Nel presente fascicolo sono raccolti gli appunti del corso di Analisi Matematica 2 dal Corso di Laurea Triennale di Ingegneria Civile e Ambientale dell'Università di Ferrara.

Il materiale contenuto in queste note vuole essere semplicemente una guida relativa agli argomenti trattati durante il corso; è inevitabilmente incompleto, così come è inevitabile che siano presenti errori ed inesattezze. Non si risponde tuttavia degli errori che possono essere contenuti in questo fascicolo, in quanto è cura del lettore rilevare e segnalare eventuali imprecisioni.

I presenti appunti non hanno la pretesa di sostituire un buon libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. Viene fornita in bibliografia una lista di testi che si ritengono validi per lo studio della materia. La funzione di questi appunti è piuttosto quella di facilitare gli studenti e indicare loro il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame. Si consiglia pertanto sempre di studiare sui testi di Analisi Matematica esistenti in letteratura, sicuramente più affidabili e corretti; fortunatamente le biblioteche dei nostri Atenei sono molto buone e ben fornite di ottimi testi. Tra i vari testi disponibili consigliamo sicuramente il testo [3] o la sua edizione precedente [2]; un altro ottimo testo è [4]

Si consiglia infine di prestare attenzione alla data di aggiornamento della presente dispensa, in quanto è possibile che alcune parti vengano corrette ed integrate durante il corso.

Michele Miranda<br>Ferrara, 27 novembre 2019

# Indice

# Capitolo 6

# Integrali multipli

In questo capitolo ci occupiamo della definizione degli integrali multipli,s cioè della teoria dell'integrazione per funzioni di più variabili. Considereremo solo funzioni scalari; l'integrale di una funzione vettoriale si definisce semplicemente come l'integrale delle sue componenti.

L'integrazione per funzioni di più variabili presenta maggiori complessitá dell'integrazione in una variabile; l'approccio che presentiamo in questo capitolo definisce quello che si chiama l'integrale di Riemann. Tale integrale ha dimostrato in varie applicazioni delle forti limitazioni ed è stato sostituito con l'integrale di Lebesgue; rimandiamo a testi specializzati l'esposizione di questa teoria che passa attraverso una sistematica trattazione della teoria della misura. Come vedremo in questo capitolo, anche l'integrale di Riemann si scontra con la definizione di misura di un insieme e con la definizione di insieme misurabile; la nozione di misura che qui presenteremo sarà quella di Peano–Jordan.

## 6.1 Integrale di Riemann

L'integrale di Riemann viene definito per funzioni di $n$ variabili, ma per non appesantire le notazioni, vedremo nel dettaglio il caso di funzioni di due variabili con ovvie generalizzazioni al caso di dimensione maggiore.

### 6.1.1 Integrale su rettangoli

Definiremo l'integrale di Riemann di una funzione limitata su di un rettangolo di $\mathbb{R}^n$, cioè su insiemi del tipo

$$R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

$a_i < b_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$; il caso particolare $n = 2$ è dato da

$$R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$$

Definiamo misura di tale rettangolo la quantità

$$|R| = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Per un rettangolo nel piano, una partizione $\mathscr{P} \subset R$ è determinata da una scelta di elementi $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_h = b$, $c = s_0 < s_2 < \ldots < s_k = d$, detti nodi della partizione, che definisce i rettangoli

$$R_{ij} = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}], \qquad (i,j) \in I(h,k),$$

dove abbiamo posto

$$I(h,k) = \{(i,j), i = 0, \dots, h-1, j = 0, \dots, k-1\}.$$

Scriveremo per brevità $\mathscr{P} = \{\{t_0, \dots, t_h\}, \{s_0, \dots, s_k\}\}$; i rettangoli $R_{ij}$ hanno la proprietà che

$$R = \bigcup_{(i,j) \in I(h,k)} R_{ij}, \qquad |R_{ij} \cap R_{i'j'}| = 0 \text{ se } (i,j) \neq (i',j').$$

Sia $f : R \to \mathbb{R}$ una funzione limitata; definiamo le somme di Riemann inferiore e superiore di $f$ relative alla partizione $\mathscr{P}$

$$s(f, \mathscr{P}) = \sum_{(i,j) \in I(h,k)} \left( \inf_{R_{ij}} f \right) |R_{ij}|, \qquad S(f, \mathscr{P}) = \sum_{(i,j) \in I(h,k)} \left( \sup_{R_{ij}} f \right) |R_{ij}|, .$$

È chiaro che valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\left( \inf_R f \right) |R| \le s(f, \mathscr{P}) \le S(f, \mathscr{P}) \le \left( \sup_R f \right) |R|.$$

**Definizione 6.1** *Data $f : R \to \mathbb{R}$ funzione limitata, si definisce l'integrale di Riemann inferiore e superiore ponendo*

$$\underline{\int_R} f(x)dx := \sup\{s(f, \mathscr{P}) : \mathscr{P} \subset R\}, \qquad \overline{\int_R} f(x)dx := \inf\{S(f, \mathscr{P}) : \mathscr{P} \subset R\}.$$

*Diremo quindi che $f$ è Riemann integrabile su $R$ se*

$$\underline{\int_R} f(x)dx = \overline{\int_R} f(x)dx := \int_R f(x)dx.$$

Riportiamo di seguito alcune proprietà dell'integrale appena definito, le cui diimostrazioni seguono direttamente dalla definizione:

1. se $f \equiv 0$, allora $f$ è Riemann integrabile su $R$ e
$$\int_R f(x)dx = 0;$$
2. se $R = R_1 \cup R_2$ con $R_1$ e $R_2$ due rettangoli tali che $|R_1 \cap R_2| = 0$, allora se $f$ è Riemann integrabile su $R$, è Riemann integrabile sia su $R_1$ che su $R_2$ e
$$\int_R f(x)dx = \int_{R_1} f(x)dx + \int_{R_2} f(x)dx.$$
3. se $f$ e $|f|$ sono Riemann integrabili su $R$, allora
$$\left| \int_R f(x)dx \right| \le \int_R |f(x)|dx.$$

**Osservazione 6.2** Notiamo quindi che per definizione di integrale superiore e inferiore, per ogni partizione

$$0 \leq \overline{\int_R} f(x)dx - \underline{\int_R} f(x)dx \leq S(f, \mathscr{P}) - s(f, \mathscr{P}).$$

Quindi condizione sufficiente per la Riemann integrabilità è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista una partizione $\mathscr{P}_\varepsilon$ tale che

$$S(f, \mathscr{P}_\varepsilon) - s(f, \mathscr{P}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Dalla definizione di estremo superiore ed estremo inferiore si nota anche che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due partizioni $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$ di $R$ per cui

$$S(f, \mathscr{P}_1) \leq \overline{\int_R} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad s(f, \mathscr{P}_2) \geq \underline{\int_R} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2},$$

e quindi

$$S(f, \mathscr{P}_1) - s(f, \mathscr{P}_2) \leq \overline{\int_R} f(x)dx - \underline{\int_R} f(x)dx + \varepsilon.$$

Quindi se $f$ è Riemann integrabile su $R$,

$$S(f, \mathscr{P}_1) - s(f, \mathscr{P}_2) \leq \varepsilon.$$

Le due partizioni $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ possono essere raggruppate in un'unica partizione $\mathscr{P}_\varepsilon$ definita considerando l'unione dei nodi che definiscono le due partizioni date; tale partizione viene detta raffinamento delle due partizioni date e ha la proprietà che

$$s(f, \mathscr{P}_1) \leq s(f, \mathscr{P}_\varepsilon) \leq S(f, \mathscr{P}_\varepsilon) \leq S(f, \mathscr{P}_2).$$

Grazie all'osservazione precedente abbiamo dimostrato il seguente risultato.

