Facoltà di Ingegneria,

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 17 gennaio 2011

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x^3 + y^3(x)}{xy^2(x)} \\ \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2 Si verifichi che la la mappa $r : [0, 2\pi)^2 \to \mathbb{R}^3$

$$r(s,t) = ((3 + 2\cos s)\cos t, (3 + 2\cos s)\mathrm{sen}\, t, \mathrm{sen}\, s)$$

parametrizza una superficie regolare Σ; si determino quindi i valori di s e t per cui $r(s,t) = (2, 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e si scrivano infine le equazioni del piano tangente e della retta normale nel punto $(2, 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ a Σ.

Esercizio 3 Trovare e classificare i punti stazionari liberi della funzione

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz.$$

Esercizio 4 Si determini il flusso del campo vettoriale definito da $F(x,y,z) = (z, x^2y, y^2z)$ uscente dalla superficie laterale dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :, 2\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 + x^2 + y^2, z \leq 2\}.$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x^2 - 3)^n.$$

Detta poi $f(x)$ la somma della serie, si studi $f'(x)$, se ne calcoli esplicitamente il suo valore e da questo si deduca il valore di $f(x)$.

Soluzione 1 Ci sono due modi per risolvere l'equazione differenziale assegnata; il primo consiste nel scrivere

$$y'(x) = \frac{1 + (\frac{y(x)}{x})^3}{(\frac{y(x)}{x})^2}$$

in modo da riconoscere un'equazione omogenea. In questo caso si pone $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, da cui $y'(x) = xz'(x) + z(x)$. Si ottiene quindi l'equazione

$$xz'(x) + z(x) = \frac{1 + z^3(x)}{z^2(x)},$$

cioè l'equazione

$$z'(x) = \frac{1}{xz^2(x)}.$$

Tenendo presente che $z(1) = 1$ arriviamo alla soluzione

$$z(x) = \sqrt[3]{1 + \log x^3}.$$

In definitiva, per $y(x)$ troviamo l'espressione

$$y(x) = xz(x) = x\sqrt[3]{1 + \log x^3}. \tag{1}$$

In alternativa, si poteva scrivere

$$y'(x) = +\frac{y(x)}{x} + \frac{x^2}{y(x)^2};$$

riconosciamo quindi un'equazione di tipo Bernoulli con $\alpha = -2$. Moltiplicando l'equazione per $y(x)^2$ si arriva all'espressione

$$y(x)^2 y'(x) = \frac{y^3(x)}{x} + x^2.$$

Se si pone $v(x) = y(x)^3$, si giunge all'equazione

$$v'(x) = \frac{3}{x}v(x) + 3x^2,$$

che è un'equazione lineare in $v(x)$, con la condizione iniziale $v(1) = 1$. Per tale equazione usiamo la formula risolutiva

$$v(x) = e^{A(x)}\left(1 + \int_1^x e^{-A(t)}3t^2 dt\right), \qquad A(x) = \int_1^x \frac{3}{t}dt = \log x^3.$$

Si ottiene per $v(x)$ l'espressione

$$v(x) = x^3(1 + \log x^3),$$

da cui ancora l'epressione (1) per la $y(x)$.

Soluzione 2 Si nota anzitutto che la condizione $r(s,t) = (2, 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ è soddisfatta per $s = t = \frac{\pi}{3}$. Per verificare che r sia una parametrizzazione regolare, notiamo che r è di classe C^1; resta da verificare che $r_s(s,t) \times r_t(s,t)$ sia sempre un vettore non nullo. Con calcoli diretti si trova che

$$r_s(s,t) \times r_t(s,t) = (3 + 2\cos s)(-\cos s \cos t, -\cos s \operatorname{sen} t, -2\operatorname{sen} s).$$

Tale vettore si vede subito che non si annulla mai in quanto

$$\|r_s(s,t) \times r_t(s,t)\| = (3 + 2\cos s)\sqrt{1 + 3\text{sen}^2 s}.$$

La condizione $r(s,t) = (2, 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ è soddisfatta per $s = t = \frac{\pi}{3}$; valutando $r_s(s,t) \times r_t(s,t)$ per $s = t = \frac{\pi}{3}$ troviamo il vettore $(-1, -\sqrt{3}, -4\sqrt{3})$; la retta normale sarà quindi parametrizzata da

$$\varphi(t) = (2, 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}) + t(-1, -\sqrt{3}, -4\sqrt{3}),$$

cioè, passando alla forma cartesiana,

$$\begin{cases} x\sqrt{3} - y = 0 \\ 8x\sqrt{3} - 2z = 15\sqrt{3}. \end{cases}$$

Il piano tangente invece sarà descritto dall'equazione

$$(-1, -\sqrt{3}, -4\sqrt{3})(x - 2, y - 2\sqrt{3}, z - \frac{\sqrt{3}}{2}),$$

cioè dall'equazione

$$x + y\sqrt{3} + 4z\sqrt{3} = 14.$$

Soluzione 3 La funzione data è di classe C^1 sull'insieme

$$E = \mathbb{R}^3 \setminus (\{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{z = 0\})$$

che è $\mathbb{R}^3$ privato dei tre assi cartesiani; il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{1}{x^2} + yz, -\frac{1}{y^2} + xz, -\frac{1}{z^2} + xy\right).$$

Il sistema $\nabla f(x,y,z) = 0$ ha come soluzione i due punti $(1,1,1)$ e $(-1,-1,-1)$. Per la classificazione, calcoliamo la matrice Hessiana

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & z & y \\ z & \frac{2}{y^3} & x \\ y & x & \frac{2}{z^3} \end{pmatrix}.$$

In $(1,1,1)$ tale matrice diventa

$$A = Hf(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

dato che $A_1 = 2 > 0$, $\det A_2 = 3 > 0$ e $\det A = 4 > 0$, se ne deduce che A è definita positiva e quindi il punto $(1,1,1)$ è un punto di minimo locale stretto. Per quanto riguarda il punto $(-1,-1,-1)$ si ha che $Hf(-1,-1,-1) = -A$, e quindi la matrice è definita negativa, da cui il fatto che $(-1,-1,-1)$ è un punto di massimo locale stretto.

Soluzione 4 Per calcolare il flusso uscente dalla superficie laterale di E utilizziamo il Teorema della divergenze;

$$\begin{aligned}\Phi(F,\partial E)=&\int_E \operatorname{div}F(x,y,z)dxdydz=\int_E (x^2+y^2)dxdydz\\ =&\int_{\{x^2+y^2\le 1\}} dxdy\int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{1+x^2+y^2}(x^2+y^2)dz\\ =&\int_{\{x^2+y^2\le 1\}}(x^2+y^2)(1+x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2})dxdy\\ =&2\pi\int_0^1 \varrho^2(1+\varrho^2-2\varrho)\varrho d\varrho=\frac{\pi}{30}.\end{aligned}$$

Soluzione 5 Poniamo $y=x^2-3$ ed otteniamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}y^n;$$

questa è una serie di potenze in y con coefficienti $a_n=\frac{1}{n}$. Siccome

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=1,$$

se ne deduce che il raggio di convergenza è 1; siccome per $y=1$ la serie non converge (si riduce alla serie armonica che diverge), mentre converge per $y=-1$ (si riduce alla serie a segni alterni), si trova che l'insieme di convergenza puntuale, in y è dato da $y\in[-1,1)$. Si avrà convergenza uniforme per $y\in[-1,a]$, per ogni $0<a<1$, mentre si avrà convergenza totale per $y\in[b,a]$ con $-1<b\le a<1$. Per calcolare la somma $g(y)$ della serie precedente, si nota che, dato che si ha convergenza uniforme in $[-1,a]$ per ogni $a<1$, la funzione è derivabile in $[-1,1)$ con

$$g'(y)=\sum_{n=1}^{\infty}y^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}y^n=\frac{1}{1-y},$$

da cui il fatto che

$$g(y)=g(0)+\int_0^y g'(t)dt=\int_0^y\frac{1}{1-t}=-\log(1-y)=\ln\frac{1}{1-y}.$$

Tale identità è valida per $y\in(-1,1)$ perchè abbiamo dovuto usare i Teoremi di derivazione per serie e di integrazione per serie. Si nota però che la convergenza uniforme nella variabile y nell'intervallo $[-1,1)$ implica la continuità di g in $[-1,1)$. Essendo anche la funzione $\ln\frac{1}{1-y}$ continua in $y=2$ se ne deduce che

$$\ln\frac{1}{2}=\lim_{y\to-1^-}\ln\frac{1}{1-y}=\lim_{y\to-1^-}g(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Passando alla variabile x, le condizioni da soddisfare sono $-1\le x^2-3<1$, da cui $2\le x^2<4$; si avrà quindi convergenza puntuale per

$$x\in(-2,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},2),$$

convergenza uniforme per

$$x\in[-a,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},a],\qquad \forall\sqrt{2}\le a<2$$

e convergenza totale per

$$x \in [-b, -a] \cup [a, b), \qquad \forall \sqrt{2} < a \leq b < 2.$$

Tenendo presente poi che $f(x) = g(x^2 - 3)$, si ricava che

$$f(x) = -\log(4 - x^2), \qquad \sqrt{2} \leq |x| < 2.$$

Facoltà di Ingegneria,

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 15 febbraio 2011

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + \dfrac{y'(x)}{1+x} = x^2 \\ \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 Dato l'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x^2+y^2} - x\cos z + z^2 = 2\},$$

si dica se il punto $(0, 0, 1)$ appartiene ad E e se in tale punto sono verificate le condizioni del teorema della funzione implicita. Si scrivano quindi le equazioni della retta normale e del piano tangente ad E in $(0, 0, 1)$.

Esercizio 3 Determinare il cono retto a base circolare di volume massimo inscrivibile nella sfera di raggio 1.

(Sugg; Si disegni il cono di raggio di base r, altezza h, con vertice nel punto $(0, 0, 1)$ e cerchio di base ottenuto intersecando la sfera col piano orizzontale $z = 1 - h$)

Esercizio 4 Si dica se l'insieme illimitato definito da

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{1}{(1 + \sqrt{x^2 + y^2})^3} \right\}$$

è misurabile; se ne determini quindi il volume.

Esercizio 5 Dopo aver scritto la serie di Taylor centrata in 0 della funzione $f(x) = e^{-x^2}$, si scriva lo sviluppo in serie della funzione degli errori di Gauss definita da

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Si discutano le varie convergenze e si motivino le risposte.

Soluzione 1 L'equazione data è un'equazione differenziale del secondo ordine lineare completa a coefficienti non costanti; può essere ridotta ad una equazione del primo ordine data la non dipendenza esplicita da y ponendo $v(x) = y'(x)$. Si giunge quindi al Problema di Cauchy per v dato da

$$\begin{cases} v'(x) + \frac{v(x)}{1+x} = x^2 \\ \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

L'equazione è lineare del primo ordine con coefficienti $a(x) = \frac{1}{x+1}$ e $b(x) = x^2$, definiti in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; il dato iniziale è dato per $x_0 = 0$, quindi il problema va risolto nell'intervallo $(-1, +\infty)$. Ponendo

$$A(x) = \int_0^x a(t)dt = \log(1+x),$$

la soluzione del problema sarà data da

$$v(x) = e^{-A(x)} \left(v(0) + \int_0^x e^{A(t)} b(t) dt \right) = \frac{x^4}{4(x+1)} + \frac{x^3}{3(x+1)}.$$

La soluzione y si otterrà quindi integrando l'espressione trovata,

$$y(x) = y(0) + \int_0^x v(t)dt = 1 + \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{24} + \frac{x}{12} - \frac{1}{12}\log(1+x).$$

Soluzione 2 Sostituendo i valori $(0,0,1)$ nella funzione

$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2} - x\cos z + z^2 - 2$$

si vede subito che $f(0,0,1) = 0$. Inoltre, dato che

$$\nabla f(x,y,z) = (2xe^{x^2+y^2} - \cos z, 2ye^{x^2+y^2}, x\sin z + 2z)$$

e si ricava che

$$\nabla f(0,0,1) = (-\cos 1, 0, 2) \neq (0,0,0),$$

quindi il Teorema della funzione implicita si applica e localmente E intorno a $(0,0,1)$ può essere visto come grafico sia rispetto ad x che rispetto a z. La retta normale sarà parametrizzata da

$$r(t) = (0,0,1) + t(-\cos 1, 0, 2) = (-t\cos 1, 0, 1+2t),$$

che in forma cartesiana può essere anche scritta come

$$\begin{cases} y = 0 \\ \\ 2x + z\cos 1 = \cos 1. \end{cases}$$

L'equazione del piano tangente invece sarà data da

$$-x\cos 1 + 2z = 2.$$

Soluzione 3 Stiamo considerando un cono con vertice in $(0,0,1)$, altezza h e raggio di base r; il cerchio di base si ottiene intersecando la sfera di raggio 1 con il piano $z = 1 - h$. Le due variabili r ed h sono quindi soggette al vincolo

$$r^2 + (1-h)^2 = 1$$

e il problema è la massimizzazione della funzione volume

$$V(r,h) = \frac{\pi h r^2}{3}$$

con tale vincolo. Introduciamo quindi la funzione di Lagrange

$$F(r,h,\lambda) = \frac{\pi h r^2}{3} - \lambda \left(r^2 + (1-h)^2 - 1 \right).$$

Imponendo le condizioni di punto stazionario vincolato si trovano le equazioni

$$\begin{cases} \frac{2\pi h r}{3} - 2\lambda r = 0 \\ \frac{\pi r^2}{3} + 2\lambda(1-h) = 0 \\ r^2 + (1-h)^2 = 1. \end{cases}$$

Tale sistema ha per soluzioni

$$r = h = 0, \lambda = 0, \qquad r = 0, h = 2, \lambda = 0,$$

e

$$r = \frac{2\sqrt{2}}{3}, h = \frac{4}{3}, \lambda = \frac{4\pi}{9}.$$

Nei primi due casi il volume è zero, mentre nell'ultimo caso il volume è dato da

$$V = \frac{32}{81}\pi$$

che sarà quindi il massimo volume.

Soluzione 4 L'insieme dato può essere scritto come unione

$$E = \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h$$

con E_h insiemi invadenti dati da

$$E_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq h^2, 0 \leq z \leq \frac{1}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^3}\}$$

insiemi limitati misurabili. Quindi E è misurabile; siccome

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(E_h) &= \int_{B_h} dxdy \int_0^{\frac{1}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^3}} dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^h d\varrho \frac{\varrho}{(1+\varrho)^3} \\ &= \left[-\frac{1}{1+\varrho} + \frac{1}{2(1+\varrho)^2} \right]_0^h \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+h} + \frac{1}{2(1+h)^2} \right). \end{aligned}$$

Siccome $\mathrm{Vol}(E_h) \to \pi$ per $h \to +\infty$, ne segue che

$$\mathrm{Vol}(E) = \pi.$$

Soluzione 5 Possiamo utilizzare lo sviluppo in serie della funzione esponenziale

$$e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!};$$

la convergenza è per ogni $y \in \mathbb{R}$ con convergenza totale e uniforme sugli insiemi chiusi e limitati. Ponendo $y = -x^2$, si trova che

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}.$$

Dato che si ha convergenza uniforme, per ogni $x \in \mathbb{R}$ possiamo integrare per serie per otttenere che

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Facoltà di Ingegneria,

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 3 marzo 2011

Esercizio 1 Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:
$$y(t)y''(t) - y'(t)^2 - y'(t) = 0$$
e si discuta il dominio di esistenza delle soluzioni.

Esercizio 2 Dopo aver disegnato approssimativamente il sostegno della curva la cui equazione in coordinate polari è
$$\varrho = 1 - \cos\vartheta, \qquad \vartheta \in [0, \pi/2],$$
se ne determini la lunghezza. Si riparametrizzi quindi la curva utilizzando il parametro d'arco.

Esercizio 3 Dopo aver determinato il volume dell'ellissoide in $\mathbb{R}^3$ di semiassi positivi a, b e c, si determinino gli ellissoidi di volume massimo e minimo tra quelli per cui $a + 2b + 3c = 7$.

Esercizio 4 Dopo aver determinato l'equazione del piano T tangente nel punto $(1, 1, 1)$ la superficie
$$x^3 + 2y^2 - 7z^3 + 3y + 1 = 0;$$
si determini quindi il volume della porzione E del cilindro
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$$
compresa tra il piano T e il piano $\{z = 0\}$.

Esercizio 5 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}.$$

Soluzione 1 L'equazione data è un'equazione autonoma, nel senso che non compare esplicitamente la dipendenza dalla variabile indipendente t; in tal caso si pone quindi $y'(t) = z(y)$, da cui $y''(t) = \frac{d}{dt}z(y(t)) = z'(y)y'(t) = z'(y)z(y)$. L'equazione diventa quindi

$$yz(y)z'(y) - z^2(y) - z(y) = 0;$$

la funzione $z \equiv 0$ è soluzione, nel qual caso si ottengono le soluzioni $y(t) = cost$. Per cercare le equazioni diverse da 0, possiamo dividere per z ed ottenere

$$yz'(y) = z(y) + 1.$$

Se cerchiamo la soluzione y diversa da zero, possiamo anche riscrivere

$$z'(y) = \frac{z(y) + 1}{y}.$$

Tale equazione è una equazione a variabili separabili con $a(y) = \frac{1}{y}$ e $b(z) = z + 1$, i cui domini sono $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{R}$ rispettivamente. Il caso $b(z) = 0$ si ottiene quando $z = -1$, che corrisponde a $y(t) = -t + c$ che saranno quindi altre soluzioni. Altrimenti, siamo ricondotti a risolvere

$$\frac{z'(y)}{z(y) + 1} = \frac{1}{y}$$

che ha come soluzione

$$\log |z(y) + 1| = \log |y| + c_1, \qquad c_1 \in \mathbb{R},$$

cioè (notare che la costante c_1 cambia passando alla seguente espressione)

$$|z(y) + 1| = c_1|y|, \qquad c_1 > 0.$$

Eliminando il valore assoluto e tenendo presente che anche la soluzione nulla è accettabile, si ottengono le soluzioni

$$z(y) = c_1 y - 1, \qquad c_1 \in \mathbb{R}.$$

A questo punto si tratta di risolvere l'equazione

$$y'(t) = c_1 y(t) - 1;$$

tale equazione è ancora un'equazione a variabili separabili che ammette sicuramente la soluzione $c_1 y = 1$, cioè $y = 1/c_1$ nel caso in cui $c_1 \neq 0$; altrimenti le soluzioni si ottengono integrando

$$\int \frac{y'(t)}{c_1 y(t) - 1} dt = t,$$

da cui la soluzione in forma implicita (se $c_1 \neq 0$)

$$\log |c_1 y(t) - 1| = c_1 t + c_2,$$

cioè

$$c_1 y(t) = 1 + c_2 e^{c_1 t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Tali soluzioni sono definite per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione 2 Per il calcolo della lunghezza della curva, possiamo usare la formula valida per curve espresse in coordinate polari

$$\begin{aligned} l = & \int_0^{\pi/2} \sqrt{\varrho(\vartheta)^2 + \varrho'(\vartheta)^2} d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1-\cos\vartheta)^2 + \operatorname{sen}^2\vartheta} d\vartheta \\ = & \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\cos\vartheta} d\vartheta = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{2}} d\vartheta = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} d\vartheta = 4 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Con il medesimo conto, si ricava il parametro d'arco $s : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 4-2\sqrt{2}]$

$$s(t) = 2 \int_0^t \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} d\vartheta = 4\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right);$$

ricavando t in funzione di s si ottiene

$$t = 2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right).$$

La riparametrizzazione in lunghezza d'arco sarà quindi data da

$$\varphi(s) = \varphi(s(t)) = r(t) = \varrho(t)(\cos t, \operatorname{sen} t) = \frac{(8s-s^2)}{64}\left(s^2 - 8s + 8, (4-s)\sqrt{8s-s^2}\right).$$

Soluzione 3 Il volume dell'ellissoide è dato da

$$V(a,b,c) = \frac{4\pi}{3} abc$$

che rappresenta la nostra funzione da massimizzare e minimizzare sul vincolo

$$E = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c \geq 0, \quad a + 2b + 3c = 7\}.$$

