercizio A.17 Trovare le radici seste del numero complesso

$$w = (\sqrt{3} + i)^9.$$

Esercizio A.18 Calcolare le radici quarte del numero $2 - i\sqrt{12}$.

Esercizio A.19 Risolvere l'equazione $(z - 2)^3 = -i$.

Esercizio A.20 Dopo aver scritto il numero complesso

$$w = \frac{(1+2i)(2-3i)}{(2-i)(3+2i)}$$

in forma algebrica e polare/esponenziale, si determinino le soluzioni complesse dell'equazione $z^8 = w$.

Esercizio A.21 Dimostrare che la somma delle radici n -esime dell'unità è pari ad 0.

Esercizio A.22 Mostrare che se z è una radice n -esima di w , allora tutte le altre radici sono date da $z\omega_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, con $\omega_0 = 1, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ le radici n -esime dell'unità. In particolare, le radici n -esima saranno della forma $z\omega_1^k$, $k = 0, \dots, n-1$.

Esercizio A.23 Calcolare le soluzioni complesse di

$$|z|^2 - 6z + 1 = 0.$$

Esercizio A.24 Calcolare le soluzioni complesse di

$$z^4 + 6z^2 - 5 = 0.$$

Esercizio A.25 Calcolare le soluzioni complesse di

$$z^4 + 4 = 0.$$

Esercizio A.26 Dato il polinomio

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3,$$

calcolare $p(i)$ e trovare tutte le radici del polinomio.

Esercizio A.27 Calcolare le soluzioni complesse di

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 8i.$$

Esercizio A.28 Trovare le soluzioni complesse di

$$z^2 + iz + i\frac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$

Esercizio A.29 Trovare le soluzioni complesse di

$$z|z|^2 - (1 + 4\sqrt{3})i\bar{z} = 0.$$

Esercizio A.30 Dato $w \in \mathbb{C}$, trovare i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|z - w| = |z + w|.$$

A.1 Soluzioni

Soluzione A.1 Si ottengono le seguenti espressioni

$$\begin{aligned} 1 + i &= (1, 1) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} 6e^{i \frac{\pi}{6}} &= 6 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \\ &= 3\sqrt{3} + 3i = (3\sqrt{3}, 3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8e^{-i \frac{\pi}{3}} &= 8e^{i \frac{5\pi}{3}} = 8 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} \right) \\ &= 8 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4 - 4i\sqrt{3} = (4, -4\sqrt{3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^5 &= 32 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 = 32(e^{i \frac{\pi}{3}})^5 \\ &= 32e^{i \frac{5\pi}{3}} = 16 - 16i\sqrt{3} = (16, -16\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Soluzione A.2 Notiamo che

$$(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)^3 = e^{3i\vartheta} = \cos 3\vartheta + i \operatorname{sen} 3\vartheta,$$

mentre analogamente con lo sviluppo del cubo di un binomio, si ottiene

$$(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)^3 = \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta \operatorname{sen}^2 \vartheta + i(3 \cos^2 \vartheta \operatorname{sen} \vartheta - \operatorname{sen}^3 \vartheta)$$

da cui

$$\cos 3\vartheta = \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta \operatorname{sen}^2 \vartheta, \quad \operatorname{sen} 3\vartheta = 3 \cos^2 \vartheta \operatorname{sen} \vartheta - \operatorname{sen}^3 \vartheta$$

Soluzione A.3 Notiamo che

$$\left| 1 + i - \frac{i}{1 - 2i} \right| = \left| \frac{1 + i - 2i + 2 - i}{1 - 2i} \right| = \frac{|3 - 2i|}{|1 - 2i|} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}},$$

e analogamente

$$\left| \frac{3 - i}{(1 + i)^2} - \frac{i}{1 - i} \right| = \left| \frac{(3 - i)(1 - i) - i(1 + i)^2}{(1 + i)^2(1 - i)} \right| = \frac{|4 - 4i|}{|1 + i|^2 |1 - i|} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2.$$

Soluzione A.4 Usando la formula

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

e tenendo presente che $|1+i|^2 = 1+1 = 2$, si ottiene che

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Se ne deduce che $|1/(1+i)| = \sqrt{2}/2$ e $\arg(1/(1+i)) = -\pi/4$, da cui

$$\frac{1}{1+i} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

In definitiva, si ha che

$$\frac{1}{1+i} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) & \text{(forma cartesiana)} \\ \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} & \text{(forma algebrica)} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{-\pi}{4} \right) & \text{(forma polare)} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} & \text{(forma esponenziale).} \end{cases}$$