**Proposizione 6.3** *Una funzione limitata $f : R \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile su $R$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathscr{P}_\varepsilon$ tale che*

$$S(f, \mathscr{P}_\varepsilon) - s(f, \mathscr{P}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Questa osservazione è utile nella dimostrazione del seguente risultato; per un rettangolo $R \subset \mathbb{R}^n$ scriveremo

$$R = [a_1, b_1] \times R', \quad R' = [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

**Proposizione 6.4** *Sia $f : R \to \mathbb{R}$ una funzione continua; allora $f$ è Riemann integrabile e, posto $x = (t, x')$, $t' \in [a_1, b_1]$, $x' \in R'$, vale l'identità*

$$\int_R f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} dt \int_{R'} f(t, x')dx' = \int_{R'} dx' \int_a^b f(t, x)dt.$$

Dimostrazione. Dimostriamo il risultato nel caso $n = 2$. Usiamo il Teorema di Heine–Cantor 1.21; se $f$ è continua allora è uniformemente continua sugli insiemi chiusi e limitati, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \qquad \forall \|x - y\| < \delta.$$

Dato un insieme $A$ si definisce il suo diametro ponendo

$$\mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|;$$

se $A = R = [a,b] \times [c,d]$ è un rettangolo

$$\mathrm{diam}(R) = \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}.$$

Data una partizione $\mathscr{P}$ si definisce

$$\mathrm{diam}(\mathscr{P}) := \sup_{(i,j)\in I(h,k)} \mathrm{diam}(R_{ij}) \sup_{(i,j)\in I(h,k)} \sqrt{(t_{i+1}-t_i)^2 + (s_{j+1}-s_j)^2}.$$

Se la partizione $\mathscr{P}$ è fissata in modo tale che $\mathrm{diam}(\mathscr{P}) < \delta$, allora per l'uniforme continuità di $f$,

$$\sup_{R_{ij}} f - \inf_{R_{ij}} f < \varepsilon, \qquad \forall i,j.$$

Avremo quindi che per tale partizione

$$S(f,\mathscr{P}) - s(f,\mathscr{P}) < \varepsilon |R|,$$

e quindi $f$ è Riemann integrabile su $R$.
Per la seconda parte della proposizione, dimostriamo preliminarmente che le funzioni

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)dy, \qquad \psi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

sono continue. Ad esempio, per la prima funzione, se $|x_1 - x_2| < \delta$ allora $\|(x_1,y) - (x_2,y)\| < \delta$. Sempre per l'uniforme continutà avremo quindi che

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \int_c^d |f(x_1,y) - f(x_2,y)|dy < \varepsilon(d-c),$$

da cui la continuità. Fissiamo ora una partizione $\mathscr{P} \subset R$; dal teorema della media integrale avremo quindi che

$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi(x)dx &= \sum_{i=0}^{h-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(x)dx = \sum_{i=0}^{h-1} \varphi(x_i)(t_{i+1}-t_i) = \sum_{i=0}^{h-1} (t_{i+1}-t_i) \int_c^d f(x_i,y)dy \\
&= \sum_{(i,j)\in I(h,k)} (t_{i+1}-t_i) \int_{s_j}^{s_{j+1}} f(x_i,y)dy = \sum_{(i,j)\in I(h,k)} f(x_i,y_j)(t_{i+1}-t_i)(s_{j+1}-s_j) \\
&= \sum_{(i,j)\in I(h,k)} f(x_i,y_j)|R_{ij}|
\end{aligned}$$

con $(x_i,y_j) \in R_{ij}$. Dato che

$$\inf_{R_{ij}} f \leq f(x_i,y_j) \leq \sup_{R_{ij}} f$$

si ottiene la stima

$$s(f,\mathscr{P}) \leq \int_a^b \varphi(x)dx \leq S(f,\mathscr{P}).$$

In particolare la stima

$$s(f,\mathscr{P}) \leq \int_a^b \varphi(x)dx$$

vale per ogni partizione, quindi passando all'estremo superiore su tutte le partizioni

$$\underline{\int_R} f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Analogamente partendo dalla stima

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq S(f,\mathscr{P})$$

valevole per ogni partizione, passando all'estremo inferiore su tutte le partizioni

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \overline{\int_R} f(x)dx.$$

Siccome già sappiamo che $f$ è Riemann integrabile, ne deduciamo che

$$\int_R f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

$\square$

Il risultato precedente ci dice quindi non solo che le funzioni continue sono Riemann integrabili sui rettangoli, ma ci danno anche un metodo di calcolo del suo integrale doppio mediante il calcolo di due integrali di una variabile.

**Esempio 6.1** Calcoliamo l'integrale di $x^2y^3$ sul rettangolo $R = [0,1] \times [1,2]$;

$$\int_R x^2y^3 dxdy = \int_0^1 dx \int_c^d x^2y^3 dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2y^4}{4}\right]_{y=1}^{y=2} dx = \frac{15}{4}\int_0^1 x^2 dx = \frac{5}{4}.$$

Ovviamente potevamo anche calcolare

$$\int_R x^2y^3 dxdy = \int_c^d dy \int_0^1 x^2y^3 dx = \int_1^2 \left[\frac{x^3y^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \frac{1}{3}\int_1^2 y^3 dy = \frac{5}{4}.$$

### 6.1.2 Integrale su insiemi misurabili limitati

Passiamo ora a dare la definizione di funzione integrabile su insiemi non rettangolari limitati. Nel seguito denoteremo con $\mathbf{1}_E$ la funzione caratteristica dell'insieme $E$ definita da

$$\mathbf{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

**Definizione 6.5 (Riemann integrabilità su insiemi limitati)** *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata con $E \subset \mathbb{R}^n$ insieme limitato. $f$ si dice Riemann integabile su $E$ se fissato un rettangolo $E \subset R$ si ha che la funzione*

$$\tilde{f}(x) = f(x)\mathbf{1}_E(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{se } x \in E \\ \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

*è Riemann integrabile su $R$; si pone in tal caso*

$$\int_E f(x)dx = \int_R \tilde{f}(x)dx.$$

*Diremo in particolare che $E$ è Peano–Jordan misurabile se $\mathbf{1}_E$ è Riemann integrabile su $R$ e si definisce la sua misura ponendo*

$$|E| = \int_R \mathbf{1}_E(x)dx = \int_E dx.$$

**Osservazione 6.6** La definizione di integrabilità su $E$ non dipende dal rettangolo $R$ che limita l'insieme $E$; infatti se $E$ è contenuto in due rettangoli $R$ ed $R'$, allora anche $R \cap R'$ è un rettangolo che contiene $E$ e $\tilde{f}$ è nulla fuori da $R \cap R'$. Quindi

$$\int_R \tilde{f}(x)dx = \int_{R'} \tilde{f}(x)dx = \int_{R\cap R'} \tilde{f}(x)dx.$$

La misura di un insieme misurabile nel caso $n = 2$ coincide con l'area dell'insieme, mentre se $n = 3$ e se stiamo considerando l'integrale di Riemann in dimensione 3, allora la misura di un insieme misurabile coincide con il suo volume.