Tale insieme è la parte del piano $a + 2b + 3c = 7$ contenuta nel quadrante con a, b, c positivi; è un insieme bidimensionale chiuso e limitato. Possiamo proceedere in due modi differenti; possiamo sostituire il vincolo $a = 7 - 2b - 3c$ e determinare il massimo e il minimo di

$$f(b,c) = V(7-2b-3c, b, c) = \frac{4\pi}{3}(7bc - 2b^2c - 3bc^2)$$

sull'insieme

$$F = \left\{(b,c) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq b \leq \frac{7}{2}, 0 \leq c \leq \frac{(7-2b)}{3}\right\},$$

oppure possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange applicato alla funzione

$$V(a,b,c) = \frac{4\pi}{3} abc - \lambda(a + 2b + 3c - 7)$$

in cui andranno considerate anche le restrizioni $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Procederemo utilizzando il primo metodo; si noti anzitutto che f è positiva e che si annulla precisamente nei punti del bordo di F, cioè quando o $b = 0$, o $c = 0$ oppure $2b + 3c = 7$ che saranno quindi tutti punti di minimo con valore minimo uguale a 0. Per determinare il massimo cerchiamo i punti stazionari interni ad F; poniamo quindi la condizione $\nabla f(b,c) = 0$ che, a parte il fattore $\frac{4\pi}{3}$ è data da

$$\begin{cases} c(7 - 4b - 3c) = 0 \\ b(7 - 2b - 6c) = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ha come soluzioni i punti $(0,0)$, $(7/2, 0)$, $(0, 7/3)$ e $(7/6, 7/9)$; quest'ultimo è l'unico punto interno ad F che sarà quindi il punto di massimo volume con volume pari a

$$\frac{686}{243}\pi.$$

Soluzione 4 Per determinare il piano T applichiamo il Teorema della funzione implicita alla funzione $f(x,y,z) = x^3 + 2y^2 - 7z^3 + 3y + 1$; dato che $\nabla f(x,y,z) = (3x^2, 4y+3, -21z^2)$, si trova che

$$\nabla f(1,1,1) = (3,7,-21).$$

Quindi le condizioni per applicare il Teorema della funzione implicita sono soddisfatte (rispetto a tutte e tre le variabili) e l'equazione del piano tangente sarà data da $(3,7,-21)(x-1,y-1,z-1) = 0$, da cui l'equazione

$$3x + 7y - 21z + 11 = 0.$$

Si noti ora che all'interno del cilindro $x \geq 0$ e $y \geq 0$, da cui $21z = 3x + 7y + 11 \geq 11 > 0$; il volume di E sarà quindi dato da

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_{\{(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 1\}} dxdy \int_0^{\frac{3x+7y+11}{21}} dz = \int_{\{(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 1\}} \frac{3x+7y+11}{21} dxdy.$$

Passando ora alle coordinate polari centrate in $(1,1)$

$$\begin{cases} x - 1 = \varrho \cos \vartheta \\ y - 1 = \varrho \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$$

otteniamo

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \frac{3\varrho \cos \vartheta + 7\varrho \operatorname{sen} \vartheta + 21}{21} \varrho d\varrho = \pi.$$

Soluzione 5 Le funzioni della successioni sono dispari, quindi possiamo restringere lo studio a $x \geq 0$. Le funzioni si annullano per $x = 0$, mentre per $x > 0$ abbiamo che

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n2^n}} \to 0$$

per $n \to +\infty$. Quindi la successione converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = 0$. Per la convergenza uniforme, dobbiamo studiare

$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x)|.$$

Dato che $f_n(0) = 0$, $f_n(x) \to 0$ per $x \to +\infty$ e $f_n(x) > 0$ per $x > 0$, le funzioni f_n avranno un massimo positivo per $x > 0$, che determiniamo utilizzando le derivate; dato che

$$f_n'(x) = \frac{2^n(1 - n2^n x^2)}{(1 + n2^n x^2)^2} = 0$$

se e solo se $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}2^{n/2}}$ in cui la funzione vale

$$f_n(x_n) = \frac{2^{n/2-1}}{\sqrt{n}} \to +\infty$$

per $n \to +\infty$. Quindi la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$. Siccome la successione x_n tende a 0 per $n \to +\infty$, ci si può domandare se la convergenza è uniforme su intervalli che non contengono l'origine, cioè sugli intervalli $[a, +\infty)$ con $a > 0$; su tale intervallo, una volta fissato n in modo che $x_n < a$, avremo che f_n è monotona decrescente e quindi $f_n(x) \leq f_n(a)$ per $x \geq a$, cioè

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x)| = \frac{2^n a}{1 + n2^n a^2} \to 0$$

per $n \to +\infty$, da cui la convergenza uniforme su $[a. + \infty)$.

Facoltà di Ingegneria,

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 13 giugno 2011

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y''(t) = y(t)y'(t), \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \end{cases}$$

della soluzione trovata se ne individui il dominio e se ne tracci un grafico qualitativo.

Esercizio 2 Calcolare divergenza e rotore del campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(-y^2 \text{sen}\,(xy), \frac{e^y}{z} + \cos(xy) - xy\,\text{sen}\,(xy), -\frac{e^y}{z^2}\right);$$

si determini quindi il lavoro $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$ di $\vec{F}$ lungo la curva chiusa $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\ t, 2)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 3 Si determinino e si classifichino i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - y^2 - 1;$$

si scrivano quindi le equazioni del piano tangente e della retta normale al grafico della funzione nel punto $(-1, -1)$.

Esercizio 4 Determinare massa e baricentro della superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 \leq 1\}$$

con densità $\varrho(x,y,z) = z$.

Esercizio 5 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = nxe^{-nx}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

e dire, motivandolo, se

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Soluzione 1 L'equazione data è un'equazione autonoma, nel senso che non compare esplicitamente la dipendenza dalla variabile indipendente t; in tal caso si pone quindi $y'(t) = z(y)$, da cui $y''(t) = \frac{d}{dt}z(y(t)) = z'(y)y'(t) = z'(y)z(y)$. Tenendo conto che il dato iniziale è $z(0) = z(y(0)) = y'(0) = 1$, si ottiene il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z(y)z'(y) = yz(y) \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Tale problema ha per soluzione

$$z(y) = \frac{y^2}{2} + 1.$$

Per concludere, ripassando a $y'(t) = z(y)$, risolviamo quindi il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y^2+2}{2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

che è un problema a variabili separabili la cui soluzione è data da

$$\sqrt{2}\arctan\left(\frac{y(t)}{2}\right) = t,$$

cioè

$$y(t) = \sqrt{2}\tan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Soluzione 2 Con calcoli diretti si trova che

$$\text{div}\vec{F}(x,y,z) = -y(y^2+x^2)\cos(xy) - 2x\text{sen }(xy) + \frac{e^y}{z^3}(z^2+2),$$

mentre

$$\text{rot}\vec{F}(x,y,z) = 0.$$

Dato che il dominio del campo $\vec{F}$ è $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}$ (unione di due domini semplicemente connessi) e la curva γ è una curva chiusa contenuta nel dominio di $\vec{F}$, se ne deduce, dal Teorema di Stokes (teorema del rotore) che il lavoro del campo lungo γ è nullo, cioè

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Soluzione 3 Il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2y\right).$$

Tale gradiente si annulla nei due punt $(0, 1/2)$ e $(0, -1/2)$. Per classificare questi due punti stazionari, scriviamo la matrice Hessiana;

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\[2ex] -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - 2 \end{pmatrix}$$

che nei punti stazionari diventa

$$Hf\left(0,\pm\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che i due punti stazionari sono punti di sella in quanto la matrice Hessiana è indefinita. Per scrivere l'equazione del piano tangente utilizziamo la formula

$$z=f(x_0,y_0)+\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0),$$

con $(x_0,y_0)=(-1,-1)$. In tale punto abbiamo $f(-1,-1)=\sqrt{2}-2$ e $\nabla f(-1,-1)=(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}+2)$, e quindi il piano tangente avrà equazione

$$x+(1-2\sqrt{2})y+\sqrt{2}z=0.$$

Per quanto riguarda la retta normale, dato che il vettore $(1,1-2\sqrt{2}.\sqrt{2})$ è ortogonale al piano tangente, l'equazione parametrica della retta normale sarà data da

$$r(t)=(-1,-1,\sqrt{2}-2)+t(1,1-2\sqrt{2}.\sqrt{2}).$$

Tale retta in coordinate cartesiane è descritta da

$$\begin{cases} (2\sqrt{2}-1)x+y=-2\sqrt{2} \\ \\ \sqrt{2}x-z=2. \end{cases}$$

Soluzione 4 La superficie in considerazione è il grafico della funzione

$$g(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$$

sul dominio $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$. La funzione g non è differenziabile in $(0,0)$ e quindi la superficie non sarà una superficie regolare nel punto $(0,0,1)$. Infatti, Σ è la superficie laterale della parte di cono con vertice in $(0,0,1)$ e compresa tra i piani $z=0$ e $z=1$; tale cono è quindi singolare nel vertice. Per determinare la massa di Σ possiamo quindi considerare il seguente integrale di superficie

$$\begin{aligned} M(\Sigma)=&\int_\Sigma \varrho(x,y,z)d\Sigma=\int_\Sigma z d\Sigma=\int_D g(x,y)\sqrt{1+\|\nabla g(x,y)\|^2}dxdy \\ =&\sqrt{2}\int_{\{x^2+y^2\leq 1}(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^1(1-\varrho)\varrho d\varrho=\frac{\pi\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il baricentro, avremo che, per motivi di simmetria, $\bar{x}=\bar{y}=0$, mentre per la coordinata $\bar{z}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \bar{z}=&\frac{1}{M(\Sigma)}\int_\Sigma z\varrho(x,y,z)d\Sigma=\frac{3\sqrt{2}}{\pi\sqrt{2}}\int_{\{x^2+y^2\leq 1\}}(1-\sqrt{x^2+y^2})^2dxdy \\ =&\frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Il baricentro avrà quindi coordinate $(0,0,\frac{\sqrt{2}}{4})$.

Soluzione 5 Per lo studio della convergenza puntuale, notiamo che per $x=0$, $f_n(x)=0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, mentre per $x>0$

$$\lim_{n\to+\infty} nxe^{-nx}=0,$$

e per $x < 0$

$$\lim_{n\to+\infty} nxe^{-nx} = -\infty.$$

Quindi la successione converge puntualmente su $[0, +\infty)$ alla funzione $f(x) = 0$, mentre diverge a $-\infty$ nell'intervallo $(-\infty, 0)$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, ha senso studiarla solo in $[0, +\infty)$; dobbiamo quindi studiare

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty)} f_n(x)$$

in quanto $f(x) = 0$ e $f_n(x) \geq 0$ per $x \geq 0$. Tenendo presente che $f_n(0) = 0$ e $f_n(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, determiniamo il massimo della funzione per $x \in (0, +\infty)$ calcolando la derivata di f_n (la funzione è di classe C^1 e quindi possiamo calcolare le derivate). Troviamo che

$$f_n'(x) = e^{-nx}(n - n^2x).$$

Tale derivata si annulla per $x = 1/n$ dove la funzione vale $f_n(1/n) = 1/e$. Questo vuol dire che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{e} \neq 0,$$

cioè non abbiamo convergenza uniforme su tutto $[0, +\infty)$. Possiamo cercare di vedere se vi è convergenza uniforme su sottoinsiemi di tale intervalli; siccome il massimo della funzione f_n lo si ha nel punto $1/n$, punti che tendono a 0 per $n \to +\infty$, possiamo studiare la convervenza uniforme negli intervalli $[a, +\infty)$ con $a > 0$. In tal caso abbiamo che, se $1/n < a$, allora $f_n(x) \leq f_n(a) = nae^{-na}$ per ogni $x \in [a, +\infty)$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} nae^{-na} = 0.,$$

cioè si ha convergenza uniforme in $[a, +\infty)$ per ogni $a > 0$. Per quanto riguarda l'ultimo integrale, non possiamo applicare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per due motivi; il primo è la mancanza di convergenza uniforme, il secondo il fatto che l'intervallo di integrazione è illimitato. Ciononostante, in questo caso si trova

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 0,$$

mentre

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \frac{1}{n} \to 0, \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Quindi, anche se non si ha convergenza uniforme e anche se l'integrvallo è illimitato, può ancora essere vero che l'integrale del limite è uguale al limite degli integrali.

Facoltà di Ingegneria,

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 18 luglio 2011

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \frac{e^{-t}}{t}, \\ y(-1) = 0, \quad y'(-1) = e. \end{cases}$$

Esercizio 2 Si consideri la superficie Σ ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva parametrizzata nel piano xz in coordinate polari da

$$\varrho(t) = 1 - \operatorname{sen} t, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

discutere la regolarità di Σ e calcolarne l'area. Scrivere infine le equazioni del piano tangente e della retta normale a Σ nel punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

Esercizio 3 Sia E il sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^3$ con ∂E dato dalla superficie Σ dell'esercizio precedente; si calcoli il flusso uscente da E del campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x + y^2 z, e^{x \operatorname{sen} z} + y, \arctan(xe^y) + z\right).$$

Esercizio 4 Determinare i punti di massima e minima distanza dall'origine dei punti dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 = 2x\}.$$

Esercizio 5 Scrivere la serie di Fourier della funzione 2π periodica $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x(1 + \cos x);$$

discutere quindi le varie convergenze (puntuale, uniforme e totale) e utilizzare tale serie per determinare

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2-1)^2}.$$

Soluzione 1 Risolviamo anzitutto l'equazione omogenea associata; dato che il polinomio caratteristico è dato da $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda = (\lambda + 1)^2$, avremo che la soluzione dell'omogenea è

$$y(t) = (c_1 + tc_2)e^{-t}.$$

Per determinare la soluzione particolare, applichiamo il metodo della variazione delle costanti; si arriva al sistema

$$\begin{cases} c_1' e^{-t} + c_2' te^{-t} = 0 \\ -c_1' e^{-t} + c_2'(1-t)e^{-t} = \frac{e^{-t}}{t} \end{cases}$$

la cui soluzione è $c_1' = -1$, $c_2' = 1/t$, cioè $c_1(t) = c_1 - t$, $c_2(t) = c_2 + \log|t|$. La soluzione generale dell'equazione differenziale sarà quindi data da

$$y(t) = (c_1 + tc_2 - t + t\log|t|)e^{-t}.$$

Per la determinazione delle due costanti, utilizziamo le condizioni iniziali; troviamo che $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$; la soluzione del Problema di Cauchy sarà quindi data da

$$y(t) = te^{-t}\log|t|.$$

Soluzione 2 Si ottiene la parametrizzazione di Σ con

$$r(t,s) = (1 - \operatorname{sen} t)(\cos t \cos s, \cos t \operatorname{sen} s, \operatorname{sen} t), \qquad (t,s) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi].$$

Dato che

$$r_t \times r_s = (1 - \operatorname{sen} t)(\cos s \cos^2 t(1 - 2\operatorname{sen} t), \operatorname{sen} s \cos^2 t(1 - 2\operatorname{sen} t), -\cos t(2\operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen} t - 1)),$$

troviamo

$$\|r_t(t,s) \times r_s(t,s)\| = \cos t(1 - \operatorname{sen} t)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}.$$

Questo mostra che la parametrizzazione è regolare, eccettuato che per $t = \pm\pi/2$; ma questi punti sono inevitabilmente irregolari in quanto in corrispondenza di tali valori otteniamo punti che appartengono all'asse di rotazione. L'area di Σ sarà quindi data da

$$A(\Sigma) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt \int_0^{2\pi} \|r_t(t,s) \times r_s(t,s)\| dtds = 2\sqrt{2}\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t(1 - \operatorname{sen} t)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{32}{5}\pi.$$

Per le equazioni della retta normale e del piano tangente, si noti che il punto

$$(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$$

viene raggiunto in corrispondenza di $t = 0$ e $s = \frac{7}{4}\pi$; in tale punto la direzione normale è individuata dal vettore $\vec{n} = r_t \times r_s$ che è dato da

$$\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right),$$

e quindi l'equazione parametrica della retta normale è data da

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) + t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

che in coordinate cartesiane diventa

$$\begin{cases} 2x - \sqrt{2}z = \sqrt{2} \\ 2y + \sqrt{2}z = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Per il piano tangente tangente sarà dato invece dall'equazione

$$\vec{n} \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}, y + \frac{\sqrt{2}}{2}, z \right) = 0,$$

cioè dall'equazione

$$x - y + \sqrt{2}z = \sqrt{2}.$$

Soluzione 3 Per il calcolo del flusso di $\vec{F}$ possiamo utilizzare direttamente la definizione, dato che abbiamo a disposizione la parametrizzazione di Σ. Conviene però notare che

$$\mathrm{div}\vec{F}(x, y, z) = 3,$$

e quindi se applichiamo il Teorema della divergenza otteniamo che

$$\Phi(\vec{F}, \Sigma) = \int_E \mathrm{div}\vec{F}(x, y, z)dxdydz = 3\mathrm{Vol}(E).$$

Per il calcolo del volume di E utilizziamo le coordinate sferiche, modificate come segue (in pratica si sta cambiando l'angolo azimutale φ con $\pi/2 - t$

$$\begin{cases} x = \varrho \cos s \cos t \\ y = \varrho \mathrm{sen}\, s \cos t \\ z = \varrho \mathrm{sen}\, t \end{cases}, \qquad t = \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], s \in [0, 2\pi].$$

In questo modo otteniamo che

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(E) &= \int_0^{2\pi} ds \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt \int_0^{1-\mathrm{sen}\, t} \varrho^2 \cos t d\varrho \\ &= \frac{2}{3}\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \mathrm{sen}\, t)^3 \cos t dt = \pi, \end{aligned}$$

da cui

$$\Phi(\vec{F}, \Sigma) = 3\pi.$$

Soluzione 4 Si tratta di massimizzare e minimizzare la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (o meglio, la sua radice quadrata) con due vincoli, $x^2 + y^2 = z^2$ e $x^2 + y^2 = 2x$. Utilizziamo quindi due moltiplicatori di Lagrange

$$f(x, y, z) + \lambda(x^2 + y^2 - z^2) + \mu(x^2 + y^2 - 2x).$$

Si giunge quindi al sistema

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x + 2\mu x - 2\mu = 0 \\ 2y + 2\lambda y + 2\mu y = 0 \\ 2z(1 - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

che ha come soluzioni $(0, 0, 0)$ con moltiplicatori arbitrari e $(2, 0, \pm 2)$ con moltiplicatori $\lambda = 1$ e $\mu = -4$. In corrispondenza di $(0, 0, 0)$ si ha la minima distanza 0, mentre nei due secondi punti la funzione f ha massimo vincolato pari a 8, da cui il fatto che la massima distanza è data da $2\sqrt{2}$.

Soluzione 5 La funzione data è dispari, quindi tutti i coefficienti a_n sono nulli. La funzione, estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ è continua; quindi sappiamo già che si ha convergenza totale su tutto $\mathbb{R}$ della serie di Fourier, quindi anche semplice e uniforme. Per il calcolo dei coefficienti, abbiamo che

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(1 + \cos x) \mathrm{sen}\,(nx) dx.$$

Dalle formule di Prostaferesi, abbiamo che

$$\cos x \mathrm{sen}\,(nx) = \frac{1}{2} \left(\mathrm{sen}\,((n-1)x) + \mathrm{sen}\,((n+1)x)\right).$$

Dobbiamo quindi distinguere i casi $n = 1$ e $n > 1$; nel primo caso troviamo che

$$b_1 = \frac{3}{2},$$

mentre nel secondo caso

$$b_n = \frac{2(-1)^n}{n(n^2-1)}.$$

Otteniamo quindi lo sviluppo di Fourier

$$f(x) = \frac{3}{2} \mathrm{sen}\, x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n^2-1)} \mathrm{sen}\,(nx)$$

Per concludere, dalla formula di Parseval, otteniamo che

$$\pi^3 - \frac{15}{2}\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \pi \left(\frac{9}{4} + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2-1)^2} \right).$$

da cui

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16}.$$

Facoltà di Ingegneria,

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 5 settembre 2011

Esercizio 1 Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$ty^2(t)y'(t) = t^3 + y^3(t).$$

Esercizio 2 Determinare e classificare i punti stazionari liberi della seguente funzione:

$$f(x, y) = xy \log(xy^2) + x^2y$$

Esercizio 3 Scrivere le equazioni del piano tangente e della retta normale al grafico della funzione

$$f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

nel punto $(1, 1)$.

Esercizio 4 Si calcoli il seguente integrale triplo:

$$\int_E \frac{x^2}{x^2 + z^2} dxdydz,$$

con $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 - y^2 + z^2 \leq 0, y \geq 0\}$.

Esercizio 5 Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}.$$

Soluzione 1 L'equazione data può essere vista sia come equazione di tipo omogeneo, oppure ricondotta ad una lineare; vediamo questo secondo metodo. Ponendo $v(t) = y^3(t)$, si ottiene l'equazione

$$v'(t) = 3t^2 + \frac{3v(t)}{t}$$

che è lineare del primo ordine con $a(t) = \frac{3}{t}$ e $b(t) = 3t^2$. La soluzione diventa quindi

$$v(t) = |t|^3 \left(c + \int \frac{3}{|t|} dt. \right)$$

Per $t > 0$ si ottiene la soluzione

$$v(t) = ct^3 + 3t^3 \ln t$$

da cui

$$y(t) = t \sqrt[3]{c + \ln t^3},$$

mentre per $t < 0$ si ottiene

$$v(t) = ct^3 - 3t^3 \ln(-t)$$

da cui

$$y(t) = t \sqrt[3]{c - 3\ln(-t)}.$$

Soluzione 2 Poniamo

$$\nabla f(x, y) = (y \ln(xy^2) + y + 2xy, x \ln(xy^2) + 2x + x^2) = 0,$$

da cui le soluzioni $(1, \pm e^{-3/2})$ che sono gli unici due punti stazionari. Scriviamo quindi la matrice Hessiana che è data da

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} + 2y & \ln(xy^2) + 3 + 2x \\ \ln(xy^2) + 3 + 2x & \frac{2x}{y} \end{pmatrix}.$$

Troviamo quindi che

$$Hf(1, e^{-3/2}) = \begin{pmatrix} 3e^{-3/2} & 2 \\ 2 & 2e^{3/2} \end{pmatrix}, \quad Hf(1, -e^{-3/2}) = \begin{pmatrix} -3e^{-3/2} & 2 \\ 2 & -2e^{3/2} \end{pmatrix},$$

da cui si deduce che $(1, e^{-3/2})$ è un punto di minimo locale mentre $(1, -e^{3/2})$ è un punto di massimo locale.