Per gli altri numeri abbiamo che

$$-1+i = (-1, 1) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}},$$

$$-1-i\sqrt{3} = (-1, -\sqrt{3}) = 2 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} \right) = 2e^{i\frac{4\pi}{3}},$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^2 &= \left(\frac{2(1/2 + i\sqrt{3}/2)}{\sqrt{2}(1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2})} \right)^2 = \left(\frac{2(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4})} \right)^2 \\ &= \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}} \right)^2 = \left(\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{7\pi}{4})} \right)^2 \\ &= 2e^{-i\frac{17\pi}{6}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i \end{aligned}$$

Soluzione A.5 Abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{(-1/2 + 2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2} &= \frac{1/4 - 4 - 2i - 1 + 3i + 3 - i}{27 + 54i - 36 - 8i - 4 + 1 - 4i} = \frac{-7/4}{-12 + 42i} = \frac{-7}{12} \frac{1}{-4 + 14i} \\ &= \frac{(-7/12)(-4 - 14i)}{212} = \frac{14 + 49i}{1272}. \end{aligned}$$

mentre

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \frac{\sqrt{2}^9 e^{i\frac{9\pi}{4}}}{\sqrt{2}^7 e^{-i\frac{7\pi}{4}}} = 2e^{i4\pi} = 2.$$

Soluzione A.6 Dalla definizione di esponenziale immaginario, si ricava che

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1,$$

da cui segue l'identità.

Soluzione A.7 In questo esercizio utilizzeremo la formula

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2};$$

quindi, nel primo caso avremo

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

che ha senso per $z \neq 0$; quindi

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \right) = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Per quanto riguarda il secondo caso, avremo $z - 1 = (a - 1) + ib$ e $z + 1 = (a + 1) + ib$, da cui

$$\frac{z - 1}{z + 1} = \frac{(z - 1)\overline{(z + 1)}}{|z + 1|^2} = \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 2a + 1} + i \frac{2b}{a^2 + b^2 + 2a + 1}$$

che ha senso per $z \neq -1$; quindi

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z - 1}{z + 1} \right) = \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 2a + 1}, \quad \operatorname{Im} \left(\frac{z - 1}{z + 1} \right) = \frac{2b}{a^2 + b^2 + 2a + 1}.$$

Infine

$$\frac{1}{z^2} = \frac{\bar{z}^2}{|z|^4} = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2} - i \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2},$$

e quindi

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z^2} \right) = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}, \quad \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z^2} \right) = -\frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Soluzione A.8 Ci sono due modi per risolvere l'esercizio; il primo, più rapido, sta nel notare che cercare i punti che soddisfano $|z - 3 + 4i| = 5$ significa cercare i numeri complessi z che distano 5 dal punto $3 - 4i$, quindi la soluzione è la circonferenza di raggio 5 centrata in $3 - 4i$.

Altrimenti, si tratta di scrivere $z = a + ib$ e tradurre, elevando al quadrato, l'equazione data nell'espressione

$$25 = |a + ib - 3 + 4i|^2 = |(a - 3) + i(b + 4)|^2 = (a - 3)^2 + (b + 4)^2,$$

da cui si riconosce la circonferenza nel piano di raggio 5 centrata nel punto $(3, -4)$.

Soluzione A.9 Le radici di un polinomio complesso di secondo grado si trovano nello stesso modo in cui si trovano quelle di un polinomio reale, cioè tramite la formula risolutiva. Quindi

$$p(z) = z^2 - 5z + 7 = 0$$

se e solo se

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 28}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2};$$

l'unica cosa da osservare è che la radice quadrata da calcolare in questo caso va fatta in campo complesso; tenendo presente che in campo complesso la radice quadrata ha due soluzioni, il \pm può essere omesso (deriverà dal fatto che le due soluzioni complesse differiscono per un angolo di π , e quindi sono una l'opposta dell'altra. Avremo quindi che le soluzioni sono date da

$$z = \frac{5}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si noti infine che le due soluzioni sono una coniugata dell'altra; questo dovevamo aspettarcelo in quanto il polinomio considerato era a coefficienti reali.