Per caratterizzare la misurabilità di un insieme e per determinare funzioni che siano Riemann integrabili su insiemi misurabili una nozione importante è quella di insieme trascurabile o insieme di misura nulla.

**Definizione 6.7 (Insiemi trascurabili)** *Un insieme limitato $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice trascurabile o di misura nulla se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia finita di rettangoli $R_1, \ldots, R_m$ tali che*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} R_i, \qquad \sum_{i=1}^{m} |R_i| < \varepsilon.$$

*Un insieme illimitato $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice trascurabile se*

$$A = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} A_h$$

*con $A_h \subset A_{h+1}$ insiemi trascurabili limitati.*

**Osservazione 6.8** Notiamo che se $A$ è un insieme trascurabile, allora ogni insieme $B \subset A$ è trascurabile; questo fatto è immediato se $A$ è limitato, mentre nel caso generale basta considerare gli insiemi trascurabili limitati $B_h = B \cap A_h$ e notare che

$$B = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} B_h.$$

Come conseguenza si deduce la buona definizione della nozione di insieme trascurabile illimitato; infatti se $\{A_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di insiemi trascurabilii, allora per ogni altra successione di insiemi crescenti $\{B_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ la cui unione è $B$, allora i $B_h$ sono trascurabili. In definitiva, se esiste una successione di insiemi crescenti trascurabili la cui unione è $A$, allora ognii successione di insiemi crescenti limitati è fatta da insiemi trascurabili.

Abbiamo il seguente risultato.

**Proposizione 6.9** *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato; $E$ è misurabile se e solo se $\partial E$ è trascurabile. Inoltre se $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e limitata, $E$ limitato e misurabile, allora $f$ è Riemann integrabile su $E$.*

Dimostrazione. Supponiamo al solito $n = 2$ e supponiamo $\partial E$ trascurabile; fissato $\varepsilon > 0$, esistono rettangoli $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$, $i = 1, \ldots, m$ che ricoprono $\partial E$ e la cui somma delle aree è minore di $\varepsilon$. Possiamo supporre che $|R_i \cap R_j| = 0$ per $i \neq j$ e che $\partial E \cap R_i \neq \emptyset$ per ogni $i = 1, \ldots, m$. Consideriamo quindi la partizione

$$\mathscr{P} = \{\{a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m\}, \{c_1, d_1, \ldots, c_m, d_m\}\} = \{\{t_0, \ldots, t_h\}, \{s_0, \ldots, s_k\}\}.$$

Per tale partizione denotiamo con

$$I_{int} = \{(i, j) \in I(h, k) : R_{ij} \subset E\}, \quad I_{est} = \{(i, j) \in I(h, k) : R_{ij} \cap E = \emptyset\}$$

e $I_b := I(h, k) \setminus (I_{int} \cup I_{est})$. Per come sono stati scelti i rettangolo avremo che

$$\partial E \subset \bigcup_{(i,j)\in I_b} R_{ij} \subset \bigcup_{i=1}^{m} R_i$$

e quindi

$$\sum_{(i,j)\in I_b} |R_{ij}| < \varepsilon.$$

Notiamo quindi che per $(i,j) \in I_{int} \cup I_{est}$ e $f = \mathbf{1}_E$

$$\sup_{R_{ij}} f - \inf_{R_{ij}} f = 0,$$

mentre per $(i,j) \in I_b$

$$\sup_{R_{ij}} f - \inf_{R_{ij}} f = 1.$$

Quindi

$$S(\mathbf{1}_E, \mathscr{P}) - s(\mathbf{1}_E, \mathscr{P}) = \sum_{(i,j)\in I(h,k)} \left( \sup_{R_{ij}} f - \inf_{R_{ij}} f \right) |R_{ij}| = \sum_{(i,j)\in I_b} |R_{ij}| < \varepsilon,$$

da cui la misurabilità di $E$. Per l'implicazione inversa, come nella Proposizione 6.3, si dimostra che se $\mathbf{1}_E$ è Riemann integrabile, allora fissato $\varepsilon > 0$ esisterà una partizione $\mathscr{P}_\varepsilon$ tale che

$$S(\mathbf{1}_E, \mathscr{P}_\varepsilon) - s(\mathbf{1}_E, \mathscr{P}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Con la notazione appena introdotta avremo quindi che

$$\partial E \subset \bigcup_{(i,j)\in I_b} R_{ij}$$

e

$$\sum_{(i,j)\in I_b} |R_{ij}| < \varepsilon,$$

da cui la trascurabilità di $\partial E$.
Sia ora $f : E \to \mathbb{R}$ continua e limitata, $E \subset R$ e $\tilde{f}$ l'estensione nulla di $f$ su tutto $R$. Prendiamo una partizione

$$\mathscr{P} = \{\{t_0, \ldots, t_h\}, \{s_0, \ldots, s_k\}\}$$

e usiamo gli insiemi $I_{int}$, $I_{est}$ e $I_b$ definiti al punto precedente in modo che

$$\sum_{(i,j)\in I_b} |R_{ij}| < \varepsilon;$$

in questo modo

$$\sum_{(i,j)\in I_{int}} \left( \sup_{R_{ij}} \tilde{f} - \inf_{R_{ij}} \tilde{f} \right) |R_i j| \le \left( \sup_E f - \inf_E f \right) \varepsilon.$$

Abbiamo anche che se $R_{ij} \cap E = \emptyset$ allora $\tilde{f} = 0$ su $R_{ij}$ e quindiu

$$\sum_{(i,j)\in I_{ext}} \left( \sup_{R_{ij}} \tilde{f} - \inf_{R_{ij}} \tilde{f} \right) |R_{ij}| = 0.$$

Per i rettangoli interni, dato che

$$K = \bigcup_{(i,j)\in I_{int}} R_{ij} \subset E$$

è chiuso e limitato, allora su $K$ $\tilde{f} = f$ è uniformemente continua, quindi fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\|x - y\| < \delta$, $x, y, \in K$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Eventualmente suddividendo i vari rettangoli $R_{ij}$ in piè rettangolini, si può supporre che

$$\operatorname{diam}(\mathscr{P}) < \delta,$$

e quindi

$$\sum_{(i,j)\in I_{int}} \left( \sup_{R_{ij}} \tilde{f} - \inf_{R_{ij}} \tilde{f} \right) |R_{ij}| = \sum_{(i,j)\in I_{int}} \left( \sup_{R_{ij}} f - \inf_{R_{ij}} f \right) |R_{ij}| < \varepsilon |E|.$$

In definitiva abbiamo dimostrato che

$$S(\tilde{f}, \mathscr{P}) - s(\tilde{f}, \mathscr{P}) < \varepsilon(1 + |E|),$$

e quindi $\tilde{f}$ è Riemann integrabile su $R$. □

**Osservazione 6.10** Notiamo che nella dimostrazione del precedente risultato, abbiamo che la funzione $\tilde{f} : R \to \mathbb{R}$ è continua eccetto al più nei punti di $\partial E$. La dimotraziione precedente mostra quindi che se $f : R \to \mathbb{R}$ è limitata e continua tranne che in un insieme trascurabile di punti, allora $f$ è Riemann integrabile su $R$. La dimostrazione delle formule di riduzione in questo caso è più delicata e quindi la omettiamo; il fatto è che non è detto che per ogni $t \in [a, b]$, la funzione $x' \mapsto f(t, x')$ sia continua in $R'$ tranne che in un insieme trascurabile di punti. Questo fatto è vero però eccetto una quantità trascurabile di punti $t \in [a, b]$.