Soluzione 3 Per scrivere l'equazione del piano tangente usiamo l'equazione

$$z = f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1)$$

da cui

$$x + y - 9z + 1 = 0.$$

Per la retta normale, basta tener presente che $(1, 1, -9)$ è la direzione ortogonale, quindi avremo che la forma parametrica della retta è data da

$$r(t) = (1, 1, \frac{1}{3}) + t(1, 1, -9).$$

Soluzione 4 Passiamo alle coordinate cilindriche lungo l'asse y, otteniamo

$$\int_{E'} \varrho \cos^2 \vartheta dt d\varrho d\vartheta$$

dove

$$E' = \{\vartheta \in [0, 2\pi], \varrho \leq 1, \varrho \leq t \leq \sqrt{2 - \varrho^2}\}.$$

Si ottiene quindi che

$$\begin{aligned}\int_E \frac{x^2}{x^2+z^2} dxdydz =& \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\varrho \int_\varrho^{\sqrt{2-\varrho^2}} \varrho \cos^2 \vartheta dt = \pi \left[-\frac{1}{3}(2-\varrho^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\varrho^3}{3} \right]_0^1 \\ =& 2\pi \frac{\sqrt{2}-1}{3}.\end{aligned}$$

Soluzione 5 Dato che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\mathrm{sen}\,(nx)|}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

e la serie di $1/n^2$ converge, se ne deduce che la serie converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$ e quindi converge anche puntualmente e uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Facoltà di Ingegneria,

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 9 gennaio 2012

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzione dell'equazione differenziale

$$y'(t) = y(t)(y(t) - 2);$$

si traccino quindi in un unico disegno i grafici qualitativi delle cinque differenti soluzioni per cui $y(0) = -1$, $y(0) = 0$, $y(0) = 1$, $y(0) = 2$ e $y(0) = 3$, discutendone i domini di definizione.

Esercizio 2 Dire se e dove si può applicare il teorema della funzione implicita per concludere che l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1, x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 \right\}$$

è, localmente, una curva. Provare a determinare E mediante parametrizzazioni.

Esercizio 3 Determinare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}.$$

Esercizio 4 Dire se l'insieme illimitato

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq |\ln(x^2 + y^2)|, 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

è misurabile e, in caso, determinarne il volume.

Esercizio 5 Studiare, al variare di $p \in \mathbb{R}$, la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = n^p x^4 e^{-8n\sqrt{|x|}}.$$

Soluzione 1 L'equazione é una equazione differenziale del primo ordine che può essere trattata sia come equazione di tipo Bernoulli che a variabili separabili; optiamo qui per quest'ultimo approccio. In tal caso stiamo considerando l'equazione

$$y'(t) = a(t)b(y(t)), \qquad a(t) = 1, b(y) = y(y-2).$$

Tali funzioni sono continue e $b(y) = 0$ se e solo se $y = 0$ o $y = 2$; abbiamo quindi le due soluzioni stazionarie $y(t) \equiv 0$ e $y(t) \equiv 2$. Cerchiamo quindi le soluzioni non staziorie integrando l'equazione

$$\frac{1}{y(t)(y(t-2))} y'(t) = 1;$$

otteniamo quindi la soluzione in forma implicita

$$\ln \left| \frac{y(t)-2}{y(t)} \right| = 2t + c;$$

tale espressione è equivalente a

$$\left| \frac{y(t)-2}{y(t)} \right| = ce^{2t}, \qquad c > 0$$

oppure

$$\frac{y(t)-2}{y(t)} = ce^{2t}, \qquad c \neq 0.$$

Ricavando esplicitamente la soluzione, troviamo

$$y(t) = \frac{2}{1 - ce^{2t}}, \qquad c \neq 0.$$

Tali soluzioni sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$ se $c < 0$, mentre sono definite per $t \neq -\frac{\ln c}{2}$ nel caso in cui $c > 0$. Le soluzioni che soddisfano le condizioni $y(0) = -1$, $y(0) = 1$ e $y(0) = 3$ sono date rispettivamente da

$$y(t) = \frac{2}{1 - 3e^{2t}}, y(t) = \frac{2}{1 + e^{2t}}, y(t) = \frac{6}{3 - e^{2t}},$$

che è quindi definita per $t \in (-\frac{\ln 3}{2}, +\infty)$ (si tenga presente che la condizione iniziale è stata data per $t_0 = 0$) nel primo caso, su tutto $\mathbb{R}$ nel secondo e per $t \in (-\infty, \frac{\ln 3}{2})$ nel terzo caso. Le soluzioni che soddisfano le condizioni $y(0) = 0$ e $y(0) = 2$ sono le due soluzioni stazionarie $y(t) = 0$ e $y(t) = 2$ rispettivamente. I grafici di queste soluzioni sono riportate in Figura 1.

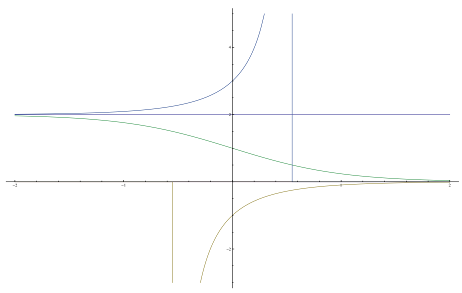


Figura 1: Grafici delle soluzioni trovate.

Soluzione 2 L'insieme E è il luogo degli zeri della funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$g(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1, x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 \right),$$

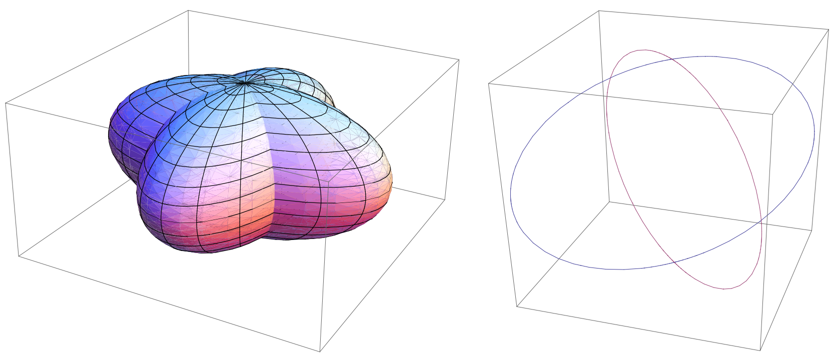
cioè E è l'intersezione di due ellissoidi, uno di semiassi 2, 1 e 1, e l'altro di semiassi 1, 2 e 1. La matrice Jacobiana di g è data da

$$Dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & 2y & 2z \\ \\ 2x & \frac{y}{2} & 2z \end{pmatrix};$$

tale matrice ha rango 2 sicuramente se $x \neq 0$ e se $y \neq 0$, mentre nel caso in cui $x = y = 0$ la matrice ha rango 1 se $z \neq 0$ e rango 0 se $z = 0$. Siccome il punto $(0, 0, 0)$ non appartiene ad E, se ne deduce che il teorema della funzione implicita si applica su E eccetto che nei punti in cui $x = y = 0$ e $z = \pm 1$, cioè nei due punti $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$. Quindi, eccettuato questi due punti, l'insieme é localmente attorno ad ogni suo punto una curva. E non sarà globalmente una curva; si può vedere però che è dato dall'unione di due curve. Infatti, se cerchiamo di risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1 \\ \\ x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, \end{cases}$$

sostituendo la prima condizione $z^2 = 1 - x^2/4 - y^2$ nella seconda espressione si trova che $x^2 = y^2$, cioè $|x| = |y|$. Questo significa che l'insieme E è contenuto nei due piano verticali $y = x$ e $y = -x$. Sostituendo nuovamente l'informazione $|y| = |x|$ nella prima equazione si l'espressione $\frac{5}{4}x^2 + z^2 = 1$, cioè l'insieme E visto nel piano xz è un'ellisse di semiassi $2/\sqrt{5}$ e 1. Possiamo quindi utilizzare per E, tenendo presente che $y = \pm x$, le due parametrizzazioni



(a) I due ellissoidi che definiscono E (b) L'insieme E

$$r_1(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos t, \frac{2}{\sqrt{5}} \cos t, \sin t \right), r_2(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos t, -\frac{2}{\sqrt{5}} \cos t, \sin t \right), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e quindi se ne conclude che l'insieme E è dato dall'unione di due ellissi, una contenuta nel piano $y = x$ e una nel piano $y = -x$. Si veda la figura sottostante in cui sono rappresentati sia i due ellissoidi che definiscono E 2(a) che l'insieme E 2(b).

Soluzione 3 Iniziamo col scrivere il gradiente della funzione f;

$$\nabla f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(y(1-2x^2), x(1-y^2)).$$

Troviamo quindi che $\nabla f(x,y) = 0$ nei cinque punti $(0,0)$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ che saranno quindi i punti stazionari di f. Per classificarli, scriviamo la matrice Hessiana di f che è data da

$$Hf(x,y) = e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} -6xy + 4x^3y & 1-2x^2-2y^2+4x^2y^2 \\ 1-2x^2-2y^2+4x^2y^2 & -6xy+4xy^3 \end{pmatrix}.$$

Troviamo quindi che

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Hf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = Hf\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} -2e & 0 \\ 0 & -2e \end{pmatrix},$$

mentre

$$Hf\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = Hf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi concludere che $(0,0)$ è un punto di sella (la matrice Hessiana ha determinante uguale a -1 quindi un autovalore è positivo e uno è negativo, cioè la matrice è indefinita), i punti $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ sono punti di massimo locale stretto in quanto la matrice Hessiana è diagonale e gli elementi della diagonale sono entrambi negativi, mentre i punti $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ sono punti di minimo locale stretto in quanto la matrice Hessiana è diagonale e gli elementi della diagonale sono entrambi positivi.

Soluzione 4 L'insieme è illimitato in quanto per $x^2+y^2 \to 0$ si ha che $|\ln(x^2+y^2)| \to +\infty$. Possiamo quindi considerare gli insiemi

$$E_h = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{h^2} \le x^2+y^2 \le 1, 0 \le z \le |\ln(x^2+y^2)|\right\};$$

tali insiemi sono invadenti in quanto $E_h \subset E_{h+1}$ e

$$E = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} E_h.$$

Gli insiemi E_h sono misurabili in quanto sono regolari essendo z–semplici; inoltre, passando alle coordinate cilindriche, si ottiene che

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(E_h) =& |E_h| = \int_{E_h} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1/h}^1 \varrho d\varrho \int_0^{2|\ln\varrho|} dz = -4\pi \int_{1/h}^1 \varrho \ln \varrho d\varrho \\ =& -4\pi\left[\frac{\varrho^2}{2}\ln\varrho - \frac{\varrho^2}{4}\right]_{1/h}^1 = \pi\left(1 - \frac{1}{2h^2}\ln h - \frac{1}{h^2}\right) \le \pi.\end{aligned}$$

Quindi

$$\sup_{h\in\mathbb{N}} |E_h| \le \pi < +\infty,$$

cioè l'insieme E è misurabile, ha misura finita data da

$$\mathrm{Vol}(E) = |E| = \lim_{h\to+\infty} |E_h| = \pi.$$

Soluzione 5 Distinguiamo due casi; per $x = 0$ si ha che $f_n(0) = 0$, mentre per $x \neq 0$

$$0 < n^p x^4 e^{-8n\sqrt{|x|}} \to 0$$

per $n \to +\infty$. Quindi la successione f_n converge puntualmente alla funzione $f(x) = 0$ su tutto $\mathbb{R}$. Per studiare la convergenza uniforme, dobbiamo calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,+\infty)} f_n(x),$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $f(x) = 0$, $f_n(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e il fatto che le f_n sono funzioni pari. Tracciamo quindi il grafico della funzione f_n per $x \geq 0$; essa vale 0 per $x = 0$, tende a 0 per $x \to +\infty$, quindi il suo estremo superiore è un massimo interno a $(0, +\infty)$. Per determinarlo, calcoliamo la derivata di f_n;

$$f_n'(x) = 4n^p x^3 (1 - n\sqrt{x}) e^{-8n\sqrt{x}}.$$

Tale derivata si annulla esclusivamente per $x = 1/n^2$ dove la funzione vale

$$f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = n^{p-8} e^{-8}.$$

Abbiamo quindi trovato che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = n^{p-8} e^{-8}$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

se e solo se $p - 8 < 0$, cioè $p < 8$. Notiamo inifine che per $p = 8$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = e^{-8},$$

mentre per $p > 8$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = +\infty.$$

In ogni caso, dato che i punti in cui eventualmente viene a mancare la convergenza uniforme sono dati da $1/n^2$ che tendono a 0 per $n \to +\infty$, si può anche notare che la convergenza uniforme c'è per ogni $p \in \mathbb{R}$ a patto di considerare insiemi chiusi che non contengano lo 0, ad esempio intervalli del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

Facoltà di Ingegneria,

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 2 febbraio 2012

Esercizio 1 Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = (2t-1)e^{-t};$$

tra le soluzioni trovate, determinare quella per cui

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$

Esercizio 2 Studiare la regolaritá della superficie Σ parametrizzata da $r : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(u,v) = (u\cos v, u\,\mathrm{sen}\, v, uve^{-u^2});$$

scrivere quindi le equazioni della retta normale e del piano tangente a Σ nel punto $r(1/2, \pi)$.

Esercizio 3 Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = xy + y^2$$

sull'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + xy = 1\}$.

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_E z(y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)dxdydz$$

con

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq xy \leq 2, \\ x^2 \leq y^2 \leq x^2 + 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Esercizio 5 Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n(x^2+x+1)}.$$

Facoltativo: scrivere l'espressione analitica della somma della serie.

Soluzione 1 Il polinomio caratteristico associato all'equazione omognenea é dato da

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1).$$

Quindi la soluzione generale dell'omogenea associata é data da

$$y_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t.$$

La soluzione particolare va cercata nella forma

$$y_p(t) = (at + b)e^{-t};$$

inserendo tale funzione nell'equazione difrerenziale, si trova che $a = 1/3$ e $b = 1/9$. La soluzione generale dell'equazione differenziale sará quindi data da

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t + \left(\frac{t}{3} + \frac{1}{9}\right) e^{-t}.$$

Dato che, se $c_1 \neq 0$, allora

$$c_1 e^{2t} + c_2 e^t = e^{2t}(c_1 + c_2 e^{-t}) \sim c_1 e^{2t} \to \infty$$

mentre le caso $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$

$$c_2 e^t \to \infty,$$

allora l'unica soluzione che soddisfa

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$$

é quella data da $c_1 = c_2 = 0$, cioé

$$y(t) = \left(\frac{t}{3} + \frac{1}{9}\right) e^{-t}.$$

Soluzione 2 la funzione r é di classe C^1 e

$$r_u(u, v) \times r_v(u, v) =$$
$$(u \operatorname{sen} v e^{-u^2} - uv(1 - 2u^2) \cos v e^{-u^2}, -u \cos v e^{-u^2} - uv(1 - 2u^2) \operatorname{sen} v e^{-u^2}, u);$$

si nota quindi che tale vettore si annulla per $u = 0$ mentre per $u \neq 0$ l'ultima componente é sicuramente non nulla, quindi $r_u \times r_v \neq 0$. La superficie é quindi regolare per ogni $u \neq 0$ e per ogni v. Dato che

$$r(1/2, \pi) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\pi}{2} e^{-1/4}\right), r_u(1/2, \pi) \times r_v(1/2, \pi) = \left(-\frac{\pi}{4} e^{-1/4}, -\frac{1}{2} e^{-1/4}, \frac{1}{2}\right),$$

si trova che la retta normale é parametrizzata da

$$\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\pi}{2} e^{-1/4}\right) + t\left(-\frac{\pi}{4} e^{-1/4}, -\frac{1}{2} e^{-1/4}, \frac{1}{2}\right)$$

mentre il piano tangente é dato da

$$\left(-\frac{\pi}{4} e^{-1/4}, -\frac{1}{2} e^{-1/4}, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}, y, z - \frac{\pi}{2} e^{-1/4}\right) = 0,$$

cioé

$$2\pi x + 4y - 4z e^{1/4} + \pi = 0.$$

Soluzione 3 L'insieme E non ha parte interna, quindi andiamo a cercare subito i punti stazionari vincolati. Dato che il vincolo é determinato dalla funzione $g(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 1$, verifichiamo che le condizioni per applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange siano soddisfatte. Abbiamo che

$$\nabla g(x,y) = (2x + y, 2y + x);$$

tale gradiente si annulla solamente in $(0,0)$, ma tale punto non appartiene ad E. Questo significa che E é, almeno localmente, una curva attorno ad ogni suo punto. Possiamo quindi introdurre la funzione Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

e calcolare le sue derivate. Imponendo che tali derivate si annullino si arriva al sistema

$$\begin{cases} y = \lambda(2x + y) \\ x + 2y = \lambda(x + 2y) \\ x^2 + y^2 + xy = 1. \end{cases}$$

la seconda equazione ha per soluzioni sia $x + 2y = 0$ che $\lambda = 1$. Nel primo caso troviamo sistema

$$\begin{cases} \lambda = -1/3 \\ x + 2y = 0 \\ 3y^2 = 1, \end{cases}$$

cioé i due punti $(-2/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e $(2/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ con moltiplicatore $\lambda = -1/3$. Nel caso in cui $\lambda = 1$ si trova invece

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 1 \\ y^2 = 1, \end{cases}$$

cioé i punti $(0,1)$ e $(0,-1)$ con moltiplicatore $\lambda = 1$. Dato che

$$f(-2/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = f(2/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}$$

e

$$f(0,1) = f(0,-1) = 1,$$

se ne conclude che

$$\max_E f = 1 \qquad \text{assunto nei punti } (0,1), (0,-1),$$

mentre

$$\min_E f = -\frac{1}{3} \qquad \text{assunto nei punti } (-2/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (2/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}),$$

Soluzione 4 Troviamo anzitutto che, integrando rispetto a $z \in [0,1]$,

$$\int_E z(y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)dxdydz = \frac{1}{2}\int_D (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)dxdy$$

con

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq xy \leq 2, \\ 0 \leq y^2 - x^2 \leq 1\}.$$

Per calcolare tale integrale poniamo $u = xy$ e $v = y^2 - x^2$; dato che il determinante Jacobiano della mappa $F(x,y) = (xy, y^2 - x^2)$ é dato da

$$\det DF(x,y) = 2(x^2 + y^2),$$

troviamo che, posto $D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1\}$,

$$\frac{1}{2}\int_D (y^2 - x^2)^{xy}(x^2+y^2)dxdy = \frac{1}{4}\int_{D'} v^u dudv = \frac{1}{4}\int_1^2 du \int_0^1 v^u dv = \frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}.$$

Soluzione 5 Poniamo $y = e^{-(x^2+x+2)}$ e troviamo la serie di potenze

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} ny^n;$$

tale serie converge puntualmente per $y \in (-1,1)$ mentre converge uniformemente e totalmente in ogni intervallo $[-a,a]$, con $0 \leq a < 1$. Dato che $x^2 + x + 1 \geq 7/4$, ne deduciamo che

$$0 < e^{-(x^2+x+1)} \leq e^{-7/4} < 1,$$

quindi per la serie di partenza converge totalmente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per calcolare la somma della serie, notiamo che

$$f(y) = y\sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1} = yF'(y) = \frac{d}{dy}\Big(yF(y)\Big) - F(y),$$

dove abbiamo posto

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^n = \frac{y}{1-y}.$$

Se ne conclude che

$$f(y) = \frac{y}{(1-y)^2}.$$

In definitiva abbiamo dimostrato che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n(x^2+x+1)} = \frac{e^{-(x^2+x+1)}}{(1-e^{-(x^2+x+1)})^2}.$$

Facoltà di Ingegneria,

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 6 febbraio 2012

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale

$$y'(t) = 2t\sqrt{y(t)} + 2ty(t).$$

Scrivere quindi l'espressione della soluzione che soddisfa la condizione $y(0) = 1$.

Esercizio 2 Determinare l'area della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, |z| \leq |y|\}.$$

Esercizio 3 Data la funzione $f(x, y, z) = xy+z^2$, determinare il flusso del campo $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ uscente dalla superficie laterale dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}.$$

Esercizio 4 Determinare e classificare i punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + e^{x^2-y^2}.$$

Esercizio 5 Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione $2\pi-$periodica definita da $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x(\pi^2 - x^2);$$

discutere quindi le varie convergenze della serie ed utilizzare la formula di Parseval per calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6}.$$

Soluzione 1 Osserviamo che stiamo cercando soluzioni positive, cioé $y(t) \geq 0$. Possiamo considerare l'equazione sia come una equazione di tipo Bernoulli, sia come equazione variabili separabili. La consideriamo come equazione a variabili separabili con $a(t) = 2t$ e $b(t) = \sqrt{y}(1 + \sqrt{y})$; dato che $b(y) = 0$ per $y = 0$, abbiamo che la funzione nulla é una soluzione. Per le soluzioni non nulle, integriamo l'equazione

$$\frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}(1 + \sqrt{y(t)})} = 2t.$$

Otteniamo quindi la soluzione

$$\sqrt{y(t)} = ce^{\frac{t^2}{2}} - 1, \qquad c > 0.$$

Tale soluzione é definita per $t^2/2 \geq -\ln c$, cioé per ogni $t \in \mathbb{R}$ se $c \geq 1$, per $|t| \geq \sqrt{-\ln c^2}$ altrimenti. In definitiva troviamo la soluzione

$$y(t) = (ce^{\frac{t^2}{2}} - 1)^2, \qquad c > 0.$$

La condizione $y(0) = 1$ viene soddisfatta per $c = 2$ (scartando la $c = 0$ in quanto non soddisfa $c > 0$).