Soluzione A.10 Anche in questo caso applichiamo la formula risolutiva per i polinomi di secondo grado e troviamo che le soluzioni dell'equazione

$$z^2 + (1 - i)z - 2 - 2i = 0$$

sono date da

$$z = \frac{-1 + i \pm \sqrt{(1 - i)^2 + 4(2 + 2i)}}{2}.$$

Per calcolare la radice in questa espressione, conviene scrivere in forma esponenziale il numero

$$(1 - i)^2 + 4(2 + 2i) = 8 + 6i;$$

Ma $|8 + 6i| = 10$, e quindi

$$8 + 6i = 10 \left(\frac{4}{5} + i \frac{3}{5} \right);$$

indichiamo con ϕ l'angolo il cui coseno vale $4/5$ e il cui seno vale $3/5$ (non essendo un angolo noto, conviene individuarlo in questo modo), e quindi le soluzioni della nostra equazione saranno date da

$$z = \frac{i - 1}{2} \pm \frac{\sqrt{10}}{2} e^{i \frac{\phi}{2}} = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \cos \frac{\phi}{2} \right) + i \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \sin \frac{\phi}{2} \right).$$

Questa espressione può essere semplificata utilizzando le formule di bisezione per seno e coseno, tenendo presente che l'angolo ϕ che stiamo considerando verifica $0 < \phi < \pi/2$ dato che sia seno che coseno sono positivi;

$$\cos \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \phi}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \sin \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

In definitiva le soluzioni sono date da

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -2.$$

Soluzione A.11 Notando che $|z|^2 = z\bar{z}$, l'equazione data può essere riscritta come

$$\bar{z}(z^2 - 4i);$$

avremo quindi che $z_0 = 0$ è una soluzione. Altre soluzioni vengono dall'equazione

$$z^2 - 4i = 0,$$

cioè dalle due radici quadrate del numero $4i = 4e^{i\pi/2}$; tali soluzioni saranno date da

$$z_{1,2} = \pm 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{2}(1+i).$$

Soluzione A.12 Dobbiamo risolvere l'equazione

$$(z+i)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}};$$

troviamo quindi le radici quadrate del membro di destra e poi sottraiamo i , cioè le soluzioni sono date da

$$z_{1,2} = -i + \sqrt{2}e^{i\vartheta_{1,2}}$$

con

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \vartheta_2 = \frac{7\pi}{6}.$$

Soluzione A.13 Passando alla forma esponenziale $z = \rho e^{i\vartheta}$, l'equazione diventa

$$\rho^3 e^{i3\vartheta} = \rho^2,$$

da cui $\rho^3 = \rho^2$, cioè $\rho = 0$ o $\rho = 1$, mentre $3\vartheta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cioè $\vartheta = \frac{2k\pi}{3}$ (valori di ϑ compresi in $[0, 2\pi)$ sono dati da $0, 2\pi/3, 4\pi/3$).

Soluzione A.14 Scriviamo $z = a + ib$ e si ottiene l'equazione

$$a^2 - b^2 + 2iab + i(a - ib) = 1$$

cioè

$$a^2 - b^2 + b + i(2ab + a) = 1$$

che si riduce al sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + b = 1 \\ a(2b + 1) = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione ha soluzione per $a = 0$ o per $b = -1/2$; nel primo caso la prima equazione diventa

$$b^2 - b + 1 = 0$$

che non ha soluzioni reali, mentre nel secondo caso si ottiene

$$a^2 = \frac{7}{4},$$

cioè $a = \pm\sqrt{7}/2$; l'equazione data ha quindi le due soluzioni

$$z = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{i}{2}, \quad z = -\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{i}{2}.$$

Soluzione A.15 Ponendo $z = a + ib$, si trova

$$a^2 - b^2 + 2iab + i\sqrt{5(a^2 + b^2)} + 6 = 0$$

che si riduce al sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 6 = 0 \\ 2ab + \sqrt{5a^2 + 5b^2} = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene che

$$-2ab = \sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2}$$

da cui $ab \leq 0$, cioè a e b hanno segni discordi. Elevando al quadrato si ottiene

$$4a^2b^2 = 5a^2 + 5b^2$$

cioè

$$b^2(4a^2 - 5) = 5a^2.$$

Siccome non si può essere $a^2 = 5/4$, dividendo si ricava

$$b^2 = \frac{5a^2}{4a^2 - 5}.$$

Sostituendo questo nella prima equazione si ottiene

$$a^2 - \frac{5a^2}{4a^2 - 5} + 6 = 0,$$

o equivalentemente

$$\frac{4a^4 + 14a^2 - 30}{4a^2 - 5} = 0,$$

cioè $a^2 = 6$, da cui $a = \pm\sqrt{6}$. In definitiva le soluzioni dell'equazione data sono

$$z_1 = \sqrt{6} - i\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{19}}, \quad z_2 = -\sqrt{6} + i\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{19}}.$$