Vale quindi il seguente risultato che non dimostriamo.

**Proposizione 6.11** *Sia $A \subset R$ un insieme trascurabile e $f : R \to \mathbb{R}$ una funzione limitata continua in $R \setminus A$. Allora $f$ è integrabile su $R$ e*

$$\int_R f(x)dx = \int_a^b dt \int_{R'} f(t, x')dx' = \int_{R'} dx' \int_a^b f(t, x')dt.$$

Esempi importanti di insiemi trascurabili sono dati dai grafici di funzioni continue.

**Proposizione 6.12** *Sia $g : E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e continua su $E \subset \mathbb{R}^{n-1}$ insieme misurabile limitato; allora $\Gamma(g, E) \subset \mathbb{R}^n$ è trascurabile.*

Dimostrazione.
La misurabilità di $E$ ci dice che fissato $\varepsilon > 0$ esistono dei rettangoli

$$\partial E \subset \bigcup_{i=1}^m R_i, \qquad \sum_{i=1}^m |R_i| < \varepsilon.$$

Eventualmente allargando appena i rettangoli $R_i$ possiamo supporre che l'insieme compatto

$$K = \overline{E \setminus \bigcup_{i=1}^m R_i}$$

sia tutto contenuto in $E$.
La continutà di $g$ implica, grazie al Teorema di Heine–Cantor, l'uniforme continuità di $g$ su $K$, quindi fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $\|x - y\| < \delta$ implica $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Partizioniamo quindi $K$ in rettangoli il cui diametro sia al più $\delta$

$$K = \bigcup_{j=1}^k R'_j, \qquad \mathrm{diam}(R'_j) \leq \delta.$$

Per ogni $j = 1, \dots, k$ selezioniamo un punto $x_j \in R'_j$; in questo modo

$$\Gamma(g, K) \subset \bigcup_{j=1}^k \tilde{R}'_j$$

dove abbiamo posto

$$\tilde{R}'_j = R'_j \times [g(x_j) - \varepsilon, g(x_j) + \varepsilon].$$

Si osservi che

$$\sum_{j=1}^k |\tilde{R}'_j| = 2\varepsilon \sum_{j=1}^k |R'_j| \leq 2\varepsilon |E|$$

Notando infine che per i punti della frontiera $x \in \partial E$ si ha che eisiste $i \in \{1, \dots, m\}$ per cui,

$$(x, g(x)) \in R_i \times [-M, M], \qquad M = \sup_{x \in E} |g(x)|,$$

se ne conclude che

$$\Gamma(g, E) \subset \left(\bigcup_{i=1}^m R_i \times [-M, M]\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^k \tilde{R}'_j\right)$$

e che

$$\sum_{i=1}^m |R_i \times [-M, M]| + \sum_{j=1}^k |\tilde{R}'_j| < 2\varepsilon(M + |E|),$$

da cui la trascurabilità di $\Gamma(g, E)$. $\square$

Chiudiamo questa sezione con un piccolo elenco di proprietà dell'integrale di Riemann:

1. se $E$ è misurabile con $|E| = 0$ e $f : E \to \mathbb{R}$ è limitata, allora $f$ è Riemann integrabile su $E$ e
$$\int_E f(x)dx = 0;$$

2. se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono Riemann integrabili su $E$ misurabile, allora, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ è Riemann integrabile su $E$ e vale
$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_E f(x)dx + \beta \int_E g(x)dx;$$

3. se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono Riemann integrabili su $E$ misurabile e $f \leq g$ su $E$, allora
$$\int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)dx;$$

4. se $f : E \to \mathbb{R}$ è continua, $E$ è misurabile e $f$ Riemann integrabile su $E$, allora
$$\left| \int_E f(x)dx \right| \leq \int_E |f(x)|dx \leq |E| \sup_{x \in E} |f(x)|;$$

5. se $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ sono insiemi misurabili, dato che
$$\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2, \qquad \partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2,$$
allora $E_1 \cap E_2$ e $E_1 \cup E_2$ sono misurabili grazie alla trascurabilità deile loro frontiere. Inoltre, se $f : E_1 \cup E_2 \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile su $E_1 \cup E_2$, allora $f$ è Riemann integrabile su $E_1$, $E_2$ e $E_1 \cap E_2$ e vale l'identità
$$\int_{E_1 \cup E_2} f(x)dx + \int_{E_1 \cap E_2} f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx.$$
In particolare, se $|E_1 \cap E_2| = 0$ allora
$$\int_{E_1 \cup E_2} f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx.$$
Se quindi $E$ è un insieme misurabile, $f : E \to \mathbb{R}$ integrabile su $E$ e $F \subset E$ è misurabile, allora $f$ è integrabile su $F$ e su $E \setminus F$ e
$$\int_E f(x)dx = \int_F f(x)dx + \int_{E \setminus F} f(x)dx;$$
se poi $f \geq 0$ su $E \setminus F$, allora vale la monotonia
$$\int_E f(x)dx \geq \int_F f(x)dx.$$

### 6.1.3 Formule di riduzione

Vediamo ora le metodologie di calcolo degli integrali multipli. Vi sono essenzialmente due modi per calcolare un integrale multiplo; l'integrazioine detta per "fili" e quella detta per "strati",

Abbiamo il seguente risultato.

**Teorema 6.13 (Integrazione per "fili")** *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme del tipo*

$$E = \{x = (x', t) \in \mathbb{R}^n : x' \in E', \alpha(x') \le t \le \beta(x')\} \tag{6.1}$$

*con $E' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ insieme misurabile, $\alpha, \beta : E' \to \mathbb{R}$ funzioni continue e limitate tali che $\alpha(x') \le \beta(x')$. Allora $E$ è misurabile. Inoltre, se $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e limitata, allora*

$$\int_E f(x)dx = \int_{E'} dx' \int_{\alpha(x')}^{\beta(x')} f(x', t)dt.$$

Dimostrazione. La limitatezza delle funzioni $\alpha$ e $\beta$ implica che esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$a \le \alpha(x') \le \beta(x') \le b, \qquad \forall x' \in E'.$$

La misurabilità di $E$ segue dal fatto che

$$\partial E \subset \Gamma(\alpha, E') \cup \Gamma(\beta, E') \cup \partial E \times [a, b]$$

e ognuno dei tre insiemi a destra è trascurabile.