Soluzione 2 Per questioni di simmetria, otteniamo che

$$\text{Area}(\Sigma) = 4\text{Area}(\Sigma'),$$

con

$$\Sigma' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, 0 \leq z \leq y\}.$$

Per Σ' possiamo considerare la parametrizzazione

$$r(t, s) = (\cos t, \operatorname{sen} t, s), \quad t \in [0, \pi], s \in [0, \operatorname{sen} t].$$

Dato che

$$r_t(t, s) \times r_s(t, s) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0),$$

otteniamo che

$$\text{Area}(\Sigma) = 4 \int_0^\pi dt \int_0^{\operatorname{sen} t} ds = 4 \int_0^\pi \operatorname{sen} t dt = 8.$$

Soluzione 3 Dato che

$$\nabla f(x, y, z) = (y, x, 2z), \quad \operatorname{div} F(x, y, z) = \Delta f(x, y, z) = 2,$$

possiamo utilizzare il teorema della divergenza per concludere che

$$\int_{\partial E} F \cdot \nu_E d\Sigma = \int_E \operatorname{div} F(x, y, z) dxdydz = \int_E \Delta f(x, y, z) dxdydz = 2\text{Vol}(E) = \frac{4\pi}{3},$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che E é il complementare nel cilindro di raggio di base 1 e altezza 1 (il cui volume é π) del cono retto di raggio di base 1 e altezza 1 (il cui volume é $\pi/3$).

Soluzione 4 Il gradiente della funzione é dato da

$$\nabla f(x, y) = 2(1 + e^{x^2 - y^2})(x, -y)$$

che si annulla esclusivamente per $(x, y) = (0, 0)$. Dato che in tale punto la matrice Hessiana di f é data da

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha autovalori 4 e -4, quindi é indefinita e quindi $(0, 0)$ é un punto di sella.

Soluzione 5 La funzione f é dispari su $[-\pi,\pi]$, e quindi i coefficienti a_k, per $k \geq 0$, della serie di Fourier sono tutti nulli. Inoltre, l'estensione 2π–periodica di f é continua come funzione su $\mathbb{R}$ e quindi la serie di Fourier converge totalmente su $\mathbb{R}$ alla funzione f. Per il calcolo dei coefficienti, abbiamo che per $k \geq 1$,

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 x - x^3)\mathrm{sen}\,(kx)dx = \frac{12}{k^3}(-1)^{k+1}.$$

Otteniamo quindi lo sviluppo, valido in $[-\pi,\pi]$

$$(\pi^2 x - x^3) = 12\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}\mathrm{sen}\,(kx).$$

Dalla formula di Parseval

$$\int_{-pi}^\pi f(x)^2 dx = \pi\sum_{k=1}^\infty b_k^2$$

deduciamo infine la somma della serie

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Facoltà di Ingegneria,

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 20 febbraio 2012

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t^2 + y(t)^2}{ty(t)} \\ \\ y(-1) = 1. \end{cases}$$

Della soluzione trovata, determinarne il dominio massimale e tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 Dire se nel punto $(0,0,2)$ l'equazione

$$ze^x + y\ln z - 3x\cos y - 2 = 0$$

definisce implicitamente una superficie; in caso, determinare piano tangente e retta normale alla superficie in $(0,0,2)$ e scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione implicita $z = g(x,y)$ centrato in $(0,0)$.

Esercizio 3 Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = xye^{-4x^2-y^2}$$

sull'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1/4\}$.

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma \frac{1}{z^4} d\Sigma$$

con $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1/\sqrt{x^2+y^2}, 1 \leq z \leq 2\}$.

Esercizio 5 Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x-1)^k}{2k^2 + x}.$$

Soluzione 1 L'equazione data é di tipo omogeneo; poniamo quindi $v(t) = y(t)/t$, da cui si arriva all'equazione

$$\begin{cases} v(t)v'(t) = \dfrac{1}{t} \\ \\ v(-1) = -1. \end{cases}$$

Tale problema ha come soluzione

$$v(t)^2 = 1 + \ln t^2;$$

tale soluzione é definita per $t \leq -1/\sqrt{e}$ ed equivale alla soluzione

$$y(t) = -t\sqrt{1 + \ln t^2}.$$

Soluzione 2 Calcoliamo il gradiente della funzione f:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(ze^x - 3\cos y, \ln z + 3x\mathrm{sen}\, y, e^x + \frac{y}{z}\right)$$

e quindi $\nabla f(0,0,2) = (-1, \ln 2, 1)$. Quindi l'equazione data definisce implicitamente una superficie intorno a $(0,0,2)$ che é grafico sia rispetto ad x, che rispetto ad y che rispetto a z. Il vettore $(-1, \ln 2, 1)$ rappresenta la direzione normale alla superficie in $(0,0,2)$, e quindi il piano tangente avrá equazione

$$(-1, \ln 2, 1) \cdot (x, y, z - 2) = 0,$$

da cui

$$x - y\ln 2 - z + 2 = 0.$$

La retta normale sará invece parametrizzata da

$$(x,y,z) = (0,0,2) + t(-1, \ln 2, 1),$$

cioé

$$\begin{cases} y = -x\ln 2 \\ z = 2 - x. \end{cases}$$

Per il polinomio di Taylor della funzione g, partiamo dal fatto che $g(0,0) = 2$ ed utilizziamo le espressioni

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0)} = 1,$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0)} = -\ln 2,$$

cioé

$$\nabla g(0,0) = (1, -\ln 2).$$

Per le derivarte seconde bisogna derivare due volte rispetto ad x e y l'equazione

$$f(x,y,g(x,y)) = g(x,y)e^x + y\ln g(x,y) - 3x\cos y - 2 = 0;$$

si ottiene la matrice Hessiana di g in $(0,0)$

$$Hg(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & \ln 2 - 1/2 \\ \ln 2 - 1/2 & \ln 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi la formula di Taylor sará data da

$$\begin{aligned}
g(x,y) =& g(0,0) + \nabla g(0,0)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}Hg(0,0)(x,y)\cdot(x,y) + o(\|(x,y)\|^2)\\
=& 2 + (1, -\ln 2)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & \ln 2 - 1/2 \\ \ln 2 - 1/2 & \ln 2 \end{pmatrix}(x,y)\cdot(x,y) + o(\|(x,y)\|^2)\\
=& 2 + x - y\ln 2 - 2x^2 + xy\ln 2 - \frac{xy}{2} + \frac{y^2\ln 2}{2} + o(\|(x,y)\|^2).
\end{aligned}$$

Soluzione 3 Iniziamo col calcolare il gradiente della funzione; troviamo che

$$\nabla f(x,y) = e^{-4x^2-y^2}(y - 8x^2y, x - 2xy^2).$$

Tale gradiente si annulla in un unico punto interno ad E, l'origine $(0,0)$ dove la funzione vale 0. Per i punti di bordo, possiamo utilizzare la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}\cos t \\[2ex] y = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t \end{cases}$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Troviamo quindi la funzione

$$g(t) = f\left(\frac{1}{4}\cos t, \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right) = \frac{1}{16e^{1/4}}\operatorname{sen}(2t);$$

tale funzione ha quattro punti stazionari, corrispondenti a $t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$. In definitiva troviamo che

$$\max_E f = \frac{1}{16e^{1/4}} \qquad \text{assunto nei punti } \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),$$

mentre

$$\min_E f = -\frac{1}{16e^{1/4}} \qquad \text{assunto nei punti } \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

Soluzione 4 La superficie Σ é il grafico della funzione $g(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$ con dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$. L'integrale diventa quindi

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \frac{1}{z^4}d\Sigma =& \int_D \frac{1}{g(x,y)^4}\sqrt{1 + \|\nabla g(x,y)\|^2}dxdy\\
=& \int_D (x^2+y^2)\sqrt{1 + (x^2+y^2)^2}dxdy\\
=& \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1/2}^1 \varrho^3\sqrt{1+\varrho^4}d\varrho\\
=& \frac{\pi}{192}\left(128\sqrt{2} - 17\sqrt{17}\right).
\end{aligned}$$

Soluzione 5 Poniamo

$$u_k(x) = \frac{(-1)^k(x-1)^k}{2k^2+x}.$$

Per lo studio della convergenza puntuale, applichiamo il criterio del rapporto per trovare che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|u_{k+1}(x)|}{|u_k(x)|} = |x-1|.$$

La serie converge quindi sicuramente per $x \in (0,2)$, mentre non converge per $x < 0$ e per $x > 2$. Nei punti estremi, cioé per $x = 0$ e $x = 2$ troviamo le due serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k^2+2}.$$

Dato che le due serie convergono assolutamente, abbiamo convergenza puntuale e assoluta per $x \in [0,2]$. Studiamo ora la convergenza totale; mediante lo studio delle derivate di u_k, si vede subito che le funzioni u_k sono monotone in $[0,2]$, e quindi

$$\sup_{[0,2]} |u_k(x)| = \frac{1}{2k^2}$$

e la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$$

é convergente, quindi la serie converge totalmente in $[0,2]$.

Facoltà di Ingegneria,

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 11 giugno 2012

Esercizio 1 Risolvere, al variare del parametro reale $a \in \mathbb{R}$, il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = a(1 + \cos y(t)) \\ \\ y(0) = \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$$

tracciare quindi un grafico qualitativo della soluzione e dire come cambia la soluzione al variare del dato iniziale $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Determinare il parametro d'arco della curva $y = \cosh(x)$, $x \geq 0$; dopo aver riparametrizzato la curva mediante l'ascissa curvinilinea, determinare i versori tangente e normale e calcolare la curvatura della curva in ogni suo punto.

Esercizio 3 Discutere, al variare dei paremetri reali $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, la regolaritá delle superfici

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by = 0\}, \Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = cz^2\},$$
$$\Sigma_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = d\};$$

dimostrare quindi che tali superfici sono ortogonali tra loro e determinare il volume di

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by \geq 0, x^2 + y^2 \leq cz^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq d\}.$$

Esercizio 4 Determinare il lavoro del campo

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x + y + z)^2}(yz(y + z), xz(x + z), xy(x + y))$$

lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t, 2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t, 2 - \sqrt{\frac{2}{3}}\cos t\right);$$

dire lungo quali altre curve si ottiene lo stesso risultato motivando la risposta.

Esercizio 5 Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione π–periodica dispari definita in $[0, \frac{\pi}{2}]$ da $f(x) = \operatorname{sen} x$; discuterne quindi le varie convergenze.

Soluzione 1 L'equazione data pué essere trattata come equazione a variabili separabili; se $a = 0$, allora la soluzione é costante, $y(t) \equiv \frac{\pi}{2}$. Altrimenti, siccome col dato iniziale assegnato non si ha $\cos y(t) = -1$, l'equazione si risolve scrivendo

$$\frac{y'(t)}{1 + \cos y(t)} = a.$$

Integrando la precedente espressione grazie al fatto che $1 + \cos y = 2\cos^2 \frac{y}{2}$, si ottiene la soluzione in forma implicita

$$\tan \frac{y(t)}{2} = at + 1.$$

Siccome $\frac{y(0)}{2} = \frac{\pi}{4} \in (0, \frac{\pi}{2})$, possiamo invertire la funzione tangente e ottenere

$$y(t) = 2 \arctan(at + 1).$$

Tali funzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$ a valori in $(-\pi, \pi)$; esse sono crescenti per $a > 0$ e decrescenti per $a < 0$. Se invece di fissare il dato iniziale pensiamo a $y(0) = y_0$ variabile, otteniamo soluzioni costanti se $y_0 = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; per valori differenti di y_0 avremo soluzioni simili a quella giá determinata, solo traslata a destra o a sinistra.

Soluzione 2 Una parametrizzazione della curva data é

$$\gamma(x) = (x, \cosh(x)), \qquad x \geq 0.$$

Dato che stiamo considerando una curva cartesiana, essa é semplice, non chiusa, illimitata e regolare dato che la funzione coseno iperbolico é regolare. Il parametro d'arco si calcola per ogni $t > 0$

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(x)\| dx = \int_0^t \cosh(x) dx = \sinh(t).$$

La parametrizzazione per lunghezza d'arco si ottiene ricavando

$$t = \operatorname{arcsenh}(s) = \ln(s + \sqrt{s^2 + 1})$$

e sostituendo in γ; si ottiene quindi la curva $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$,

$$\psi(s) = (\ln(s + \sqrt{s^2 + 1}), \sqrt{1 + s^2}).$$

Il versore tangente altro non é che

$$\tau_\psi(s) = \psi'(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}(1, s),$$

mentre dal fatto che

$$\tau'_\psi(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}^3}(-s, 1) = \kappa_\psi(s)\nu_\psi(s),$$

ricaviamo che

$$\nu_\psi(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}(-s, 1), \qquad \kappa_\psi(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Soluzione 3 Notiamo anzitutto che si deve avere $c \geq 0$ e $d \geq 0$ altrimenti $\Sigma_2 = \Sigma_3 = \emptyset$. Le tre superfici sono gli zeri delle seguenti funzioni:

$$g_1(x, y, z) = ax + by, \qquad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - cz^2,$$

$$g_3(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - d;$$

tali funzioni sono di classe C^1 per ogni scelta dei parametri e quindi le superfici saranno regolari se i gradienti sono non nulli;

$$\nabla g_1(x,y,z) = (a,b,0), \qquad \nabla g_2(x,y,z) = (2x, 2y, -2cz),$$

$$\nabla g_3(x,y,z) = (2x, 2y, 2z).$$

Troviamo quindi che Σ_1 é una superficie regolare se almeno uno tra a e b é non nullo e in tal caso abbiamo un piano verticale contenente l'asse z; Σ_2 coincide con l'asse delle z se $c = 0$ e quindi non é una superficie, mentre se $c > 0$ é un cono e quindi regolare ad eccezione dell'origine; Σ_3 si riduce ad un punto solo se $d = 0$ mentre é una sfera di raggio $\sqrt{d}$ se $d > 0$.

I tre vettori $v_1 = (a,b,0)$, $v_2 = (2x, 2y, -2cz)$ e $v_3 = (2x, 2y, 2z)$ rappresentano vettori ortogonali alle superfici che quindi saranno mutualmente ortogonali se tali vettori sono ortogonali tra loro. Consideriamo l'intersezione $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$

$$v_1 \cdot v_2 = 2ax + 2by = 2(ax + by) = 0$$

perché (x,y,z) appartengono ad esempio a Σ_1; per $\Sigma_1 \cap \Sigma_3$

$$v_1 \cdot v_3 = 2ax + 2ay = 0$$

per lo stesso motivo di prima; infine per $\Sigma_2 \cap \Sigma_3$

$$v_2 \cdot v_3 = 4x^2 + 4y^2 - 4cz^2 = 4(x^2 + y^2 - cz^2) = 0$$

in quanto $(x,y,z) \in \Sigma_2$.

Calcoliamo ora il volume dell'insieme E; notiamo preliminarmente che l'insieme E è individuato dalla parte di cono

$$E' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq d, x^2 + y^2 \leq cz^2\}$$

contenuta nella palla di raggio $\sqrt{d}$ tagliato a metà dal piano verticale

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by = 0\}.$$

Il volume di E sarà quindi la metà del volume di E'. Per calcolare il volume di E' possiamo notare che tale insieme è semplice rispetto all'asse z, cioè

$$E' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{cd}{c+1} : \frac{x^2+y^2}{c} \leq z \leq \sqrt{d - x^2 - y^2}\},$$

quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(E) =& \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(E') = \frac{1}{2}\int_{B_{\sqrt{\frac{cd}{c+1}}}} dxdy \int_{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{c}}}^{\sqrt{d-x^2-y^2}} dz \\
=& \frac{1}{2}\int_{B_{\sqrt{\frac{cd}{c+1}}}} \left(\sqrt{d - x^2 - y^2} - \sqrt{\frac{x^2+y^2}{c}}\right) dxdy \\
=& \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{\frac{cd}{c+1}}} \varrho \left(\sqrt{d - \varrho^2} - \frac{\varrho}{\sqrt{c}}\right) d\varrho \\
=& \frac{\pi(c+1)d\sqrt{d}}{3}(\sqrt{c+1} - 1).
\end{aligned}$$

Soluzione 4 É facile notare che

$$\text{rot } F(x, y, z) = 0,$$

quindi il campo é irrotazionale e la curva γ é una curva chiusa contenuta nel dominio di F; se ne conclude che

$$\int_\gamma F \cdot d\vec{s} = 0.$$

Il campo é conservativo in ogni componente connessa del suo dominio, che é dato da due semispazi delimitati dal piano $x + y + z = 0$, quindi in ogni curva chiusa ivi compresa il lavoro é nullo; si puó anche notare che

$$F(x, y, z) = \nabla \frac{xyz}{x + y + z},$$

che quindi determina il potenziale di F.

Soluzione 5 La funzione é π–periodica dispari, quindi nello sviluppo compariranno solo i termini che contengono le funzioni seno; il periodo $T = \pi$ implica che la pulsazione $\omega = 2$; si tratta quindi di calcolare gli integrali

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \ \operatorname{sen}(2nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \ \operatorname{sen}(2nx) dx \\ =& \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos((2n-1)x) - \cos((2n+1)x)) \, dx \\ =& - (-1)^n \frac{4n}{\pi(4n^2 - 1)}. \end{aligned}$$

La serie di Fourier sará quindi data da

$$-\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{4n^2 - 1} \operatorname{sen}(2nx).$$

Siccome l'estensione π–periodica della funzione $\operatorname{sen} x$ é discontinua nei punti $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la serie converge puntualmente alla regolarizzata di $\operatorname{sen} x$ che coincide con l'estensione periodica di $\operatorname{sen} x$ in $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e vale 0 nei restanti punti; la convergenza sará uniforme negli intervalli chiusi contenuti in $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ mentre non ci potrá essere convergenza totale.

Facoltà di Ingegneria,

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 16 luglio 2012

Esercizio 1 Al variare del parametro intero $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(t) + \frac{n-1}{t} y'(t) = 0, \qquad t > 0;$$

tra le soluzioni trovate determinate quelle che soddisfano $y(1) = 1$ e $y(2) = 0$ (Sugg: si ponga $v(t) = y'(t)$).

Esercizio 2 Dire se la parametrizzazione $r : [-1, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$r(s,t) = (\cosh(s)\cos(t), \cosh(s) \operatorname{sen}(t), s)$$

definisce una superficie regolare Σ; determinare quindi l'area di Σ.

Esercizio 3 Determinare il piano Π tangente la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nel punto $(1, 1, \sqrt{2})$; calcolare quindi il volume dell'insieme

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \Pi\right\}.$$

Esercizio 4 Determinare la massima e la minima distanza dall'origine dei punti della superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \leq 1, 4x^2 + y^2 = \frac{1}{(1+z^2)^2}\right\}.$$

Esercizio 5 Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione π–periodica definita in $[0, \pi]$ da $f(x) = \operatorname{sen} x$; discuterne quindi le varie convergenze e calcolare le somme delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2},.$$

Soluzione 1 Con la sostituzione $v(t) = y'(t)$ troviamo l'equazione

$$v'(t) + \frac{n-1}{t} v(t) = 0.$$

Si distinguono quindi vari casi.

$n = 1$ L'equazione diventa $v(t) = 0$, e quindi $y(t) = c_1 t + c_2$. Le condizioni $y(1) = 1$ e $y(2) = 0$ vengono verificate quindi dalla solzione $y(t) = 2 - t$.

$n > 0$ L'equazione é a variabili separabili; c'e' sicuramente la soluzione $v(t) \equiv 0$, cioé $y(t) =$ *costante*. Se vogliamo cercare le soluzioni non costanti, dividiamo per $v(t)$ e troviamo, integrando,

$$v(t) = y'(t) = \frac{c_1}{t^{n-1}};$$

per integrare questa espressione, dobbiamo considerare i seguenti casi.

$n = 2$ In questo caso abbiamo $y'(t) = c_1/t$, da cui l'integrale generale

$$y(t) = c_2 + c_1 \ln t.$$

Le condizioni $y(1) = 1$ e $y(2) = 0$ vengono verificate quindi dalla solzione $y(t) = 1 - \ln_2 t$.