Soluzione A.16 Ponendo $z = a + ib$ si ottiene l'equazione

$$a^2 + b^2 + 5a + 5ib + 10i = 0,$$

cioè $b = -2$ e $a^2 + 5a + 4 = 0$, che significa $a = -1$ o $a = -4$. Quindi l'equazione data ha due soluzioni

$$z = -1 - 2i, \quad z = -4 - 2i.$$

Soluzione A.17 Si tratta di risolvere l'equazione

$$z^6 = w;$$

per fare questo, scriviamo il numero w in coordinate polari; partiamo quindi dal numero complesso

$$w_0 = \sqrt{3} + i.$$

Calcolando modulo e argomento si trova

$$w_0 = 2(\cos \pi/6 + i \operatorname{sen} \pi/6).$$

Dalle formule di De Moivre otterremo quindi che

$$w = 2^9 e^{i3\pi/2}.$$

Le radici saranno quindi date dalla formula

$$z_k = 2\sqrt{2}(\cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k),$$

con

$$\theta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Soluzione A.18 Scriviamo il numero dato in forma esponenziale;

$$2 - i\sqrt{12} = 2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{i\frac{5\pi}{3}},$$

e quindi le radici quarte sono date da

$$z_k = \sqrt{2}e^{i\vartheta_k}, \quad \vartheta_k = \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Soluzione A.19 Facendo la sostituzione $w = z - 2$, si tratta di risolvere l'equazione

$$w^3 = -i;$$

dobbiamo quindi trovare le tre radici cubiche del numero complesso $-i$, che ha modulo 1 e argomento pari a $3\pi/2$. Quindi le soluzioni saranno

$$w_k = (\cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

In definitiva, la soluzione dell'esercizio sarà data dai tre numeri complessi

$$z_k = (2 + \cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Soluzione A.20 Anche qui abbiamo due modi; il primo è moltiplicare numeratore e denominatore per i coniugati dei membri al denominatore, cioè per $2 + i$ e $3 - 2i$, in modo da ottenere

$$w = \frac{(1 + 2i)(2 + i)(2 - 3i)(3 - 2i) 5i \cdot 13i}{(2 - i)(2 + i)(3 + 2i)(3 - 2i) 5 \cdot 13} = -1,$$

il secondo modo è notare che $1 + 2i = i(2 - i)$ e $2 - 3i = -i(3 + 2i)$, da cui ancora $w = -1$. Per calcolare le radici ottave si scrive $w = -1 = e^{i\pi}$, da cui le soluzioni

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \quad \vartheta_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$$

che definiscono i vertici di un ottagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio 1 e con primo vertice nel punto

$$e^{i\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2 - 2\sqrt{2} - i\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2} + i\sqrt{2}}}{2}.$$

Soluzione A.21 Le radici n -esime dell'unità sono date dalla forma

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1;$$

scrivendo $\varepsilon_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, si nota che $z_k = \varepsilon_n^k$, e quindi

$$\begin{aligned} z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} &= 1 + \varepsilon_n + \dots + \varepsilon_n^{n-1} \frac{(1 + \varepsilon_n + \dots + \varepsilon_n^{n-1})(1 - \varepsilon_n)}{(1 - \varepsilon_n)} \\ &= \frac{1 - \varepsilon_n^n}{1 - \varepsilon_n} = 0 \end{aligned}$$

in quanto $\varepsilon_n^n = 1$.

Soluzione A.22 L'esercizio segue semplicemente notando che le radici n -esima di $w = re^{i\varphi}$ sono date da

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = z_0 \varepsilon_n^k$$

con $z_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}}$ che definisce una radice n -esima di w e ε_n radice n -esima dell'unità.