Sappiamo quindi grazie alla Proposizione 6.9 che se $f : E \to \mathbb{R}$ è continua e limitata allora è Riemann integrabile su $E$; quindi per ogni rettangolo $E \subset R$ la funzione $\tilde{f} = f\mathbf{1}_E$ è Riemann integrabile su $R$ in quanto continua eccetto che sull'insieme trascurabile $\partial E$. Il rettangolo $R$ può essere preso nella forma $R = R' \times [a, b]$ e quindi la formula di riduzione data dalla Proposiizione 6.11, tenendo conto che per $x' \in R' \setminus E'$ $\tilde{f}(x', t) = 0$ per ogni $t \in [a, b]$, mentre per $x' \in E'$

$$\tilde{f}(x', t) = \begin{cases} f(x', t) & \text{se } \alpha(x') \le t \le \beta(x') \\ \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

diventa

$$\int_R f(x)dx = \int_{R'} dx' \int_a^b \tilde{f}(x', t)dt = \int_{E'} dx' \int_a^b \tilde{f}(x', t)dt = \int_{E'} dx' \int_{\alpha(x')}^{\beta(x')} \tilde{f}(x', t)dt.$$

□

**Osservazione 6.14** Il risultato precedente può essere generalizzato a funzioni $f : E \to \mathbb{R}$ che siano continue eccetto che in una quantità trascurabile di punti. Un insieme $E$ che si scrive come in (6.1) viene detto insieme normale rispetto al piano $t = 0$ o semplice in direzione $e_n$; si possono dare, con le ovvie notazioni, insiemi normali rispetto ad un qualsiasi piano o semplici in una qualsiasi direzione.

**Esempio 6.2** Per un insieme semplice la misura è data da

$$|E| = \int_{E'} \Big(\beta(x') - \alpha(x')\Big) dx';$$

nel caso particolare $\alpha(x') = 0$ troviamo quindi

$$|E| = \int_{E'} \beta(x')dx'$$

che lega l'integrale di una funzione con la misura del suo sottografico.

**Esempio 6.3** Calcoliamo l'integrale di $f(x,y) = x^2y^3$ sull'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Notiamo anzitutto che possiamo scrivere

$$\begin{aligned} E =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\} \\ =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\} \end{aligned}$$

e quindi $E$ è semplice sia in direzione $y$ che in direzione $x$. La funzione $f$ è continua, $E$ è misurabile e quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_E f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y^3 dy = \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2y^4}{4}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\ =& \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^2 dx \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} (x^2 - 2x^4 + x^6)dx \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{35 - 42 + 15}{105} = \frac{4}{105}. \end{aligned}$$

**Esempio 6.4** Calcoliamo l'integrale di $f(x,y,z) = x^2y^2z$ sull'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Possiamo scrivere

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \bar{B}_1(0,0), 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\},$$

quindi $E$ è semplice in direzione $z$ e quindi

$$\int_E x^2y^2z dxdydz = \int_{\bar{B}_1} dxdy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2y^2z dz = \frac{1}{2}\int_{\bar{B}_1} x^2y^2 1(1-x^2-y^2)s dxdy.$$

A questo punto non resta che calcolare l'integrale doppio sull'insieme semplice $\bar{B}_1$

$$\int_E x^2y^2z dxdydz = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2y^2(1-x^2-y^2)dy = \frac{1}{180} + \frac{\pi}{192}.$$

Prima di esporre l'integrazione per strati, introduciamo un pó di notazione. Un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^n$ è contenuto in una striscia del tipo

$$E \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [a,b];$$

per ogni $t \in [a,b]$ denotiamo con

$$E_t = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x',t) \in E\}.$$

L'insieme $E_t$ è la proiezione in $R^{n-1}$ dell'intersezione di $E$ con l'iperpiano $\{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = t\}$. Se l'insieme $E$ è misurabile, allora gli insiemi $E_t$ sono misurabili per $t \in [a,b]$ eccetto al più una quantità trascurabile di punti.

**Teorema 6.15 (Integrazione per "strati")** *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $E$ misurabile limitato; allora*

$$\int_E f(x)dx = \int_a^b dt \int_{E_t} f(x', t)dx' \tag{6.2}$$

Dimostrazione. Prendiamo un rettangolo $R = R' \times [a, b]$ con $E \subset R$; sappiamo che $f$ è Riemann integrabile su $E$ perchè la funzione $\tilde{f} = f\mathbf{1}_E$ è continua eccetto che nei punti di $\partial E$. Tenendo conto che per ogni $t \in [a, b]$ abbiamo che

$$\tilde{f}(x', t) = \begin{cases} f(x', t) & \text{se } x' \in E_t \\ \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

grazie alla Proposizione 6.11 troviamo che

$$\int_E f(x)dx \int_R \tilde{f}(x)dx = \int_a^b dt \int_{R'} \tilde{f}(x', t)dx' = \int_a^b dt \int_{E_t} f(x', t)dt.$$

$\square$

**Esempio 6.5** Notiamo che per la misura di un insieme vale la seguente formula ricorsiva

$$|E| = \int_a^b |E_t|dt,$$

che nel caso di insiemi $E \subset \mathbb{R}^3$ diventa

$$\mathrm{Vol}(E) = |E| = \int_a^b |E_t|dt = \int_a^b \mathrm{Area}(E_t)dt.$$

Nel caso particolare in cui

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\},$$

per ogni $z \in [-R, R]$ abbiamo che

$$E_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\}$$

è il cerchio di raggio $\sqrt{R^2 - z^2}$. Quindi

$$\mathrm{Vol}(\bar{B}_R) = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2)dz = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

**Esempio 6.6** Sia $f(x, y, z) = z$ ed $E$ il cono

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, h], x^2 + y^2 \leq \left(\frac{Rz}{h}\right)^2\right\}.$$

Allora $E_z = \bar{B}_{\frac{Rz}{h}}$ e quindi

$$\int_E z dx dy dz = \int_0^h dz \int_{E_z} z dx dy = \int_0^h z \mathrm{Area}(E_z)dz = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^3 dz = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

## 6.2 Cambiamenti di coordinate negli integrali multipli

Nella Sezione 3.3.1 abbiamo visto a definizione di cambiamento di coordinate; vediamo qui come utilizzare tali cambiamenti negli integrali multipli. Scriveremo una formula che generalizza il metodo di sostituzione, giá visto per le funzioni di una variabile, alle funzioni di più variabili.

**Osservazione 6.16** Abbiamo dato la definizione di integrale di Riemann partendo dai rettangolo e dalle sue partizioni mediante rettangoli. Si può dimostrare che gli integrali di Riemann inferiore e superiore possono essere definiti anche mediante partizioni arbitrarie fatte con insiemi misurabili. Dato un insieme misurabile $E$, per partizione misurabile di $E$ intendiamo una famiglia $\mathscr{P}_m = \{E_1, \dots, E_m\}$ di insiemi misurabili tali che

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i, \qquad |E_i \cap E_j| = 0 \text{ se } i \neq j.$$

Si definiscono in modo ovvio le somme di Riemann inferiore $s(f, \mathscr{P}_m)$ e superiore $S(f, \mathscr{P}_m)$ di una funzione limitata $f : E \to \mathbb{R}$ ed avremo che

$$\underline{\int_E} f(x)dx = \sup_{\mathscr{P}_m \subset E} s(f, \mathscr{P}_m), \qquad \overline{\int_E} f(x)dx = \inf_{\mathscr{P}_m \subset E} S(f, \mathscr{P}_m).$$

Avremo quindi che una funzione è Riemann integrabile su $E$ se e solo se

$$\underline{\int_E} f(x)dx = \overline{\int_E} f(x)dx$$

ed in tal caso il valore comune coincide con $\int_E f(x)dx$.