$n > 2$ Si ottiene l'integrale generale

$$y(t) = c_2 + \frac{c_1}{2-n} t^{2-n}.$$

Le condizioni $y(1) = 1$ e $y(2) = 0$ vengono verificate quindi dalla solzione

$$y(t) = \frac{t^{2-n} - 2^{2-n}}{1 - 2^{2-n}}.$$

Soluzione 2 La superficie é ottenuta dalla rotazione attorno all'asse z della curva

$$r(s) = (\cosh(s), 0, s), \qquad s \in [-1, 1].$$

Si noti che $r_1(s) = \cosh(s) \neq 0$ per ogni s e che

$$r'(s) = (\sinh(s), 0, 1), \qquad \|r'(s)\| = \cosh(s) \neq 0.$$

La superficie Σ é quindi una superficie regolare. Per il calcolo dell'area si ha che

$$\begin{aligned}\text{Area}(\Sigma) &= \int_{[-1,1]\times[0,2\pi]} \|r_s(s,t) \times r_t(s,t)\| ds dt \\ &= \int_{[-1,1]\times[0,2\pi]} r_1(s)\|r'(s)\| ds dt \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \cosh(s)^2 ds = \frac{\pi}{2e^2}(e^4 + 4e^2 - 1).\end{aligned}$$

Soluzione 3 Dato che la sfera é data implicitamente come zero della funzione $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$, il vettore $\nabla g(1, 1, \sqrt{2})$ rappresenta la direzione normale alla sfera in $(1, 1, \sqrt{2})$ e quindi il piano tangente é individuato dall'equazione

$$\nabla g(1, 1, \sqrt{2}) \cdot (x - 1, y - 1, z - \sqrt{2}) = 0.$$

Dato che
$$\nabla g(x,y,z) = (2x,2y,2z), \qquad \nabla g(1,1,\sqrt{2}) = (2,2,2\sqrt{2}),$$
troviamo l'equazione del piano tangente
$$x + y + z\sqrt{2} = 4.$$
Procedendo, dato che $0 \le 4 - x - y$ sul dominio piano
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1\},$$
se ne deduce che il volume di E é dato da
$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(E) =& \int_D \frac{4-x-y}{\sqrt{2}} dxdy \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}} \int_D (2 - (x-1) - (y-1)) dxdy \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (2 - \varrho\cos\vartheta - \varrho \operatorname{sen}\vartheta)\varrho d\varrho \\
=& 2\pi\sqrt{2} \int_0^1 \varrho d\varrho = \pi\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Soluzione 4 La superficie Σ é composta da tre pezzi; la superficie
$$\Sigma_0 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |z| < 1, 4x^2 + y^2 = \frac{1}{(1+z^2)^2} \right\}.$$
e le due curve
$$C_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, 16x^2 + 4y^2 = 1 \right\},$$
$$C_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1, 16x^2 + 4y^2 = 1 \right\}.$$
La funzione da minimizzare é la distanza, o equivalentemente il quadrato della distanza
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$
Su Σ_0 possiamo usare i moltiplicatori di Lagrange:
$$\Phi(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \left(4x^2 + y^2 - \frac{1}{(1+z^2)^2} \right).$$
Si tratta quindi di risolvere il sistema
$$\nabla_{(x,y,z,\lambda)} \Phi(x,y,z,\lambda) = 0;$$
tale sistema ha come soluzioni i sei punti
$$\left(\pm\frac{1}{2}, 0, 0 \right), (0, \pm 1, 0), \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \pm\sqrt{\sqrt[3]{2} - 1} \right);$$
nei primi due punti la funzione f vale $1/4$, nei secondi punti vali 1 mentre negli ultimi due vale $\frac{3-\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}$. É facile verificare che
$$\frac{1}{4} < \frac{3 - \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} < 1.$$

Vediamo cosa succede nelle due curve C_1 e C_2; siccome si ottiene C_2 prendendo C_1 e cambiando segno a z, possiamo considerare un'unica curva. Possiamo quindi porre ad esempio $z = 1$ e considerare la funzione $x^2 + y^2 + 1$ con vincolo $16x^2 + 4y^2 = 1$. Applicando nuovamente il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si ottiene la funzione

$$x^2 + y^2 + 1 - \lambda(16x^2 + 4y^2 - 1)$$

che ha punti stazionari in $(-1/4, 0, 1)$, $(1/4, 0, 1)$, $(0, -1/2, 1)$ e $(0, 1/2, 1)$; nei primi due punti la funzione vale $17/16$ mentre nei secondi due vale $5/4$.

In definitiva abbiamo trovato che la minima distanza di Σ dall'origine é $1/2$ assunta nei punti $(\pm 1/2, 0, 0)$, mentre la massima distanza é $\sqrt{5}/2$ assunta nei punti $(0, \pm 1/2, \pm 1)$.

Soluzione 5 Se si traccia il grafico dell'estensione π periodica della funzione, si nota che la funzione é continua su tutto $\mathbb{R}$ e pari. La paritá implica che i coefficienti b_k sono tutti nulli, mentre la continuitá implica che la serie di Fourier converge totalmente e uniformemente alla funzione data; in particolare potremo scrivere che per ogni $x \in [0, \pi]$

$$\operatorname{sen} x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2kx).$$

Calcoliamo quindi i coefficienti a_k:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = \frac{2}{\pi},$$

mentre

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos(2kx) dx = -\frac{2}{\pi(4k^2 - 1)}.$$

La serie diventa quindi

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(2kx)$$

con uguaglianza per $x \in [0, \pi]$. Se valutiamo la precedente espressione in $x = 0$, si ottiene che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Valutandola invece in $x = \pi/2$ si ottiene che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} = \frac{1 - \pi}{2}.$$

Infine, usando l'identitá di Parseval, si ottiene che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2 - 2}{4}.$$

Facoltà di Ingegneria,

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 10 settembre 2012

Esercizio 1 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) = (x + y'(x))^2 - x - y'(x) - 1; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 2 Data $f(x, y, z) = x^2 e^z + z e^y + y^2$, mostrare che in $(0, 0, 0)$ si può applicare il Teorema della funzione implicita e scrivere l'equazione del piano tangente al livello $\{f = 0\}$ in tale punto.

Esercizio 3 Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = \sqrt{9 + x^2 + y^2}(3yz, -3xz, x^2 + y^2)$$

uscente dalla superficie Σ orientata con la normale rivolta verso l'alto, dove Σ è parametrizzata da $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u, v) = (e^u \cos v, e^u \mathrm{sen}\, v, 3u), \quad D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi\}.$$

Esercizio 4 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x}{2} - y^2$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 5 Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}.$$

Calcolarne quindi la somma.

Soluzione 1 Ponendo $z(x) = x + y'(x)$, l'equazione differenziale può essere riscritta nella forma

$$x + y' = (x + y')^2 - y'' - 1,$$

cioè

$$z' = z^2 - z.$$

Questa è una equazione differenziale del prim'ordine che può essere trattata come equazione a variabili separabili; all'equazione va abbinata la condizione iniziale $z(0) = 2$. Siccome le funzioni $z(x) = 0$ e $z(x) = 1$ non soddisfano la condizione iniziale, la soluzione si trova nella forma

$$\left| \frac{z(x) - 1}{z(x)} \right| = \alpha e^x, \quad \alpha > 0;$$

se imponiamo la condizione iniziale troviamo che

$$z(x) = \frac{2}{2 - e^x}.$$

A questo punto il problema diventa

$$\begin{cases} x + y' = \frac{2}{2-e^x} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Tale problema ha per soluzione la funzione

$$y(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(2 - e^x).$$

Soluzione 2 Si ha $\nabla f(x, y, z) = (2xe^z, ze^y + 2y, x^2e^z + e^y)$, e quindi $\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$. Se ne deduce che il livello $\{f = 0\}$, a cui il punto $(0, 0, 0)$ appartiene, è localmente il grafico di una funzione $z = g(x, y)$. Per tale funzione si ha che

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = 0.$$

Il piano tangente sarà quindi orizzontale e descritto dall'equazione $z = 0$.

Soluzione 3 Anche se la divergenza del campo è nulla, non possiamo concludere che il flusso sia nullo in quanto la superficie non è chiusa. Dobbiamo quindi calcolare il seguente integrale di superficie;

$$I = \int_\Sigma F \cdot \nu_\Sigma d\Sigma.$$

Utilizzando la parametrizzazione data, si ottiene che

$$\begin{aligned} I &= \int_D F(\Phi(u, v)) \cdot \Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v) du dv \\ &= \int_D e^{4u}\sqrt{9 + e^{2u}} du dv \\ &= \frac{\pi}{15}(1 + e^2)^{3/2}(5e^2 - 2 - 2e^4) - \frac{2\pi}{15}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Soluzione 4 La funzione è continua ma non derivabile in $(0,0)$; pertanto, i massimi e minimi esitono per il Teorema di Weierstrass in quanto E è compatto, ma i candidati sono il punto $(0,0)$ dove f vale 0, i punti in cui il gradiente si annulla e i punti di bordo. Il gradiente si annulla nei punti $(1/4, \pm\sqrt{3}/4)$ dove la funzione vale $3/16$. Sul bordo, parametrizzando otteniamo la funzione

$$g(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t) = 1 - \frac{\cos t}{2} - \sin^2 t;$$

tale funzione ha un massimo per $t = 3/2$ dove vale $3/2$, mentre ha un minimo per $t = \arccos(1/4) + k\pi$ dove vale $-1/16$. In definitiva

$$\max_E f = \frac{3}{2} \quad \text{assunto in } (-1,0)\,,$$

$$\min_E f = -\frac{1}{16} \quad \text{assunto in } \left(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{15}}{16}\right).$$

Soluzione 5 Mediante il cambio di variabili $y = x/2$ si ottiene la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} y^{n+1}.$$

Tale serie converge puntualmente nell'insieme $y \in [-1,1)$ (Teorema di Leibnitz), uniformemente nell'insieme $y \in [-1,a]$ con $-1 \le a < 1$, mentre converge totalmente negli insiemi del tipo $y \in [a,b]$ con $-1 < a \le b < 1$. Per quanto riguarda la somma di tale serie, notiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} y^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^y t^n dt = \int_0^y \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^y \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-y).$$

Tornando alla variabile x, otteniamo quindi che si ha convergenza puntuale nell'intervallo $[-1/2, 1/2)$, convergenza uniforme per $x \in [-1/2, a]$ con $-1/2 \le a < 1/2$ e convergenza totale per $x \in [a,b]$ con $-1/2 < a \le b < 1/2$; inoltre per quanto riguarda la somma della serie abbiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = \ln\left(\frac{2}{2-x}\right).$$

Facoltà di Ingegneria,

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 19 settembre 2012

Esercizio 1 Trovare tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale;

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t + \sqrt{t^2 + y(t)^2}}, \quad t < 0.$$

Esercizio 2 Dire se l'equazione

$$\arctan z + xy^2 + xz - y^3 - 1 = 0$$

definisce implicitamente attorno al punto $(0, -1, 0)$ una funzione $z = g(x, y)$. Di tale funzione scrivere il Polinomio di Taylor di secondo grado attorno al punto $(0, -1)$.

Esercizio 3 Dire se esiste, in senso generalizzato, il seguente integrale improprio

$$\int_E \ln(x^2 + y^2) dx dy$$

con $E = B_2(0, 0)$; calcolare in caso il valore di tale integrale.

Esercizio 4 Determinare il parametro $a \in \mathbb{R}$ per il quale sia conservativo il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{z}{x + y}, \frac{az}{x + y}, \ln(x + y) \right);$$

determinare quindi il potenziale che vale 1 nel punto $(1, 1, 1)$

Esercizio 5 Calcolare, motivando i vari passaggi, la serie di Taylor della funzione

$$f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt;$$

studiare in particolare la convergenza della serie di Taylor associata ad f.

Soluzione 1 L'equazione è una equazione di tipo omogeneo; ponendo quindi $z(t) = y(t)/t$ e tenendo conto che $t < 0$, si arriva all'equazione

$$tz'(t) = \frac{z(t)\sqrt{1+z(t)^2}}{1-\sqrt{1+z(t)^2}}.$$

Questa è una equazione a variabili separabili che integrata fornisce la soluzione in forma implicita

$$(1 + z(t)^2 - z(t) - (z(t) - 1)\sqrt{1 + z(t)^2}))(\sqrt{1 + z(t)^2} + z(t)) = ct, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

La soluzione $y(t)$ in forma implicita sarà quindi data da

$$(t^2 + y(t)^2 - ty(t) + (y(t) - t)\sqrt{t^2 + y(t)^2}))(y(t) - \sqrt{t^2 + y(t)^2}) = ct^4, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Tali soluzioni, che manteniamo in forma implicita, sono definite per ogni $t < 0$.

Soluzione 2 Si nota subito che l'identità è verificata in $(0, -1, 0)$. Inoltre, definendo $f(x, y, z) = \arctan z + xy^2 + xz - y^3 - 1$, si trova che

$$\nabla f(x,y,z) = \left(y^2 + z, 2xy - 3y^2, \frac{1}{1+z^2} + x\right),$$

da cui $\nabla f(0, -1, 0) = (1, -3, 1)$. Dato che $\partial f(0, -1, 0)/\partial z = 1 \neq 0$, allora possiamo concludere che localmente attorno a $(0, -1, 0)$ il luogo di zeri è dato dal grafico di una funzione $z = g(x, y)$. Il polinomio di Taylor è dato da

$$g(x,y) = g(0,-1) + \langle \nabla g(0,-1), (x, y+1)\rangle + \frac{1}{2}\langle Hg(0,-1)(x,y+1), (x,y+1)\rangle + o(\|(x,y+1)\|^2).$$

Bisogna quindi calcolare gradiente e matrice Hessiana di g nel punto $(0, -1)$. Per fare ciò basta scrivere

$$\arctan g(x,y) + xy^2 + xg(x,y) - y^3 - 1 = 0$$

e calcolare le varie derivate, trovando che

$$\nabla g(0,-1) = (-1, 3), \qquad Hg(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

In definitiva si trova che

$$g(x,y) = -x + 3(y+1) + x^2 - x(y+1) - 3(y+1)^2 + o(\|(x,y+1)\|^2).$$

Soluzione 3 La funzione integranda non è limitata in $(0, 0)$, quindi si tratta di calcolare

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_2 \setminus B_\varepsilon} \ln(x^2 + y^2)\,dxdy.$$

Passando alle coordinate polari troviamo che

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_2 \setminus B_\varepsilon} \ln(x^2 + y^2)\,dxdy &= \lim_{\varepsilon \to 0} 4\pi \int_\varepsilon^2 \varrho \ln \varrho\, d\varrho \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} 4\pi \left[\frac{\varrho^2}{2}\ln\varrho - \frac{\varrho^2}{4}\right]_\varepsilon^2 = 8\pi \ln 2 - 4\pi.\end{aligned}$$

Quindi la funzione è integrabile in senso generalizzato e il valore dell'integrale è dato da $8\pi \ln 2 - 4\pi$.

Soluzione 4 Condizione necessaria per cui il campo sia conservativo è che il suo rotore sia nullo; tale condizione è soddisfatta se e solo se $a = 1$. Il dominio del campo F è dato da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y > 0\},$$

cioè un semispazio; tale insieme è connesso e semplicemente connesso. Quindi il campo è conservativo. I potenziali di F sono della forma

$$U(x, y, z) = z \ln(x + y) + c.$$

Quindi il potenziale è univocamente determinato dal fatto che valga 1 in $(1, 1, 1)$ ed è dato da

$$U(x, y, z) = z \ln(x + y) + 1 - \ln 2.$$

Soluzione 5 Possiamo sfruttare la serie di Taylor

$$\operatorname{sen} t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

per concludere che la serie di Taylor della funzione integranda è data da

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Tale serie di potenze ha raggio di convergenza, quindi converge per ogni $t \in \mathbb{R}$ con convergenza totale (e quindi uniforme) in ogni compatto di $\mathbb{R}$. Questo permette di scambiare il segno di integrale con la serie per concludere che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 7 gennaio 2013

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy, specificando il dominio su cui è definita la soluzione trovata:

$$\begin{cases} y'(t) = \tan y(t) \\ \\ y(0) = -\dfrac{5}{6}\pi. \end{cases}$$

Esercizio 2 Data la funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$g(x, y, z) = (x^2 - y + 2z^2, y + z - 1),$$

dire in quali punti si può applicare il Teorema della funzione implicita; discutere in particolare l'insieme di livello $\{g = 0\}$ e trovare per esso una parametrizzazione.

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x, y, z) = \arctan(x^2 + y^2 + z^2),$$

dire, determinandoli, se ammette massimo e minimo sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y + 2z^2 = 0, y + z = 1\}.$$

Esercizio 4 Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = \frac{y}{(x^2+y^2)^\alpha}$ è integrabile in senso generalizzato sull'inseme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, |y| \leq x^\alpha\};$$

calcolare esplicitamente l'integrale per gli α per cui esso è definito.

Esercizio 5 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $(f_n)_{n\geq 1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = x^2 + n(1 - n|x|)\chi_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]}(x);$$

calcolare quindi, dicendo se si può appllicare il Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} f_n(x)dx, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

Soluzione 1 L'equazione data è a variabili separabili $y'(t) = a(t)b(y)$ con

$$a(t) = 1, \qquad b(y) = \tan y = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}.$$

Tale equazione è definita per $\cos y \neq 0$, cioè $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dato che il valore iniziale di y è $-\frac{5}{6}\pi$, siamo nelle condizioni di poter applicare il teorema di esistenza e unicità per dire che la soluzione esiste ed è unia almeno per tempi t vicini al dato iniziale $t_0 = 1$. Per trovare la soluzione, notiamo anzitutto che in corrispondenza di $\operatorname{sen} y = 0$, cioè $y \equiv k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ si hanno le soluzioni stazionarie; ancora una volta, dato che il valore iniziale non è in questa forma, dobbiamo cercare le soluzioni non stazionarie del problema. Tali soluzioni si trovano dividendo ed integrando l'equazione

$$1 = \frac{\cos y(t)}{\operatorname{sen} y(t)} y'(t) = \frac{d}{dt} \ln |\operatorname{sen} y(t)|;$$

le soluzioni di tale equazione sono date da

$$\operatorname{sen} y(t) = ce^t, \qquad c \neq 0.$$

Imponendo la condizione iniziale, troviamo $c = -\frac{1}{2}$, quindi la soluzione in forma implicita è data da

$$\operatorname{sen} y(t) = -\frac{1}{2}e^t;$$

tale soluzione è definita fintanto che $-\frac{e^t}{2} \in [-1, 1]$, cioè per $t \in (-\infty, \ln 2]$. Per esplicitare la soluzione, dobbiamo considerare la funzione inversa di $\operatorname{sen} y$, cioè la funzione arcoseno; tale inversa è però definita da $[-1, 1]$ a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dato che il valore iniziale è $-\frac{5}{6}\pi$ che non appartiene a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ma vi ci appartiene $-\frac{5}{6}\pi + \pi$, considereremo allora l'identità

$$-\frac{1}{2}e^t = \operatorname{sen} y(t) = -\operatorname{sen}(y(t) + \pi),$$

e quindi

$$y(t) = \arcsin\left(\frac{1}{2}e^t\right) - \pi, \quad t \in (-\infty, \ln 2].$$

Soluzione 2 Iniziamo col scrivere la matrice Jacobiana di g, che è data da

$$Dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & -1 & 4z \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

tale matrice ha sicuramente rango almeno 1 in quanto la seconda riga è non nulla, ed ha rango 2 quando la prima riga non è multiplo della seconda, cosa che capita se e solo se

$$x = 0, \qquad z = -\frac{1}{4}.$$

Quindi, nei punti appartenenti alla retta $\{x = 0, z = -\frac{1}{4}\}$ la matrice Jacobiana ha rango 1; notiamo però che in tali punti la funzione vale

$$g\left(0, y, -\frac{1}{4}\right) = \left(-y + \frac{1}{8}, y - \frac{5}{4}\right).$$

I livelli $\{g = c\}$, $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ per i quali non si applica il Teorema della funzione implicita sono quelli per cui è possibile risolvere rispetto ad y, il sistema

$$\begin{cases} -y + \dfrac{1}{8} = c_1 \\[2ex] y - \dfrac{5}{4} = c_2. \end{cases}$$

Tali livelli sono quelli per cui $c_2 = -\frac{9}{8} - c_1$, cioè i punti $c = (c_1, c_2)$ appartenenti alla retta $(0, -\frac{9}{8}) + t(1, -1)$.

Dato che $(0,0)$ non appartiene a tale retta, se ne deduce che in tutti i punti appartenenti all'insieme $\{g = 0\}$ si può applicare il teorema della funzione implicita e dedurne che, attorno ad ogni suo punto, tale insieme è una curva. Per parametrizzare tale curva, possiamo sfruttare il fatto che $g_2(x,y,z) = y + z - 1 = 0$ implica che $y = 1 - z$ e sostituirlo nell'equazione $g_1(x,y,z) = x^2 - y + 2z^2 = 0$ per trovare l'equazione

$$x^2 + 2\left(z + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{8},$$

cioè

$$\frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{9}\left(z + \frac{1}{4}\right)^2 = 1.$$

Si riconosce quindi l'equazione di una ellisse centrata in $(x,z) = (0, -\frac{1}{4})$ e di semiassi $3/2\sqrt{2}$ e $3/4$; possiamo quindi considerare la parametrizzazione

$$x = \frac{3}{2\sqrt{2}}\cos t, \quad z = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\operatorname{sen} t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

In definitiva, sfruttando il fatto che $y = 1 - z$, abbiamo trovato che l'insieme $\{g = 0\}$ è parametrizzato dalla curva $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t) = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\cos t, \frac{5}{4} - \frac{3}{4}\operatorname{sen} t, -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\operatorname{sen} t\right);$$

si nota in particolare che l'insieme è una curva semplice chiusa, quindi l'insieme dato è compatto.