Soluzione A.23 Non trattandosi di un polinomio, scriviamo il numero complesso $z = a+ib$, in modo da trovare il sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 6a + 1 = 0 \\ -6b = 0, \end{cases}$$

che ha come soluzioni i numeri complessi (in realtà reali) $z_1 = 3 + 2\sqrt{2}$, $z_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Soluzione A.24 Trattandosi di un polinomio (biquadrato), usando la formula risolutiva, si ha, ponendo $w = z^2$,

$$w_1 = -3 + \sqrt{14}, \quad w_2 = -3 - \sqrt{14}.$$

Le quattro soluzioni dell'equazione data saranno quindi le radici quadrate delle due soluzioni date, cioè

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\sqrt{14} - 3}, & z_2 &= -\sqrt{\sqrt{14} - 3}, \\ z_3 &= i\sqrt{\sqrt{14} + 3}, & z_4 &= -i\sqrt{\sqrt{14} + 3}. \end{aligned}$$

Soluzione A.25 Le soluzioni saranno date dalle quattro radici quarte del numero complesso $w = -4$, e cioè

$$z_k = \sqrt[4]{2}(\cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Soluzione A.26 Notiamo che $p(i) = 0$, quindi, dato che il polinomio ha coefficienti reali, si dovrà avere che anche $-i$ è una radice del polinomio. Avremo quindi che

$$p(z) = (z^2 + 1)q(z),$$

dove $q(z) = z^2 - 4z + 3 = (z - 3)(z - 1)$ e quindi le radici del polinomio p sono date da i , $-i$, 1 e 3 .

Soluzione A.27 Possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$(z + 1)^3 = 8i.$$

Si tratta quindi, posto $w = z + 1$, di trovare le tre radici cubiche del numero complesso $8i$, di modulo 8 e argomento $\pi/2$; avremo quindi che le sue tre radici cubiche sono date da

$$w_k = 2(\cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2,$$

da cui

$$z_k = (-1 + 2 \cos \theta_k + 2i \operatorname{sen} \theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Soluzione A.28 L'equazione può essere riscritta come

$$\left(z + \frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4},$$

da cui

$$z_k = -\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k), \quad \theta_k = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k = 0, 1.$$

Soluzione A.29 Notiamo anzitutto che $z = 0$ è soluzione dell'equazione data. Cerchiamo quindi le soluzioni non nulle; moltiplicando l'equazione per z otteniamo

$$z^2|z|^2 - (1 + 4\sqrt{3})i|z|^2 = 0,$$

o equivalentemente, dato che $z \neq 0$,

$$z^2 - (1 + 4\sqrt{3})i = 0.$$

Quindi avremo due soluzioni non nulle, che altro non sono che le due radici del numero complesso $(1 + 4\sqrt{3})i$, e cioè

$$z_1 = \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}(\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4) = \sqrt{\frac{1 + 4\sqrt{3}}{2}}(1 + i),$$

$$z_2 = \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}(\cos 5\pi/4 + i \operatorname{sen} 5\pi/4) = \sqrt{\frac{1 + 4\sqrt{3}}{2}}(-1 - i).$$

Soluzione A.30 Scrivendo $w = a + ib$ e $z = x + iy$, l'equazione è equivalente all'equazione nelle due incognite reali $x, y \in \mathbb{R}$ (essendo una equazione in due incognite in generale non ci possiamo aspettare una sola soluzione)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (x + a)^2 + (y + b)^2$$

che ha per soluzione il luogo di punti descritto dall'equazione

$$by = -ax$$

che descrive una retta nel piano Oxy . Si poteva arrivare a tale risultato interpretando geometricamente l'equazione data; la quantità $|z - w|$ indica la distanza di z da w , mentre $|z + w|$ rappresenta la distanza di z da $-w$. Quindi le soluzioni dell'equazione saranno esattamente i punti equidistanti da w e $-w$, cioè l'asse del segmento che congiunge w con $-w$. Infatti, indicando sempre con $w = a + ib$, la retta del piano cartesiano passante per w e $-w$ è descritta dall'equazione

$$ay - bx = 0.$$

Tale retta passa per l'origine e ha come retta ortogonale passante per l'origine la retta di equazione

$$by + ax = 0;$$

questa retta descrive esattamente il luogo dei punti equidistanti da w e $-w$, e quindi è l'insieme delle soluzioni dell'equazione data.