**Teorema 6.17 (Cambiamento di variabili negli integrali multipli)** *Siano $E$ ed $E'$ sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$ e sia $F : E \to E'$ un diffeomorfismo globale secondo la definizione 3.18. Se $f : E \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile su $E$, allora la funzione $\tilde{f} : E' \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(u) = f(F^{-1}(u))$ è Riemann integrabile su $E'$ e*

$$\int_E f(x)|\det JF(x)|dx = \int_{E'} \tilde{f}(u)du.$$

Dimostrazione.[Cenno] La dimostrazione di questo teorema è piuttosto elaborata; vediamo qui solo il caso $n = 2$ con $F$ applicazione affine

$$F(x) = A \cdot x + b, \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, b \in \mathbb{R}^2;$$

supponiamo inoltre che $E$ sia un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$,

Notiamo anzitutto che se $R = [a, b] \times [c, d]$ è un rettangolo, allora l'insieme $\tilde{R} = F(R)$ è un parallelogramma di area

$$\begin{aligned}\text{Area}(F(R)) =& \|(F(b, c) - F(a, c), 0) \times (F(a, d) - F(a, c), 0)\| \\ =& \|(Ae_1, 0) \times (Ae_2, 0)\|(b - a)(d - c) = |\det A| \cdot |R|.\end{aligned}$$

Come primo risultato si ottiene che se $E$ è misurabile, allora anche $\tilde{E} = F(E)$ è misurabile. Infatti, se

$$\partial E \subset \bigcup_{i=1}^{m} R_i, \qquad \sum_{i=1}^{m} |R_i| < \varepsilon,$$

allora

$$\partial\tilde{E} \subset \bigcup_{i=1}^{m} F(R_i), \qquad \sum_{i=1}^{m} |F(R_i)| < \varepsilon |\mathrm{det} A|,$$

da cui la trascurabilità di $\partial\tilde{E}$.

Definiamo ora la funzione $\tilde{f} : E' \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(u,v) = f(F^{-1}(u,v))$ in modo si abbia $f(x,y) = \tilde{f}(F(x,y))$; la funzione $\tilde{f}$ è continua e quindi Riemann integrabile su $\tilde{E}$.

Fissiamo la partizione $\mathscr{P} = \{\{t_0,\ldots,t_h\},\{s_0,\ldots,s_k\}\}$; tale partizione induce una partizione $\mathscr{P}_F$ di $E$ mediante gli insiemi $F(R_{ij})$, $R_{ij} = [t_{i-1},t_i] \times [s_{j-1},s_j]$. Abbiamo quindi che

$$s(\tilde{f},\mathscr{P}_F) = \sum_{(i,j)} \inf_{\tilde{R}_{ij}} \tilde{f} |\tilde{R}_{ij}| = |\mathrm{det} A| \sum_{(i,j)} \inf_{R_{ij}} f |R_{ij}|.$$

Passando all'estremo superiore delle partizioni e usando il fatto che sia $f$ che $\tilde{f}$ sono Riemann integrabili, si ottiene quindi che

$$\int_{\tilde{E}} \tilde{f}(u,v)dudv = |\mathrm{det} A| \int_E f(x,y)dxdy = \int_E f(x,y)|\mathrm{det} JF(x,y)|dxdy.$$

Il caso generale si ottiene utilizzando la formula di Taylor del primo ordine che per $(x,y) \in R_{ij}$ si scrive come

$$F(x,y) = F(t_{i-1},s_{j-1}) + JF(t_{i-1},s_{j-1})(x - t_{i-1}, y - s_{j-1}) + o(\|(t_i - t_{i-1}, s_j - s_{j-1})\|.$$

$\square$

Come abbiamo già detto nella Sezione 3.3.1, i cambiamenti di variabili più comuni sono le trasformazioni in coordinate polari nel piano e quelle cilindriche e sferiche nello spazio.

**Esempio 6.7** Supponiamo di voler calcolare

$$\int_E xdxdy$$

con $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 - 2x \le 0\}$. Passiamo in coordinate polari, considerando la funzione

$$F(\varrho,\vartheta) = (\varrho\cos\vartheta, \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta);$$

$\tilde{E} = F^{-1}(E)$ è l'insieme (basta sostituire $x$ ed $y$ con $\varrho\cos\vartheta$ e $\varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$ nella definizione di $E$)

$$\tilde{E} = \{(\varrho,\vartheta) : -\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2, 0 \le \varrho \le 2\cos\vartheta\}.$$

Tenendo presente che $|\mathrm{det} JF(\varrho,\vartheta)| = \varrho$, si ricava

$$\begin{aligned}\int_E xdxdy = &\int_{E'} \varrho\cos\vartheta\varrho d\varrho d\vartheta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\cos\vartheta} \varrho^2\cos\vartheta d\varrho \\ =&\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\vartheta d\vartheta = \pi.\end{aligned}$$

**Esempio 6.8** Riprendiamo l'Esempio 6.6 e passiamo alle coordiinate cilindriche nello spazio; abbiamo quindi il diffeomorfismo

$$F(\varrho,\vartheta,t) = (\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta, t);$$

l'insieme $\tilde{E} = F^{-1}(E)$ è dato da

$$\tilde{E} = \left\{(\varrho,\vartheta,t) : t \in [0,h], 0 \le \varrho \le \frac{Rt}{h}, \vartheta \in [0,2\pi]\right\}.$$

Tenendo presente che $|\det JG(\varrho,\vartheta,t)| = \varrho$, troviamo che

$$\begin{aligned}\int_E z dxdydz =& \int_{\tilde{E}} t\varrho d\varrho d\vartheta dt = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^h dt \int_0^{\frac{Rt}{h}} t\varrho d\varrho \\ =&\pi \int_0^h \frac{R^2t^3}{h^2} dt = \frac{\pi R^2 h}{3}.\end{aligned}$$

**Esempio 6.9** Calcoliamo l'integrale di $f(x,y,z) = x^2$ su $E = B_R$. Passando alle coordinate sferiche

$$F(\varrho,\vartheta,\varphi) = (\varrho\cos\vartheta\sin\varphi, \varrho\sin\vartheta\sin\varphi, \varrho\cos\varphi),$$

troviamo che $\tilde{E} = F^{-1}(E)$ è dato da

$$\tilde{E} = \{(\varrho,\vartheta,\varphi) : \varrho \in [0,R], \vartheta \in [0,2\pi], \varphi \in [0,\pi].$$

Sapendo che $|\det JF(\varrho,\vartheta,\varphi)| = \varrho^2 \sin\varphi$ e quindi

$$\begin{aligned}\int_E x^2 dxdydz =& \int_{\tilde{E}} \varrho^4 \cos^2\vartheta \sin^3\varphi d\varrho d\vartheta d\varphi \\ =& \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R \varrho^4\cos^2\vartheta\sin^3\varphi d\varrho = \frac{4\pi R^5}{15}.\end{aligned}$$

**Esempio 6.10** Con l'integrazione per strati e con opportuni cambi di coordinate si può calcolare in modo induttivo la misura della palla $n$–dimensionale di raggio $R$. Se poniamo

$$\omega_n = |B_1|,$$

vale la seguente identità

$$|B_R| = \omega_n R^n$$

che segue dal fatto che $B_R = F(B_1)$ con $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = Rx$. Infatti in tal caso $|\det JF(x)| = R^n$ e quindi

$$|B_R| = \int_{B_R} dx = \int_{B_1} R^n dx = \omega_n R^n.$$

Si ottene la seguente formula ricorsiva; dato che

$$E = B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n-1^2+} x_n^2 < 1\}$$

e per $x_n \in (-1,1)$

$$\begin{aligned}E_{x_n} =& \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2 < 1\} \\ =& \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < 1 - x_n^2\} = B_{\sqrt{1-x_n^2}}\end{aligned}$$

si trova che

$$|B_1| = \int_{-1}^1 |E_{x_n}| dx_n = \omega_{n-1} \int_{-1}^1 (1-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_n = \omega_{n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt.$$

I valori di $\omega_n$ per $n = 1,2,3,4$ sono dati da

$$\omega_1 = 2, \qquad \omega_2 = \pi, \qquad \omega_3 = \frac{4\pi}{3}, \qquad \omega_4 = \frac{\pi^2}{2}.$$

Esiste una formula chiusa che è data da

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

dove $\Gamma$ è la funzione Gamma di Eulero definita da

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

### 6.2.1 Solidi di rotazione

Come applicazione della formula di cambio di variabili nello spazio mediante le coordinate cilindriche si possono calcolare i volumi dei solidi di rotazione.