Soluzione 3 Come visto nel punto precedente, l'insieme in considerazione è compatto e la funzione data è continua; quindi, di sicuro, esistono massimo e minimo. Per semplificare i conti, dato che la funzione arcotangente è monotona crescenta, la ricerca dei massimi e minimi di f equivale alla ricerca dei massimi e minimi della funzione

$$\tilde{f}(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

cioè dalla funzione quadrato della distanza dall'origine; il problema quindi è equivalente ad un problema di ricerca dei punti di massima e minima distanza dall'origine. Dato che l'insieme E non ha punti interni, cerchiamo direttamente i punti stazionari vincolati; possiamo procedere in due modi; uno mediante la parametrizzazione determinata nel punto precedente, e quindi mediante la ricerca dei punti stazionari della funzione

$$h(t) = \tilde{f}(r(t)) = \frac{11}{4} - \frac{9}{4}\operatorname{sen} t,$$

oppure mediante la teoria dei moltiplicatori di Lagrange introducendo la funzione Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 - y + 2z^2) - \mu(y + z - 1);$$

in entrambi i casi si trovano come punti stazionari vincolati i due punti $(0, 1/2, 1/2)$ e $(0, 2, -1)$. Per confronto dei valori, troveremo quindi che

$$\min_E f = \arctan\frac{1}{2}, \qquad \text{assunto in } \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

mentre

$$\max_E f = \arctan 5, \qquad \text{assunto in } (0, 2, -1).$$

Soluzione 4 L'unico problema che eventualmente la funzione può avere è nell'origine, nel caso in cui $\alpha > 0$; se $\alpha \leq 0$ invece la funzione è continua. L'insieme di integrazione invece è limitato per $\alpha \geq 0$, mentre è illimitato per $\alpha < 0$ e la non limitatezza si verifica per $x \to 0$. L'unico caso in cui si ha l'integrale di una funzione continua su di un insieme chiuso e limitato è $\alpha = 0$, nel qual caso l'integrale è nullo in quanto la funzione integranda è dispari in y e l'insieme E è simmetrico rispetto all'asse x.

Studiamo in ogni caso l'integrale come se fosse un integrale generalizzato, considerando come insiemi invadenti gli insiemi

$$E_h = \left\{ \frac{1}{h} \leq x \leq 1, |y| \leq x^\alpha \right\}.$$

Dato che la funzione da integrare è dispari in y e l'insieme E_h è simmetrico rispetto all'asse x, abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_{E_h} |f(x,y)|dxdy =& 2\int_{\frac{1}{h}}^1 dx \int_0^{x^\alpha} \frac{y}{(x^2+y^2)^\alpha} dy \\ =& 2\int_{\frac{1}{h}}^1 dx \int_0^{x^\alpha} y(x^2+y^2)^{-\alpha} dy.\end{aligned}$$

Dividiamo due casi; $\alpha = 1$ e $\alpha \neq 1$. Nel primo caso otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_{E_h} |f(x,y)|dxdy =& 2\int_{\frac{1}{h}}^1 dx \int_0^{x} \frac{y}{x^2+y^2} dy \\ =& \int_{\frac{1}{h}}^1 \ln 2 dx \\ =& \ln 2 \left(1 - \frac{1}{h}\right) \leq \ln 2.\end{aligned}$$

Dato che

$$\lim_{h \to +\infty} \ln 2 \left(1 - \frac{1}{h}\right) = \ln 2,$$

se ne deduce che

$$\sup_h \int_{E_h} |f(x,y)|dxdy \leq \ln 2,$$

cioè la funzione è integrabile per $\alpha = 1$. Per $\alpha \neq 1$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{E_h} |f(x,y)|dxdy =& 2\int_{\frac{1}{h}}^1 dx \int_0^{x^\alpha} y(x^2+y^2)^{-\alpha} dy \\ =& \frac{1}{1-\alpha} \int_{\frac{1}{h}}^1 \Big((x^2 + x^{2\alpha})^{1-\alpha} - x^{2(1-\alpha)} \Big) dx \\ =& \frac{1}{1-\alpha} \int_{\frac{1}{h}}^1 x^{2(1-\alpha)} \Big((1 + x^{2(\alpha-1)})^{1-\alpha} - 1 \Big) dx.\end{aligned}$$

Distinguiamo ancora i due casi, $\alpha < 1$ e $\alpha > 1$; nel primo caso, $(1-\alpha) > 0$ e quindi

$$(1 + x^{2(\alpha-1)})^{1-\alpha} - 1 \sim x^{-2(1-\alpha)},$$

cioè

$$x^{2(1-\alpha)} \Big((1 + x^{2(\alpha-1)})^{1-\alpha} - 1 \Big) \sim -(1-\alpha) x^{2(1-\alpha)-2(1-\alpha)^2} = x^{2\alpha - 2\alpha^2},$$

Dato che la funzione x^p è integrabile in 0 per $p > -1$, ponendo $p = 2\alpha - 2\alpha^2$, si ottiene, tenendo presente che $\alpha < 1$, che si ha integrabilità per

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} < \alpha < 1.$$

Nel caso $\alpha > 1$, scrivendo

$$(1 + x^{2(\alpha-1)})^{1-\alpha} - 1 = \left(\frac{1}{1 + x^{2(\alpha-1)}}\right)^{\alpha-1} - 1 \sim (1 - x^{2(\alpha-1)})^{\alpha-1} - 1 \sim -(\alpha-1)x^{2(\alpha-1)},$$

cioè

$$x^{2(1-\alpha)}\Big((1 + x^{2(\alpha-1)})^{1-\alpha} - 1\Big) \sim -(\alpha-1)x^{2(1-\alpha)-2(1-\alpha)} = (1-\alpha),$$

funzione integrabile. Riassumendo, se ne conclude che la funzione data è integrabile su E per

$$\alpha > \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Per quanto riguarda il valore degli integrali, avremo, sfruttando le simmetrie della funzione e dell'insieme, che per $\alpha > \frac{1-\sqrt{3}}{2}$,

$$\int_E \frac{y}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy = 0.$$

Per $\alpha \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ il valore 0 sembrerebbe ancora il valore più naturale che tale integrale può assumere; si ricordi però che l'integrale di una funzione con segno $f = f^+ - f^-$ è definito come

$$\int_E f(x,y)dxdy = \int_E f^+(x,y)dxdy - \int_E f^-(x,y)dxdy,$$

e quest'ultima espressione, nel caso l'integrale non sia assolutamente convergente, è una forma indeterminata. Questo vuol dire che a seconda di come si scelgono gli insiemi invadenti si può ottenere un qualsiasi valore; cioè, per gli insiemi E_h prima considerati, abbiamo che

$$\lim_{h\to+\infty} \int_{E_h} f(x,y)dxdy = 0,$$

ma per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste una successione di insiemi invadenti $\tilde{E}_h$ per cui

$$\lim_{h\to+\infty} \int_{\tilde{E}_h} f(x,y)dxdy = \lambda.$$

Soluzione 5 Per quanto riguarda la convergenza puntuale, dato che

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } |x| \geq \dfrac{1}{n} \\ \\ x^2 - n^2|x| + n & \text{se } |x| \leq \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

allora è facile notare che la successione converge puntualmente a x^2 per $x \neq 0$, mentre dato che $f_n(0) = n$, non c' è convergenza in $x = 0$. La convergenza non può essere quindi uniforme, visto che ogni f_n è continua su $\mathbb{R}$; più in dettaglio, dato che $f_n(x) = x^2$ per $|x| \geq \frac{1}{n}$,

$$\sup_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]\setminus\{0\}} |n^2 - n|x|| = n.$$

Si avrà però convergenza uniforme negli intervalli $[a, +\infty)$ e $(-\infty, -a]$ per ogni $a > 0$; quindi su $[-1, -\frac{1}{4}]$ possiamo applicare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per ottenere che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} f_n(x)dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} x^2 dx = \frac{63}{192}.$$

Per quanto riguarda il secondo integrale invece il Teorema non si applica e in effetti le due quantità differiscono; infatti

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

mentre

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (x^2 + n - n^2 x)dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 dx = \frac{5}{6}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 28 gennaio 2013

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy;:

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{2t^2y(t) - 3y^3(t)}{t^3 + ty^2(t)} \\ \\ y(-1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Della soluzione trovata specificare il dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 Verificare la validità del Teorema di Stokes del rotore per il campo

$$F(x, y, z) = (y, z, x)$$

sulla superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, x + y + z = 0\}$ orientata in modo che la terza componente del versore normale sia positiva.

Esercizio 3 Discutere la regolarità della funzione

$$f(x, y) = \frac{x \operatorname{sen} y}{y};$$

dire in particolare se $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Determinare quindi e classificare i punti stazionari della funzione data.

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int_E |(1 + x)z - 1 + x| dxdydz$$

con $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Esercizio 5 Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{x}{k^4x + k}}, \qquad x \geq 0.$$

Dire in particolare se e dove la funzione f è derivabile e tracciare un grafico qualitativo di f.

Soluzione 1 L'equazione data è di tipo omogenea; si pone quindi $y(t) = tz(t)$ e quindi l'equazione diventa

$$tz'(t) + z(t) = \frac{2z(t) - 3z^3(t)}{1 + z^2(t)},$$

cioè

$$z'(t) = \frac{1}{t}\frac{z(1 - 4z^2(t))}{1 + z^2(t)}$$

con la condizione iniziale $z(-1) = -\frac{1}{2}$. Siccome la soluzione stazionaria $z(t) \equiv -\frac{1}{2}$ è soluzione dell'equazione, se ne deduce che questa è la soluzione del Problema di Cauchy. Quindi la soluzione è data da

$$y(t) = -\frac{t}{2};$$

tale soluzione va pensata per $t < 0$ in quanto l'equazione perde senso in $t = 0$ e il dato iniziale è assegnato con $t = -1 < 0$.

Soluzione 2 La superficie data è la prozione del piano $x + y + z = 0$ contenuta all'interno del cilindro verticale $x^2 + y^2 \leq 2$, cioè è un pezzo del grafico della funzione $z = g(x, y) = -x - y$ con $(x, y) \in B_{\sqrt{2}}(0)$. Possiamo quindi usare la parametrizzazione

$$r(x, y) = (x, y, g(x, y)), \qquad (x, y) \in B_{\sqrt{2}}(0),$$

con normale data da

$$\hat{n}_\Sigma(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla g(x, y)\|^2}}(-\nabla g(x, y), 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Il bordo di Σ con orientazione indotta dal versone $\hat{n}_\Sigma$ è parametrizzato da

$$r(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, -\sqrt{2}\cos t - \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Verifichiamo quindi l'identità

$$\int_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot \hat{\nu}_\Sigma d\Sigma = \int_{\partial^+\Sigma} F d\vec{s};$$

abbiamo anzitutto che

$$\begin{aligned}
\int_{\partial^+\Sigma} F d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(\mathrm{sen}\, t, -\cos t - \ \mathrm{sen}\, t, \cos t) \cdot \sqrt{2}(-\mathrm{sen}\, t, \cos t, \mathrm{sen}\, t - \cos t) dt \\
&= -2\int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t) dt = -6\pi.
\end{aligned}$$

D'altra parte, dato che $\mathrm{rot} F(x, y, z) = (-1, -1, -1)$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot \hat{\nu}_\Sigma d\Sigma &= \int_{B_{\sqrt{2}}(0)} (-1, -1, -1) \cdot (1, 1, 1) dx dy \\
&= -3|B_{\sqrt{2}}(0)| = -6\pi.
\end{aligned}$$

Soluzione 3 La funzione data non è definita per $y = 0$, ma può essere estesa in tale punto in modo da formare una una funzione continua e derivabile infinite volte. Il modo più veloce di vedere questo è utilizzare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\operatorname{sen} y$ per scrivere

$$f(x,y) = x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Siccome la serie è convergente per ogni $y \in \mathbb{R}$, se ne deduce che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Per quanto riguarda la ricerca dei punti stazionari, scriviamo

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}, x\frac{y\cos y - \operatorname{sen} y}{y^2}\right).$$

Tale gradiente si annulla per $x = 0$ e per $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; il punto $(0,0)$ non è un punto stazionario, in quanto per continuità, si ha che $\nabla f(0,0) = (1,0)$. Abbiamo quindi infiniti putni stazionari; per classificarli, scriviamo la matrice Hessiana di f. Troviamo che per $k \neq 0$,

$$Hf(0,k\pi) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(-1)^k}{k\pi} \\ \dfrac{(-1)^k}{k\pi} & 0. \end{pmatrix}$$

Siccome

$$\det Hf(0,k\pi) = -\frac{1}{k^2\pi^2} < 0,$$

possiamo concludere che le matrici Hessiane sono indefinite e quindi tutti i punti trovati sono punti di sella.

Soluzione 4 Dato che la funzione integrale non dipende da y, ci possiamo ricondurre ad un integrale doppio

$$\int_E f(x,y,z)dxdydz = \int_D g(x,z)dxdz$$

dove $g(x,z) = |(x+1)z - 1 + x|$ e $D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 1\}$. Siccome nell'integrale compare un valore assoluto, bisogna studiare il segno

$$(1+x)z - 1 + x \geq 0;$$

tale studio è equivalente a

$$(1+x)z \geq 1 - x;$$

per dividere per $1+x$ bisognerebbe studiare il suo segno; dato che però l'integrale è su $x^2 + z^2 \leq 1$ dove $|x| \leq 1$, se ne deduce che $1+x$ è sempre positivo. Quindi lo studio del segno, su D, si riduce alla condizione

$$z \geq \frac{1-x}{1+x}.$$

Anche $|z| \leq 1$, quindi la condizione precedente non è mai verificata per $-1 \leq x \leq 0$; denotiamo quindi con $D^\pm = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : \pm x \geq 0, x^2 + z^2 \leq 1\}$ in modo da trovare che

$$\int_D |(1+x)z - 1 + x|dxdz = \int_{D^-}(1 - x - z - xz)dxdz + \int_{D^+}|(1+x)z - 1 + x|dxdz.$$

Su D^- possiamo usare le coordinate polari per trovare che

$$\int_{D^-}(1-x-z-xz)dxdz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} d\vartheta \int_0^1 (\varrho - \varrho^2\cos\vartheta - \varrho^2 \mathrm{sen}\,\vartheta - \varrho^3 \mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta)d\varrho = \frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}.$$

mentre

$$\begin{aligned}\int_{D^+}|(1+x)z-1+x|dxdz &= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1-x}{x+1}}(1-x-(1+x)z)dxdz \\ &\quad + \int_0^1 dx \int_{\frac{1-x}{x+1}}^{\sqrt{1-x^2}}((1+x)z-1+x)dxdz \\ &= 4\ln 2 - \frac{19}{12}\end{aligned}$$

In definitiva,

$$\int_E |(x+1)z-1+x|dxdydz = 4\ln 2 - \frac{11}{12}+\frac{\pi}{2}.$$

Soluzione 5 Per la converegenza puntuale della serie notiamo che per $x=0$, la successione di funzioni

$$u_k(x) = \sqrt{\frac{x}{k^4x+k}}$$

si annulla, mentre per $x \neq 0$ la successione $u_k(x)$ è asintotica a

$$\frac{1}{k^2}$$

e la serie di questi ultimi converge. La convergenza puntuale si ha quindi in $[0,+\infty)$. Studiamo ora la convergenza totale:

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}|u_k(x)| = \frac{1}{k^2} = M_k$$

e la serie degli M_k è convergente. Quindi la serie converge totalmente e quindi uniformemente in $[0,+\infty)$. Per quanto riguarda le derivate, siccome

$$u_k'(x) = \frac{k}{2\sqrt{x(k^4x+k)^3}};$$

tali funzioni non sono definite per $x=0$, mentre per $x\neq 0$ la serie associata è convergente in quanto $u_k'(x)$ è asintotico a $\frac{1}{2xk^5}$. La serie convergerà puntualmente in $(0,+\infty)$, ma non ci sarà convergenza uniforme in tutto l'intervallo altrimenti si avrebbe convergenza anche per $x=0$. La convergenza è totale negli intervalli della forma $[a,+\infty)$ per ogni $a>0$ in quanto

$$\sup_{x\in[a,+\infty)}|u_k'(x)| = \frac{k}{2\sqrt{a(k^4a+k)^3}} = M_k'$$

e la serie dei M_k' converge. Avremo quindi convergenza uniforme negli intervalli $[a,+\infty)$ per ogni $a>0$. La funzione f sarà quindi continua in $[0,+\infty)$, derivabile nell'intervallo aperto $(0,+\infty)$ mentre non avremo derivabilità in $x=0$ con derivata data da

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2\sqrt{x(k^4x+k)^3}};$$

tale derivata è positiva, quindi la funzione è strettamente monotona crescente con

$$f(0) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Lo stesso tipo di ragionamente permetterà poi di concludere che la funzione è in realtà f è di classe $C^\infty(0, +\infty)$; in particolare avremo che per la derivata seconda si ha

$$f''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(4k^4 + k)(k^4x + k)^2}{4\sqrt{x^3(k^4x + k)^9}};$$

tale derivata è definita per $x > 0$ ed è sempre negativa, quindi la funzione f è concava.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 18 febbraio 2013

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = te^t \cos t \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 Verificare che l'equazione

$$z(z^2 + 3x) + 3y = 0$$

definisce localmente attorno al punto $(-3, 0, 3)$ una funzione $z = g(x, y)$. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di g attorno al punto $(-3, 0)$.

Esercizio 3 Determinare massimi e minimi di

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 e^{x^2} + x^2 e^{y^2} \leq 1\}$.

Esercizio 4 Determinare il volume dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 5 Scrivere la serie di Fourier, studiandone le varie convergenze, della funzione 2π–periodica pari definita per $x \in [0, \pi]$ da

$$f(x) = x \cos x.$$

Soluzione 1 L'equazione data è del secondo ordine lineare a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è dato da

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2,$$

quindi la soluzione generale dell'omogenea associata è data da

$$y_0(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$$

in quanto $\lambda = -1$ è una radice con molteplicità due. Per la soluzione particolare, utilizziamo il metodo per somiglianza e cerchiamo la soluzione nella forma

$$y_p(t) = e^t \Big((a + bt) \cos t + (c + dt) \operatorname{sen} t \Big);$$

imponendo che tale soluzione risolva l'equazione data, troviamo che $a = -4/125$, $b = 3/25$, $c = -22/125$ e $d = 4/25$. La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t} + e^t \left(\Big(\frac{3t}{25} - \frac{4}{125}\Big) \cos t + \Big(\frac{4t}{25} - \frac{22}{125}\Big) \operatorname{sen} t \right).$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo infine che $c_1 = 4/125$ e $c_2 = 3/25$, cioè la soluzione del Problema di Cauchy è data da

$$y(t) = (\frac{3t}{25} + \frac{4}{125})e^{-t} + e^t \left(\Big(\frac{3t}{25} - \frac{4}{125}\Big) \cos t + \Big(\frac{4t}{25} - \frac{22}{125}\Big) \operatorname{sen} t \right).$$

Soluzione 2 La funzione $f(x, y, z) = z^3 + 3xz + 3y$ ha il gradiente dato da

$$\nabla f(x, y, z) = (3z, 3, 3z^2 + 3x)$$

che nel punto $(-3, 0, 3)$ diventa $(9, 3, 18)$. Quindi si può applicare i Teorema della funzione implicita rispetto a tutte e tre le variabili; in particolare possiamo concludere che localmente attorno al punto $(-3, 0, 3)$ il livello $E = \{f = 0\}$ è un grafico di una funzione $z = g(x, y)$ con $g(-3, 0) = 3$. Per lo sviluppo di g si trova che

$$g(x, y) = 3 + \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6} \right) (x + 3, y) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{36} \end{pmatrix} (x + 3, y) \cdot (x + 3, y) + o(\|(x + 3, y)\|^2),$$

cioè

$$g(x, y) = 3 - \frac{1}{2}(x + 3) - \frac{1}{6}y - \frac{1}{24}(x + 3)^2 - \frac{1}{18}(x + 3)y - \frac{1}{72}y^2 + o(\|(x + 3, y)\|^2).$$

Soluzione 3 Iniziamo col cercare i punti stazionari interni al vincolo imponendo il gradiente della funzione uguale a 0;

$$\nabla f(x, y) = (2x, -2y) = 0$$

se e solo se $(x, y) = (0, 0)$. Si può notare, mediante lo studio della matrice Hessiana, che tale punto è un punto di sella, e quindi il massimo e il minimo vengono necessariamente assunti sul bordo.