Ci sono due modi per costruire solidi di rotazione. Il primo, data una funzione $f : [a,b] \to [0,+\infty)$, si definisce l'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a,b], x^2+y^2 \leq f(z)^2\}.$$

In coordinate cilindriche tale insieme diventa

$$\tilde{E} = \{(\varrho,\vartheta,t) : t \in [a,b]\vartheta \in [0,2\pi], \varrho \in [0,f(t)]\}.$$

Otteniamo la formula di Pappo

$$\mathrm{Vol}(E) = |E| = \int_E dxdydz = \int_{\tilde{E}} \varrho d\varrho d\vartheta dt = \int_a^b dt \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{f(t)} \varrho d\varrho = \pi \int_a^b f(t)^2 dt.$$

A tale formula si poteva anche arrivare notando che per ogni $z \in [a,b]$, $E_z$ è il cerchio di raggio $f(z)$ e quindi con l'integrazione per strati

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_a^b \mathrm{Area}(E_z)dz = \pi \int_a^b f(z)^2 dz.$$

Un secondo modo per ottenere solidi di rotazione è considerare due funzioni continue $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $[a,b] \subset [0,+\infty)$, $g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ e definire

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \in [a,b], g(\sqrt{x^2+y^2}) \leq z \leq f(\sqrt{x^2+y^2})\}.$$

In coordinate cilindriche tale insieme diventa

$$\tilde{E} = \{(\varrho,\vartheta,t) : \varrho \in [a,b], \vartheta \in [0,2\pi], g(\varrho) \leq z \leq f(\varrho)\},$$

e quindi

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_{\tilde{E}} \varrho d\varrho d\vartheta dt = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_a^b d\varrho \int_{g(\varrho)}^{f(\varrho)} \varrho dt = 2\pi \int_a^b \varrho(f(\varrho)-g(\varrho))d\varrho.$$

## 6.3 Insiemi misurabili illimitati e integrali generalizzati

Abbiamo fino ad ora considerato l'integrale di Riemann di una funzione limitata su un insieme misurabile limitato; vogliamo generalizzare tale nozione sia a funzioni illimitate che ad insiemi illimitati.

Iniziamo con la seguente definizione.

**Definizione 6.18** *Un insieme illimitato $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice misurabile se esiste una successione $\{E_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ crescente di insiemi misurabili limitiati contenuti in $E$ tali che l'insieme*

$$A = E \setminus \bigcup_{h\in\mathbb{N}} E_h$$

*è trascurabile. In tal caso si pone*

$$|E| = \lim_{h\to+\infty} |E_h|.$$

**Osservazione 6.19** Aver preso gli insiemi $E_h$ crescenti implica che la successione numerica $|E_h|$ è monotona non decrescente e quindi il limite che definisce $|E|$ è ben definito. Si vede inoltre che la misurabilità e la misura dii $E$ non dipendono dalla successione $\{E_h\}_{h\in\mathbb{N}}$, nel senso che se $\{E'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un'altra successione di insiemi misurabiili limitati crescenti contenuti in $E$ tali che

$$B = E \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E'_k$$

è trascurabile, allora

$$\lim_{k\to+\infty} |E'_k| = \lim_{h\to+\infty} |E_h|.$$

**Esempio 6.11** L;insieme $E = \mathbb{R}^n$ è misurabile in quanto

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} B_h$$

e la sua misura è infinita

$$|\mathbb{R}^n| = \lim_{h\to+\infty} |B_h| = \lim_{h\to+\infty} \omega_b h^n = +\infty.$$

**Esempio 6.12** Un esempio di insieme misurabile illimitato è dato da

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\right\}.$$

Come insiemi misurabili limitati si possono prendere gli insiemi

$$E_h = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{h} \le x \le h, 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\right\}$$

che sono insiemi semplici crescenti, contenuti in $E$ e con

$$A = E \setminus \bigcup_{h\in\mathbb{N}} E_h = \emptyset;$$

già questo argomento mostra la misurabilitè di $E$. Per determinare la sua misura, calcoliamo la misura degli $E_h$:

$$|E_h| = \int_{\frac{1}{h}}^{h} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{h}-\frac{1}{2})\right) - \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{h}}-\frac{1}{2})\right)\right).$$

In definitiva

$$|E| = \lim_{h\to+\infty} |E_h| = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Una volta data la nozione di insieme misurabile possiamo dare la definizione di integrale generalizzato.

**Definizione 6.20** *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione con $E$ insieme misurabile. Diremo che $f$ è assolutamente integrabile in senso generalizzato se esiste una successione crescente di insiemi misurabili limitati $\{E_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ contenutii in $E$ tali che*

$$A = E \setminus \bigcup_{h\in\mathbb{N}} E_h$$

*trascurabile, $f$ limitata, $f$ e $|f|$ Riemann integrabili su $E_h$ e*

$$\sup_{h\in\mathbb{N}} \int_{E_h} |f(x)|dx < +\infty. \tag{6.3}$$

*In tal caso l'integrale di $f$ su viene definito come*

$$\int_E f(x)dx = \lim_{h\to+\infty} \int_{E_h} f(x)dx. \tag{6.4}$$

**Osservazione 6.21** La condiizione (6.3) serve a garantire la buona definizione dell'integrale definito in (6.4). Infatti la condizione $E_h \subset E_{h+1}$ serve per dire che la successione numerica

$$a_h := \int_{E_h} |f(x)|dx$$

è monotona non decrescente e convervente ad un limite finito $\ell$; tale limite non è altro che l'integrale di $|f|$ su $E$,

$$\int_E |f(x)|dx = \lim_{h\to+infty} \int_{E_h} |f(x)|dx = \ell,$$

e quindi

$$\lim_{h\to+\infty} \int_{E\setminus E_h} |f(x)|dx = \lim_{h\to+\infty} \; int_E|f(x)|dx - \int_{E_h} |f(x)|dx = 0.$$

Se ora $\{E'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un'altra successione di insiemi misurabili limitati monotoni contenuti in $E$, la stima

$$\int_{E'_k} |f(x)|dx \le \int_E |f(x)|dx$$

implica che

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{E'_k} |f(x)|dx \le \ell,$$

da cui il fatto che

$$\exists \lim_{k\to+\infty} \int_{E'_k} |f(x)|dx \le \ell.$$

Dal fatto che

$$\int_{E_h} |f(x)|dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{E_h\cap E'_k} |f(x)|dx \le \lim_{k\to+\infty} \int_{E'_k} |f(x)|dx$$

segue anche che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{E'_k} |f(x)|dx = \ell.$$

Infine la stima

$$\left| \int_{E'_k} f(x)dx - \int_{E_h} f(x)dx \right| \le \int_{E'_k\setminus E_h} |f(x)|dx + \int_{E_h\setminus E'_k} |f(x)|dx$$

implica, passando al limite $k \to +\infty$

$$\begin{aligned} \left| \lim_{k\to+\infty} \int_{E'_k} f(x)dx - \int_{E_h} f(x)dx \right| &\le \lim_{k\to+\infty} \left( \int_{E'_k\setminus E_h} |f(x)|dx + \int_{E_h\setminus E'_k} |f(x)|dx \right) \\ &= \int_{E\setminus E_h} |f(x)|dx. \end{aligned}$$

Passando infine al limite $h \to +\infty$ se ne deduce che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{E'_k} f(x)dx = \lim_{h\to+\infty} \int_{E_h} f(x)dx.$$

**Esempio 6.13** Usando gli integrali generalizzati si può calcolare il valore dell'integrale della Gaussiana

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

Infatti se consideriamo in $\mathbb{R}^2$ l'integrale generalizzato di $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, usando gli insiemi $E_h = B_h$, troviamo che, passando alle coordinate polari

$$\int_{B_h} e^{-x^2-y^2} dxdy = 2\pi \int_0^h \varrho e^{-\varrho^2} d\varrho = \pi(1 - e^{-h^2}) \le \pi.$$

Quindi la funzione è assolutamente integrabile in senso generalizzato e

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{h\to+\infty} \int_{B_h} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{h\to+\infty} \pi(1 - e^{-h^2}) = \pi.$$

Per il calcolo della Gaussiana, notiamo che $B_h \subset Q_h \subset B_{h\sqrt{2}}$ e quindi

$$\int_{B_h} e^{-x^2-y^2} dxdy \le \int_{Q_h} e^{-x^2-y^2} dxdy \le \int_{B_{h\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dxdy,$$

da cui il fatto che

$$\lim_{h\to+\infty} \int_{Q_h} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi.$$

Notando infine che

$$\int_{Q_h} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{-h}^{h} e^{-x^2} dx \int_{-h}^{h} e^{-y^2} dy = \left( \int_{-h}^{h} e^{-x^2} dx \right)^2,$$

si conclude che

$$\int_R e^{-x^2} dx = \lim_{h\to+\infty} \int_{-h}^{h} e^{-x^2} dx = \lim_{h\to+\infty} \sqrt{\int_{Q_h} e^{-x^2-y^2} dxdy} = \sqrt{\pi}.$$

**Esempio 6.14** Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ la funzione $f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha$ e studiamo la sua integrabilità generalizzata in $E = B_1$ e $E = B_1^c$. Nel primo caso, considerando gli insiemi $E_h = B_1 \setminus B_{1/h}$, si trova che $f$ è assolutamente integrabile in senso generalizzato su $B_1$ se e solo se $\alpha > -1$ e

$$\int_{B_1} (x^2 + y^2)^\alpha = \frac{\pi}{\alpha + 1}.$$

Nel secondo caso, considerando $E_h = B_h \setminus B_1$ si trova che $f$ è assolutamente integrabile in senso generalizzato se e solo se $\alpha < 1$ e

$$\int_{B_1^c} (x^2 + y^2)^\alpha = -\frac{\pi}{\alpha + 1}.$$

**Esempio 6.15** Ripetendo l'esempio precedente in $\mathbb{R}^3$ con la funzione $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$, si trova che $f$ è assolutamente integrabile in senso generalizzato su $B_1$ se e solo se $\alpha > -\frac{3}{2}$ e

$$\int_{B_1} (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha dxdydz = \frac{4\pi}{2\alpha + 3},$$

mentre $f$ è assolutamente integrabile in senso generalizzato su $B_1^c$ se e solo se $\alpha < -\frac{3}{2}$ e

$$\int_{B_1^c} (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha dxdydz = -\frac{4\pi}{2\alpha + 3}.$$

Si possono ripetere questi esempi in generale in $\mathbb{R}^n$ con $f(x) = \|x\|^{2\alpha}$ e si trova l'assoluta integrabilità in senso generalizzato su $B_1$ se e solo se $\alpha > -\frac{n}{2}$, mentre è assolutamente integrabile in senso generalizzato su $B_1^c$ se e solo se $\alpha < -\frac{n}{2}$.

## 6.4 Derivazione sotto il segno di integrale

In alcune applicazioni si può avere a che fare con funzioni $f : E \times [a, b] \to \mathbb{R}$ con $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile; supponendo che gli integrali che scriveremo siano ben definiti, si può definire la funzione $g : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$g(t) = \int_E f(x, t)dx.$$

Ha senso chiedersi quando la funzione $g$ è derivabile e sotto quali ipotesi vale la regola di derivazione

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \int_E f(x, t)dx = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)dx.$$

Ci sono varie versioni di teoremi che garantiscono la validità dell'identità precedente; ne presentiamo qui una, che non dimostreremo.

**Teorema 6.22** *Sia $f : E \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una funziona continua su $E \times [a,b]$ con $\frac{\partial f}{\partial t}$ continua su $E \times [a,b]$, $E \subset \mathbb{R}^n$ insieme compatto e misurabile. Allora vale l'dentità*

$$\frac{d}{dt}\int_E f(x,t)dx = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx. \tag{6.5}$$

**Esempio 6.16** Supponiamo di voler calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx.$$

Consideriamo a tal fine la funzione

$$f(x,t) = \frac{1}{t^2+x^2}$$

definita ad esempio su $E = [-h,h] \times [0,1]$. La funzione $f$ è continua così come la sua derivata

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = -\frac{2t}{(t^2+x^2)^2}.$$

Applicando la relazione (6.5) troviamo che

$$\frac{d}{dt}\int_{-h}^{h} \frac{1}{t^2+x^2}dx = -\int_{-h}^{h} \frac{2t}{(t^2+x^2)}dx.$$

Dato che

$$\int_{-h}^{h} \frac{1}{t^2+x^2}dx = \frac{2}{t}\arctan\left(\frac{h}{t}\right),$$

se ne deduce che

$$\int_{-h}^{h} \frac{1}{(t^2+x^2)^2}dx = \frac{1}{t^3}\arctan\frac{h}{t} + \frac{2h}{t^2(t^2+h^2)}.$$

Passando infine al limite $h \to +\infty$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2t^3}.$$

e ponendo $t = 1$ si trova

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

# Bibliografia


[1] Michiel Bertsch, Roberta Dal Passo, Lorenzo Giacomelli *Analisi matematica.* McGraw-Hill Education, 2014.

[2] Marco Bramanti, Sandro Pagani, Carlo Domenico Salsa. *Matematica: calcolo infinitesimale e algebra lineare.* Zanichelli, 2004.

[3] Marco Bramanti, Sandro Pagani, Carlo Domenico Salsa. *Analisi Matematica 2.* Zanichelli, 2009.

[4] Enrico Giusti. *Analisi Matematica vol 2.* Progr. Matem. Fisica Elettronica. Boringhieri, 2003.