Per determinare i punti stazionari vincolati, usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange;

$$\mathcal{L}(x.y\lambda) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2 e^{y^2} + y^2 e^{x^2} - 1).$$

Imporre che tale Lagrangiana ha un punto stazionario porta alla ricerca delle soluzioni del sistema;

$$\begin{cases} x\Big(1 - \lambda(e^{y^2} + y^2 e^{x^2})\Big) = 0 \\ y\Big(1 + \lambda(x^2 e^{y^2} + e^{x^2})\Big) = 0 \\ x^2 e^{y^2} + y^2 e^{x^2}) = 1. \end{cases}$$

Si hanno varie possibilità; la prima è che $x = 0$, da cui la terza equazione implica che $y = \pm 1$ e quindi $\lambda = -1$, la seconda è che $y = 0$, da cui $x = \pm 1$ e $\lambda = 1$. Resta escluso il caso

$$\begin{cases} 1 - \lambda(e^{y^2} + y^2 e^{x^2}) = 0 \\ 1 + \lambda(x^2 e^{y^2} + e^{x^2}) = 0 \\ x^2 e^{y^2} + y^2 e^{x^2}) = 1; \end{cases}$$

si nota però che, un semplice studio del segno implica che nella prima equazione λ deve essere positivo, mentre nella seconda dovrebbe essere λ negativo. La sola possibilità sarebbe $\lambda = 0$, ma in tal caso non si trovano soluzioni del sistema. Quindi gli unici punti stazionari vincolati per f sono $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ dove la funzione vale 1, $(0, 1)$ e $(0, -1)$ dove la funzione vale -1. I primi due sono quindi i due punti di massimo, mentre i secondi due sono punti di minimo.

Soluzione 4 Il volume di E è dato da

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_E dxdydz = \int_{-1}^{1} \mathrm{Area}(E_x)dx$$

dove $E_x = [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]^2$. Quindi

$$\mathrm{Vol}(E) = 4\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \frac{16}{3}.$$

Soluzione 5 La funzione è pari ed è 2π–periodica, quindi calcolo solo i coefficienti a_k, $k \geq 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x dx = \frac{4}{\pi}.$$

Per i rimanenti coefficienti, dividiamo i casi $k = 1$ e $k > 1$; nel primo caso, usiamo la formula $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ e troviamo che

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos^2 x dx = \frac{\pi}{2},$$

mentre per $k > 1$ usiamo l'identità

$$\cos x \cos kx = \frac{1}{2}\Big(\cos((k+1)x) + \cos((k-1)x)\Big)$$

in modo da ottenere che

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left((-1)^{k+1}\frac{k^2+1}{(k^2-1)^2} - \frac{k^2+1}{(k^2-1)^2}\right)$$

quindi $a_k = 0$ se k è dispari, mentre se k è pari, cioè $k = 2h$, allora

$$a_k = -\frac{16h^2+2}{\pi(4h^2-1)^2}.$$

In definitiva otteniamo lo sviluppo in serie di Fouier

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}\cos x - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{16h^2 + 4}{\pi(4h^2 - 1)} \cos(2hx),$$

con convergenza puntuale, uniforme e totale sugli insiemi compatti di $\mathbb{R}$ in quanto la funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 8 marzo 2013

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y'(x) + y(x) = x^2 e^{1/x} \\ \\ y(1) = 3e; \end{cases}$$

della soluzione trovata determinare il dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 Studiare gli insiemi di livello della funzione

$$f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z^2},$$

indicando per quali valori $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $E_c = \{f = c\}$ è una superficie. Usare tali insiemi per determinare il massimo e il minimo di f sull'insieme $B_1(0,0,4) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-4)^2 \leq 1\}$.

Esercizio 3 Calcolare l'area della regione di piano

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2, y^2 \leq x \leq 3y^2\}.$$

Esercizio 4 Dato il campo

$$F(x,y,z) = (e^{yz^3}(z-2), \cos x \operatorname{sen} z, xy),$$

scriverne la divergenza ed il rotore. Dire quindi se tale campo è conservativo e calcolare il flusso di F uscente dall'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Esercizio 5 Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) (\operatorname{sen} x)^n.$$

Soluzione 1 L'equazione data è lineare del prim'ordine se scritta nella forma

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2} y(x) + e^{1/x};$$

avremo che $a(x) = 1/x^2$ e $b(x) = e^{1/x}$, quindi

$$A(x) = \int_1^x a(t)dt = \frac{1}{x} - 1,$$

da cui il fatto che la soluzione è data da

$$y(x) = e^{A(x)} \left(3e + \int_1^x e^{-A(t)} b(t)dt \right) = e^{1/x}(x+2).$$

Soluzione 2 Il livelli sono ottenuti imponendo

$$\frac{x^2+y^2}{z^2} = c;$$

tale equazione ha senso se $c \geq 0$ e per $c = 0$ si ottiene $x = y = 0$, cioè il fatto che

$$E_0 = \{(0,0,z) : z \neq 0\},$$

cioè l'asse delle z privato dell'origine (si noti che il dominio di f è dato da $\mathbb{R}^3$ privato del piano orizzontale $z = 0$). I livelli $c > 0$ sono dati dai coni

$$E_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0, x^2 + y^2 = cz^2\};$$

il fatto che i livelli con $c \neq 0$ siano superfici si può vedere mediante il teorema della funzione implicita in quanto il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{2x}{z^2}, \frac{2y}{z^2}, -\frac{2(x^2+y^2)}{z^3} \right)$$

che è non nullo se $(x,y) \neq (0,0)$. Per quanto riguarda il problema di massimo e minimo, la funzione è positiva e nulla in E_0; dato che E_0 interseca $B_1(0,0,4)$ nel segmento

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0, 3 \leq z \leq 5\},$$

avremo che

$$\min_{B_1(0,0,4)} f = 0, \quad \text{assunto in } S.$$

Avremo massimo quando il cono E_c sarà tangente $\partial B_1(0,0,4)$; questo significa richiedere che nel sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = cz^2 \\ \\ x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 1 \end{cases}$$

quando sostituiamo la prima equazione nella seconda in modo da ottenere

$$(c+1)z^2 - 8z + 15 = 0$$

si ha una soluzione z, cioè quando il discriminante di tale equazione è nullo;

$$\Delta = 1 - 15c = 0.$$

In corrispondenza di $c = 1/15$ si ha $z = 15/4$ e $x^2 + y^2 = \frac{15}{16}$. Il massimo verà quindi assunto sulla circonferenza

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{15}{4}, x^2 + y^2 = \frac{15}{16} \right\}.$$

In definitiva,

$$\max_{B_1(0,0,4)} f = \frac{1}{15}, \quad \text{assunto in } C.$$

Soluzione 3 Per calcolare l'area della regione data effettuiamo il seguente cambio di variabili

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x^2} \\ v = \frac{x}{y^2} \end{cases}.$$

Abbiamo cioè posto

$$(u, v) = F(x, y) = \left(\frac{y}{x^2}, \frac{x}{y^2} \right);$$

dato che

$$\det DF(x, y) = \frac{3}{x^2 y^2},$$

otteniamo che

$$\text{Area}(E) = \int_E dxdy = \frac{1}{3} \int_E x^2 y^2 \frac{3}{x^2 y^2} dxdy = \frac{1}{3} \int_{E'} \frac{1}{u^2 v^2} dudv$$

dove

$$E' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le u \le 2, 1 \le v \le 3\}.$$

Si ottiene quindi che

$$\text{Area}(E) = \frac{1}{9}.$$

Soluzione 4 Notiamo che

$$\text{div}F(x, y, z) = 0,$$

mentre

$$\text{rot}F(x, y, z) = (x - \cos x \cos z, e^{yz^3}(1 + 3yz^2)(z - 2) - y, -\text{sen}\, x \text{sen}\, z - z^3 e^{yz^3}(z - 2)).$$

Quindi il campo non è conservativo e, grazie al teorema della divergenza,

$$\Phi(F, \partial E) = \int_E \text{div}F(x, y, z) dxdydz = 0.$$

Soluzione 5 La serie può essere ricondotta ad una serie di potenze ponendo $y = \text{sen}\, x$. In questo modo, dato che $\ln(1 + \frac{1}{n})$ è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{n}$, troviamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1,$$

e quindi il raggio di convergenza è $R = 1$. La serie quindi converge sicuramente puntualmente e assolutamente per $-1 < y < 1$. Per $y = 1$ la serie non converge, mentre per $y = -1$ converge grazie al criterio di Leibniz. In definitiva avremo, nella variabile y:

1. convergenza puntuale in $P_y = [-1, 1)$ e assoluta in $PA_y = (-1, 1)$;

2. convergenza uniforme in $U_y = [-1, a]$ per ogni $0 < a < 1$;
3. convergenza totale in $T_y = [-a, a]$ per ogni $0 < a < 1$.

Tornando alla variabile x, avremo:

1. convergenza puntuale in $P_x = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e assoluta in $PA_x = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
2. convergenza uniforme in $U_x = \{x \in [\pi/2 + 2k\pi + a, 5\pi/2 + 2k\pi - a], k \in \mathbb{Z}\}$ per ogni $a > 0$;
3. convergenza totale in $T_x = \{x \in [-\pi/2 + k\pi + a, \pi/2 + k\pi - a], k \in \mathbb{Z}\}$ per ogni $a > 0$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 17 giugno 2013

Esercizio 1 Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y'(t) - \frac{y(t)}{t} = y^3(t) \operatorname{sen} t.$$

FACOLTATIVO: tra le soluzioni trovate, dire quali sono definite in un intorno di $t = 0$ e determinare il comportamento di tali soluzioni per $t \to 0$.

Esercizio 2 Dire se la funzione $r : [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}] \times [1, e] \to \mathbb{R}^3$

$$r(t, s) = (\ln t, \ln s, t)$$

definisce una superficie regolare; in caso affermativo, determinare retta normale e piano tangente alla superficie in $r(1, 2)$ e calcolare l'area della superficie.

Esercizio 3 Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = xy$$

sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x + \frac{2}{\sqrt[3]{5}}, 3x^5 + 5y^3 \leq 8\}.$$

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale triplo;

$$\int_E |xyz| e^{y^2} dxdydz$$

dove $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3(x^2 + y^2) \leq z^2 \leq 1 - x^2 - y^2\}$.

Esercizio 5 Scrivere la serie di Fourier, studiandone le varie convergenze, associata alla funzione 2π-periodica pari che coincide in $[0, \pi)$ con la funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{8} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2.$$

Da tale serie dedurre i valori delle somme delle serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2}, \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h^2}, \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^4}.$$

Soluzione 1 Siamo in presenza di un'equazione di tipo Bernoulli; con la sostituzione $v(t) = y(t)^{-2}$ si arriva all'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$v'(t) + \frac{2v(t)}{t} = -2\text{sen }t$$

la cui soluzione generale è data da

$$v(t) = 2\cos t - \frac{4 \text{ sen} t}{t} - \frac{4\cos t}{t^2} + \frac{\lambda}{t^2}.$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione di partenza è data da

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\cos t - \frac{4 \text{ sen} t}{t} - \frac{4\cos t}{t^2} + \frac{\lambda}{t^2}}}.$$

Tale soluzione è definita se la funzione $v(t)$ è positiva; per $t \to 0$ abbiamo che

$$v(t) = \frac{\lambda - 4}{t^2} - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Se $\lambda \neq 4$, abbiamo che per $t \to 0$,

$$v(t) \sim \frac{\lambda - 4}{t^2}$$

che è positiva se e solo se $\lambda > 4$; in tal caso avremo che $v(t) \to +\infty$ per $t \to 0$, quindi

$$\lim_{t\to 0} y(t) = 0.$$

Se $\lambda = 4$, allora $v(t)$ è asintotica a $-\frac{t^2}{2}$ che è negativa, quindi la soluzione $y(t)$ non è definita per $t \to 0$.

Soluzione 2 La funzione $r(t, s)$ è sicuramente di classe C^1, quindi per verificare se r definisce una superficie regolare resta da verificare la condizione sul rango della matrice Jacobiana $Dr(t, s)$. Dato che

$$r_t(t, s) \times r_s(t, s) = \left(-\frac{1}{s}, 0, \frac{1}{ts}\right),$$

ne deduciamo che r definisce una superficie regolare. Dato che $r(1, 2) = (0, \ln 2, 1)$ e $r_t(1, 2) \times r_s(1, 2) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ troviamo che la retta normale alla superficie in $r(1, 2)$ è parametrizzata da

$$(0, \ln 2, 1) + t\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),$$

che in coordinate cartesiane diventa

$$\begin{cases} y = \ln 2 \\ x + z = 1. \end{cases}$$

L'equazione del piano tangente invece è data da

$$x - z + 1 = 0.$$

L'area della superficie infine è data da

$$\text{Area} = \int_1^e ds \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \|r_t(t, s) \times r_s(t, s)\| dt = \int_1^e ds \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{\sqrt{1 + t^2}}{st} dt = \frac{5}{12} + \ln\frac{3}{2}.$$

Soluzione 3 Iniziamo col cercare i punti stazionari interni ad E; dato che

$$\nabla f(x,y) = (y,x)$$

che si annulla esclusivamente in $(0,0)$ (punto non interno ad E), la ricerca di massimo e minimo si riduce alla ricerca dei punti stazionari vincolati. Il bordo di E è fatto da tre lati e tre vertici; il lato $y=0$ con $-\frac{2}{\sqrt[3]{5}} < x < \sqrt[5]{\frac{8}{3}}$ (dove la funzione vale costantemente 0), il lato $y = x + \frac{2}{\sqrt[3]{5}}$ con $-\frac{2}{\sqrt[3]{5}} < x < 0$, il lato $y = \sqrt[3]{\frac{8-3x^5}{5}}$ con $0 < x < \sqrt[5]{\frac{8}{3}}$ e i tre vertici $(-\frac{2}{\sqrt[3]{5}}, 0)$, $(\sqrt[5]{\frac{8}{3}}, 0)$ e $(0, \frac{2}{\sqrt[3]{5}})$ (in tutti questi vertici la funzione è nulla).

Sul secondo lato consideriamo la funzione

$$g(x) = f\left(x, x + \frac{2}{\sqrt[3]{5}}\right) = x^2 + \frac{2x}{\sqrt[3]{5}};$$

tale funzione ha un punto stazionario per $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ dove la funzione vale

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{5}}.$$

Sul terzo lato conviene usare i moltiplicatori di Lagrange; introduciamo quindi la funzione

$$xy - \lambda(3x^5 + 5y^3 - 8)$$

in modo da arrivare al sistema

$$\begin{cases} y = -15\lambda x^4 \\ x = 15^3\lambda^3 x^8 \\ 3x^5 + 5y^3 = 8. \end{cases}$$

Tenendo presente che $x > 0$, si giunge alla soluzione del sistema data da $x = y = 1$ e $\lambda = \frac{1}{15}$; in corrispondenza di tale punto stazionario vincolato si ha $f(x,y) = 1$. In definitiva abbiamo trovato che

$$\min_E f = -\frac{1}{\sqrt[3]{5}} \qquad \text{assunto in } \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}, \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right),$$

mentre

$$\max_E f = 1, \qquad \text{assunto in } (1,1).$$

Soluzione 4 Sfruttando la parità della funzione integranda e le simmetrie dell'insieme di integrazione, possiamo scrivere che

$$\int_E |xyz| e^{y^2} dxdydz = 8 \int_{E'} xyze^{y^2} dxdydz$$

con $E' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$. Si arriva quindi all'integrale

$$\begin{aligned} \int_E |xyz| e^{y^2} dxdydz =& 8 \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} dy \int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyze^{y^2} dz \\ =& 8 \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} xy(1-4x^2-4y^2)e^{y^2} dy = 4e^{\frac{1}{4}} - \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Soluzione 5 La funzione, come funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, è continua e pari; quindi la serie di Fourier converge totalmente e quindi uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}$. Tracciando il grafico di f si nota poi che la funzione è π-periodica; scriviamo in ogni caso i coefficienti di Fourier pensando ad f come 2π-periodica.

La parità della funzione implica che $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$, mentre

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{8}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi^3}{48},$$

mentre

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{8}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \cos(kx)dx = \frac{\pi}{4k^2}((-1)^k + 1);$$

tali coefficienti sono nulli se k è dispari, mentre sono non nulli solo se $k = 2h$ è pari. Se ne deduce che la serie di Fourier associata ad f è data da

$$\frac{\pi^3}{96} + \frac{\pi}{8}\sum_{h=1}^\infty \frac{1}{h^2}\cos(2hx).$$

Valutando tale espressione per $x = 0$, dato che in tale punto coincide con $f(0) = \frac{\pi^3}{32}$, si ottiene che

$$\sum_{h=1}^\infty \frac{1}{h^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

con la valutazione in $x = \frac{\pi}{2}$ o $x = \frac{\pi}{4}$, si ottiene invece l'espressione

$$\sum_{h=1}^\infty \frac{(-1)^h}{h^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Mediante la formula di Parseval si ottiene infine che

$$\sum_{h=1}^\infty \frac{1}{h^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 15 luglio 2013

Esercizio 1 Dire per quali valori del parametro $\alpha \geq 0$ la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} ty'(t) + y(t) = y(t)^2 \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

è definita sulla semiretta $(0, +\infty)$.

Esercizio 2 Dire se l'equazione

$$x^5 - y^5 + z^5 + x^2 - 2y + z^2 = 0$$

definisce implicitamente attorno al punto $(-1, 0, -1)$ una funzione $y = g(x, z)$. Di tale funzione scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine e scrivere le equazioni del piano tangnente e della retta normale al grafico di g nel punto $(-1, -1)$.

Esercizio 3 Fissati i parametri $a, b, c > 0$, calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = (3xy^2 - x^3, yz^2 - y^3, 3x^2 z)$$

uscente dalla superficie

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Esercizio 4 Classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^2 - x^2 y^3 + y^2 + y^3;$$

dire infine se la funzione f ammette massimo e minimo su tutto $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 5 Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{x^n}} - 1 \right).$$

Soluzione 1 L'equazione può essere trattata sia come equazione a varibili separabili che come equazione di tipo Bernoulli; notiamo anzitutto che $y(t) \equiv 0$ è una soluzione del problema nel caso $\alpha = 0$. Le soluzioni non nulle sono date da

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1-\alpha}{\alpha}t + 1};$$

tali soluzioni sono definite eccetto che in $t = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ se $\alpha \neq 1$, mentre per $\alpha = 1$ troviamo la soluzione $y(t) \equiv 1$. La soluzione sarà quindi definita in tutto $(0, +\infty)$ se $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ o se $\frac{\alpha}{\alpha-1} \leq 0$, cioè se $\alpha \in [0, 1]$.

Soluzione 2 Posto $f(x, y, z) = x^5 - y^5 + z^5 + x^2 - 2y + z^2$, si nota subito che $f(-1, 0, -1) = 0$; inoltre

$$\nabla f(x, y, z) = (5x^4 + 2x, -5y^4 - 2, 5z^4 + 2z),$$

da cui $\nabla f(-1, 0, -1) = (3, -2, 3)$. Quindi si può applicare il teorema della funzione implicita per concludere che l'insieme $\{f = 0\}$ è localmente attorno al punto $(-1, 0, -1)$ un grafico di ogni variabile rispetto alle altre due. In particolare è localmente grafico di una funzione $y = g(x, z)$; di tale funzione si possono ricavare le varie derivate in $(-1, -1)$ trovando che

$$\nabla g(-1, -1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad Hg(-1, -1) = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Da ciò segue che il piano tangente ha equazione

$$3x - 2y + 3z + 6 = 0,$$

mentre la retta normale è data da

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2 = 0 \\ 3y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il polinomio di Taylor avremo che

$$\begin{aligned} g(x, y) =& g(-1, -1) + \nabla g(-1, -1) \cdot (x + 1, z + 1) + \\ &+ \frac{1}{2} Hg(-1, -1)(x + 1, z + 1) \cdot (x + 1, z + 1) + o(\|(x, z) - (-1, -1)\|^2) \\ =& \frac{3}{2}(x + 1) + \frac{3}{2}(z + 1) - \frac{9}{2}(x + 1)^2 - \frac{9}{2}(z + 1)^2 + o(\|(x, z) - (-1, -1)\|^2). \end{aligned}$$

Soluzione 3 Per il calcolo del flusso utilizziamo il teorema della divergenza; dato che $\operatorname{div} F(x, y, z) = z^2$, troviamo che

$$\Phi(F, \Sigma) = \int_E z^2 dxdydz = \frac{4\pi abc^3}{15}$$

dove

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\};$$

per il calcolo dell'integrale si può procedere in vari modi, il più semplice è mediante le coordinate ellissoidali, trovando che

$$\int_E z^2 dxdydz = abc^3 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \varrho^4 \cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi d\varphi$$

Soluzione 4 Iniziamo col calcolare gradiente

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2xy^3, -3x^2y^2 + 2y + 3y^2)$$

e matrice Hessiana

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 2y^3 & -6xy^2 \\ -6xy^2 & -6x^2y + 2 + 6y \end{pmatrix}.$$

La condizione $\nabla f(x, y) = 0$ individua quattro punti; $(0, 0)$, $(0, -\frac{2}{3})$, $(\sqrt{\frac{5}{3}}, 1)$ e $(-\sqrt{\frac{5}{3}}, 1)$. Siccome

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Hf(0, -2/3) = \begin{pmatrix} \frac{70}{27} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

mentre

$$Hf(-\sqrt{\frac{5}{3}}, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{15} \\ 2\sqrt{15} & -2 \end{pmatrix}, \quad Hf(\sqrt{\frac{5}{3}}, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{15} \\ -2\sqrt{15} & -2 \end{pmatrix}.$$

La sola prima matrice è strettamente definita positiva, mentre le altre hanno determinante negativo; il primo punto è quindi punto di minimo locale stretto, mentre gli altri sono punti di sella.

Notiamo infine che valutando $f(0, y)$ si trova che

$$\lim_{y \to \pm\infty} f(0, y) = \pm\infty,$$

quindi f non è limitata né inferiormente né superiormente, quindi non ammette massimo e minimo su tutto $\mathbb{R}^2$.

Soluzione 5 Si nota anzitutto che per $|x| \leq 1$, il termine generale

$$e^{\frac{1}{x^n}} - 1$$

non tende a zero e quindi non ci può essere convergenza. Per $|x| > 1$ abbiamo invece che

$$\left| e^{\frac{1}{x^2}} - 1 \right| \sim \frac{1}{|x|^n},$$

e quindi per il criterio del confronto asintotico la serie converge in quanto la serie data è asintoticamente equivalete alla serie geometrica di ragione $\frac{1}{|x|} < 1$. Quindi si ha convergenza puntuale in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Per la convergenza uniforme si nota che non si potrà avere convergenza uniforme su tutto $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ in quanto le funzioni $e^{\frac{1}{x^n}} - 1$ sono continue in tale insieme e la convergenza uniforme implicherebbe la convergenza puntuale in $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, che è un assurdo. Fissiamo quindi $a > 1$; siccome per $|x| \geq a$ si ha che

$$\left| e^{\frac{1}{x^n}} - 1 \right| \leq e^{\frac{1}{a^n}} - 1$$

e la serie associate a questa ulitma successione è convergente, se ne deduce la convergenza totale in $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ per ogni $a > 1$, da cui anche la convergenza uniforme sugli stessi intervalli.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 2 settembre 2013

Esercizio 1 Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale;

$$y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = e^{-3t}\ln(1+t^2);$$

trovare quindi tutte le soluzioni per cui

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

e tra queste determinare tutte quelle per cui $y(0) = 0$, indicandone il dominio di definizione.

Esercizio 2 Dire se l'equazione

$$(x^5 y - y^2\sqrt{z}, \ln(x+y+z) + x^2 \mathrm{sen}\,(y+z)) = (-2, 0)$$

definisce in un intorno di $(1, -1, 1)$ una curva regolare; determinare quindi la retta tangente e il piano normale a tale curva nel punto $(1, -1, 1)$.

Esercizio 3 Dire se la funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

ammette massimo e minimo sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz^2 = 2\};$$

in caso affermativo, determinarli.

Esercizio 4 Calcolare la circuitazione del campo

$$F(x, y, z) = (x, y^2, z)$$

lungo la curva $\partial^+\Sigma$, bordo della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

con orientazione indotta dalla normale esterna.

Esercizio 5 Studiare le varie convergenze della serie di funzione

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^4 x + k}}{k^4}, \qquad x \geq 0;$$

dire quindi se e dove la funzione f è derivabile.

Soluzione 1 Il polinomio caratteristico associato all'equazione dato è

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2,$$

da cui il fatto che la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è data da

$$y_0(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-3t}.$$

per determinare la soluzione dell'equazione completa dobbiamo applicare il metodo della variazione delle costanti, arrivando al sistema

$$\begin{cases} c_1'(t) + c_2'(t)t = 0 \\ -3c_1'(t) + c_2'(t) - 3c_2'(t)t = \ln(1 + t^2). \end{cases}$$

Si trova in tal modo che

$$\begin{cases} c_1'(t) = -t\ln(1 + t^2) \\ c_2'(t) = \ln(1 + t^2), \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} c_1(t) = c_1 - \frac{t^2+1}{2}\ln(1 + t^2) + \frac{t^2}{2} \\ c_2(t) = c_2 + t\ln(1 + t^2) - 2t + 2\arctan(t), \end{cases}$$

da cui il fatto che la soluzione generale è data da

$$y(t) = \left(c_1 + c_2 t + \frac{t^2 - 1}{2}\ln(1 + t^2) + \frac{t^2}{2} + 2t\arctan(t) - 2t^2\right)e^{-3t}.$$

Tali soluzioni soddisfano la condizione

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

per ogni scelta di c_1 e c_2, mentre la condizion $y(0) = 0$ è soddisfatta se $c_1 = 0$ e tali funzioni sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione 2 La matrice Jacobiana della funzione f è data da

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 5x^4 y & \frac{1}{x+y+z} + 2x\mathrm{sen}\,(y + z) \\ x^5 - 2y\sqrt{z} & \frac{1}{x+y+z} + x^2\cos(y + z) \\ -\frac{y^2}{2\sqrt{z}} & \frac{1}{x+y+z} + x^2\cos(y + z) \end{pmatrix}$$

che nel punto $(1, -1, 1)$ diventa

$$Df(1, -1, 1) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha rango due, in quanto ad esempio il prodotto vettoriale tra i due vettori $v = (-5, 3, -\frac{1}{2})$ e $w = (1, 2, 2)$ è dato da

$$v \times w = (7, \frac{19}{2}, -13);$$

tale vettore è non nullo ed individua la direzione tangente alla curva localmente definita dall'equazione data intorno al punto $(1, -1, 1)$ come corollario del teorema della funzione implicita. L'equazione della retta tangente in forma paramtrica sarà data da

$$r(t) = (1, -1, 1) + t(7, \frac{19}{2}, -13) = (1 + 7t, -1 + \frac{19}{2}t, 1 - 13t),$$

che in forma cartesiana diventa

$$\begin{cases} 19x - 14y = 26 \\ 13x + 7z = 20. \end{cases}$$

L'equazione del piano ortogonale si trova imponendo

$$(7, \frac{19}{2}, -13) \cdot (x-1, y+1, z-1) = 0,$$

e quindi la sua equazione sarà

$$14x + 19y - 26z + 31 = 0.$$

Soluzione 3 L'insieme dato è chiuso ma non è limitato in quanto ad esempio, se sezionato col piano $z = y$ si ottiene che E contiene la curva $(\frac{2}{y^3}, y, y^2)$; la funzione altro non è che la funzione quadrato della distanza dall'origine e lungo la curva precedente la funzione vale

$$f(\frac{2}{y^3}, y, y^2) = \frac{4}{y^6} + y^2 + y^4$$

e tali valori tendono ad infinito sia per $y \to 0$ sia per $y \to \pm\infty$. Ha quindi senso cercare solo il minimo di f su E e per far cioè utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(xyz^2 - 2);$$

in tal modo si trovano quattro punti, che quindi saranno i punti di distanza minima di E dall'origine, $(1, 1, \sqrt{2})$, $(1, 1, -\sqrt{2})$. $(-1, -1, \sqrt{2})$ e $(-1, -1, -\sqrt{2})$.

Soluzione 4 Per risolvere tale esercizio possiamo procedere in due modi; il primo mediante la definizione di cicuitazione, l'altro applicando il teorema del rotore.

Nel primo caso possiamo parametrizzare il bordo $\partial^+\Sigma$ mediante le tre parametrizzazioni

$$\gamma_1(t) = (R\cos t, R\text{sen}\, t, 0), \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\gamma_2(t) = (0, R\cos t, R\text{sen}\, t), \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

e

$$\gamma_3(t) = (R\text{sen}\, t, 0, R\cos t), \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

In tal modo si trova che

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+\Sigma} F \cdot d\vec{s} =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R\cos t, R^2\text{sen}^2 t, 0) \cdot (-R\text{sen}\, t, R\cos t, 0)dt + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, R^2\cos^2 t, R\text{sen}\, t) \cdot (0, -R\text{sen}\, t, R\cos t)dt + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R\text{sen}\, t, 0, R\cos t) \cdot (R\cos t, 0, -R\text{sen}\, t)dt \\ =& R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}^2 t\cos t - \text{sen}\, t\cos^2 t)dt = 0.\end{aligned}$$

Analogamente, applicando il teorema del rotore si nota che

$$\text{rot}F(x, y, z) = 0,$$

da cui il fatto che

$$\int_{\partial^+\Sigma} F \cdot d\vec{s} = \int_\Sigma \text{rot}F \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma = 0.$$

Soluzione 5 Poniamo

$$u_k(x) = \frac{\sqrt{k^4 x + k}}{k^4};$$

per $x = 0$ si ha che

$$u_k(0) = \frac{1}{k^{\frac{7}{2}}},$$

mentre per $x \neq 0$ si ha che

$$u_k(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{k^2},$$

da cui il fatto che la serie converge puntualmente per ogni $x \geq 0$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme si ha che, posto

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x),$$

si ottiene

$$|f(x) - f_n(x)| = f(x) - f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \geq u_{n+1}(x).$$

Si ottiene quindi che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 0} |f(x) - f_n(x)| \geq \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 0} u_{n+1}(x) = +\infty.$$

Quindi non si può avere convergenza uniforme su tutto $[0, +\infty)$. Vediamo se c'è convergenza uniforme sugli intervalli della forma $[0, a]$ con $a > 0$; studiamo direttamente la convergenza totale, notando che

$$\sup_{x\in[0,a]} u_k(x) = \frac{\sqrt{k^4 a + k}}{k^4} = M_k(a)$$

e la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k(a)$$

è convergente, da cui la convergenza totale e uniforme in $[0, a]$.

Per la seconda parte dell'esercizio, dobbiamo studiare la serie associata alle funzioni

$$v_k(x) = u_k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{k^4 x + k}}.$$

Otteniamo che

$$v_k(0) = \frac{1}{2k^{\frac{1}{2}}},$$

e la serie associata a tale successione non converge; invece per $x \neq 0$ si ottiene che

$$v_k(x) \sim \frac{1}{2k^2\sqrt{x}},$$

da cio la convergenza puntuale per $x > 0$. La convergenza non potrà essere uniforme fino ad $x = 0$, però se fissiamo $a > 0$ e dal fatto che

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} v_k(x) = \frac{1}{2\sqrt{k^4 a + k}} = M_k(a);$$

la serie associata a tale successione converge, da cui la convergenza totale e uniforme negli intervalli $[a, +\infty)$. Grazie al teorema della derivazione per serie se ne deduce che la funzione f è derivabile in $(0, +\infty)$ con

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k^4 x + k}},$$

mentre non è derivabile in $x = 0$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 16 settembre 2013

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - y(t) = \dfrac{1}{1+e^t} \\[2ex] y(0) = -\dfrac{1}{2} \\[2ex] y'(0) = \ln 2 - \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

di tale soluzione calcolare

$$\lim_{t\to+\infty} y(t).$$

Esercizio 2 Sia $r : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$r(t) = (1 - \cos t + (2-t)\mathrm{sen}\, t, \mathrm{sen}\, t + (2-t)\cos t);$$

studiare qualitativamente la funzione $\|r(t)\|^2$ quadrato della distanza dall'origine al tempo t ed usare tale studio per dire se la mappa r definisce una curva semplice. Calcolare quindi il parametro d'arco, la lunghezza e la curvatura della curva r mediante la riparametrizzazione per lunghezza d'arco.

Esercizio 3 Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = x + y$$

sull'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Esercizio 4 Determinare il volume dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}.$$

Esercizio 5 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

determinare quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_1^2 f_n(x)dx.$$

Soluzione 1 La soluzione dell'omogenea si trova mediante la ricerca delle radici del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$; la soluzione generale dell'omogenea è quindi data da

$$y_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Per la determinazione della soluzione particolare usiamo il metodo della variazione delle costanti; si giunge quindi al sistema

$$\begin{cases} c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} = 0 \\ c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t}. \end{cases}$$

Si trova quindi che

$$\begin{cases} c_1'(t) = \frac{e^t}{2e^{2t}(1+e^t)} \\ c_2'(t) = -\frac{e^t}{2(1+e^t)}, \end{cases}$$

da cui il fatto che la soluzione generale dell'equazione completa è data da

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{t}{2}e^t - \frac{1}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{2}\ln(1+e^t).$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo che $c_1 = c_2 = 0$ e quindi

$$y(t) = -\frac{t}{2}e^t - \frac{1}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{2}\ln(1+e^t).$$

Per tale soluzione si ha che

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0,$$

come si può verificare scrivendo

$$\ln(1+e^t) = t + \ln(1+e^{-t})$$

ed utilizzando lo sviluppo

$$\ln(1+e^{-t}) = e^{-t} + o(e^{-t}).$$

Soluzione 2 La funzione r è continua quindi definisce una curva; tale curva è regolare in quanto $r \in C^1([0,2])$. Dato che

$$r'(t) = (2-t)(\cos t, -\text{sen}\, t), \qquad \|r'(t)\| = (2-t),$$

troviamo che r definisce una curva regolare. Per vedere se tale curva è semplice, poniamo

$$f(t) = \|r(t)\|^2 = 2 + (2-t)^2 + 2(2-t)\text{sen}\, t - 2\cos t, \qquad t \in [0,2].$$

Si nota che

$$f(0) = 4, \qquad f(2) = 2(1-\cos 2).$$

Inoltre

$$f'(t) = 2(2-t)(\cos t - 1) \leq 0,$$

quindi f è strettamente monotona decrescente; non essendoci quindi due punti della curva che hanno la medesima distanza dall'origine. Quindi la mappa r è iniettiva e quindi la curva è semplice.

Il parametro d'arco è dato da

$$s = s(t) = \int_0^t (2-\tau)d\tau = \frac{4t - t^2}{2};$$

quindi

$$\ell(r,[0,2]) = s(2) = 2.$$

Possiamo quindi riparametrizzare in lunghezza d'arco definendo $\tilde{r} : [0,2] \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\tilde{r}(s) =&\tilde{r}(s(t)) = r(t(s))\\ =&(1,0) + (-\cos(2-\sqrt{4-2s}), \operatorname{sen}(2-\sqrt{4-2s}))+\\ &+\sqrt{4-2s}(\operatorname{sen}(2-\sqrt{4-2s}), \cos(2-\sqrt{4-2s}))\end{aligned}$$

ottenuta ricavando t in funzione di s,

$$t = 2-\sqrt{4-2s}.$$

In questo modo si ha che

$$\tau(s) = \tilde{r}'(s) = (\cos(2-\sqrt{4-2s}), -\operatorname{sen}(2-\sqrt{4-2s})),$$

e quindi

$$\tilde{\,}'r(s) = \tilde{k}(s)n(s) = \frac{1}{\sqrt{4-2s}}(-\operatorname{sen}(2-\sqrt{4-2s}), -\cos(2-\sqrt{4-2s})),$$

cioè

$$\tilde{k}(s) = \frac{1}{\sqrt{4-2s}},$$

che con il parametro t diventa

$$k(t) = \frac{1}{2-t}.$$

Soluzione 3 Dato che

$$\nabla f(x,y) = (1,1) \neq 0,$$

se ne deduce che massimo e minimo vanno ricercati sul bordo di E.

Iniziamo col cercare le intersezioni tra le curve $|xy| = 1$ e $x^2+y^2 = 4$; tali curve si intersecano in otto punti,

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}, \sqrt{2-\sqrt{3}}\right), \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}, \sqrt{2+\sqrt{3}}\right), \left(-\sqrt{2-\sqrt{3}}, \sqrt{2+\sqrt{3}}\right),$$

$$\left(-\sqrt{2+\sqrt{3}}, \sqrt{2-\sqrt{3}}\right), \left(-\sqrt{2+\sqrt{3}}, -\sqrt{2-\sqrt{3}}\right), \left(-\sqrt{2-\sqrt{3}}, -\sqrt{2+\sqrt{3}}\right),$$

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}, -\sqrt{2+\sqrt{3}}\right), \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}, -\sqrt{2-\sqrt{3}}\right).$$

I valori in tali punti sono

$$\begin{aligned}\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}, =&f\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}, \sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = f\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}, \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\\ =&-f\left(-\sqrt{2+\sqrt{3}}, -\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = -f\left(-\sqrt{2-\sqrt{3}}, -\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}, =&f\left(-\sqrt{2-\sqrt{3}}, \sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = f\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}, -\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\\ =&-f\left(-\sqrt{2+\sqrt{3}}, \sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = -f\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}, -\sqrt{2+\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

Oltre questi otto vertici ci sono otto curve che compongono il bordo di E; quattro sono le curve determinate dalle iperboli $y = \frac{1}{x}$ e $y = -\frac{1}{x}$, e quattro dalla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$. Sulle iperboli, calcoliamo

$$g_1(x) = f\left(x, \frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x}$$

e

$$g_2(x) = f\left(x, -\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x};$$

la prima funzione ha derivata

$$g_1'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

e quindi due punti stazionari $x = \pm 1$ che corrispondono ai punti $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ dove la funzione vale

$$f(1, 1) = 2, \qquad f(-1, -1) = -2.$$

La derivata della seconda funzione è data da

$$g_2'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

che non si annulla mai. Per quanto riguarda la parte di circonferenza parametrizziamo mediante $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, per ottenere la funzione

$$g_3(t) = f(2\cos t, 2\operatorname{sen} t) = 2\cos t + 2\operatorname{sen} t;$$

tale funzione ha per punti stazionari $t = \frac{\pi}{4}$ e $t = \frac{5\pi}{4}$, ma tali valori determinano punti che non appartengono a ∂E. Per confronto tra i valori, si trova quindi che

$$\max_E f = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

assunto nei punti

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}, \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right), \quad \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right),$$

mentre

$$\min_E f = -\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

assunto nei punti

$$\left(-\sqrt{2 + \sqrt{3}}, -\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right), \quad \left(-\sqrt{2 - \sqrt{3}}, -\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right).$$

Soluzione 4 Per il calcolo del volume si possono usare sia le coordinate cilindriche che le coordinate sferiche.

Usando le coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta \\ y = \varrho\operatorname{sen}\vartheta, \\ z = t, \end{cases}$$

troviamo che l'insieme E diventa l'insieme E' dei punti (ϱ, ϑ, t) per cui $\vartheta \in [0, 2\pi]$ e

$$\begin{cases} \varrho^2 \le t^2 \\ \varrho^2 + t^2 \le 2t, \end{cases}$$

e cioè $0 \leq \varrho \leq \min\{t, \sqrt{2t-t^2}$. Troviamo quindi che

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_{E'} \varrho d\varrho d\vartheta dt = 2\pi \int_0^1 dt \int_0^t \varrho d\varrho + 2\pi \int_1^2 dt \int_0^{\sqrt{2t-t^2}} \varrho d\varrho = \pi.$$

Se vogliamo usare le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \varrho \cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi \\ y = \varrho \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi, \\ z = \varrho \cos\varphi, \end{cases}$$

troviamo che l'insieme E diventa l'insieme E' dei punti $(\varrho, \vartheta, \varphi)$ per cui $\vartheta \in [0, 2\pi]$ e

$$\begin{cases} \varrho^2 \operatorname{sen}^2\varphi \leq \varrho^2 \cos^2\varphi \\ \varrho^2 \leq 2\varrho \cos\varphi, \end{cases}$$

e cioè $\varphi \in [0, \pi/4]$ e $0 \leq \varrho \leq 2\cos\varphi$. Troviamo quindi che

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_{E'} \varrho^2 \operatorname{sen}\varphi d\varrho d\vartheta dt = 2\pi \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \varrho^2 \operatorname{sen}\varphi d\varrho \pi.$$

Soluzione 5 Per quanto riguarda la convergenza puntuale, bisogna distinguere i due casi, $x = 0$ e $x \neq 0$;

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{2\pi}} = +\infty,$$

mentre per $x \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

La successione quindi converge puntualmente su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ alla funzione $f(x) = 0$. La convergenza non potrà essere uniforme in quanto le funzioni f_n sono continue e quindi se convergessero uniformemente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ convergerebbero puntualmente anche in 0, ma ciò non è possibilie. Se però fissiamo $a > 0$, allora per $|x| > a$ si ha che, dato che le f_n sono monotone,

$$\sup_{|x \geq a|} f_n(x) \leq \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2n^2}}$$

da cui la convergenza uniforme in $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq a\}$ per ogni $a > 0$. Per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, possiamo concludere che per ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ contenuto in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b f(x)dx = 0,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 f_n(x) = 0.$$

Viceversa, notiamo che per ogni n, se effettuiamo il cambio di variabili $x = ny$, troviamo che

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1,$$

e quindi

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \int_R f_n(x)dx \neq \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0,$$

ma tale risultato non è in contraddizione col teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 22 novembre 2013

Esercizio 1 Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$g'(x) = g(x)(1 - g(x));$$

tra le soluzioni trovate, determinare quella con in 0 vale 1/2 e di tale funzione tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 Studiare la regolarità della superficie ottenuta ruotando il grafico della funzione

$$y = e^{-x}, \qquad x \in [0, 2]$$

attorno all'asse x; determinare quindi l'area di tale superficie.

Esercizio 3 Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y, z) = x + y - z$$

sull'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Esercizio 4 Determinare il seguente integrale triplo

$$\int_E \frac{x^2y^2z}{x^2 + y^2} dxdydz$$

con $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq (1 - z)^2\}$.

Esercizio 5 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan\left(x + \frac{1}{n}\right), \qquad x \in \mathbb{R};$$

determinare quindi

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione 1 L'equazione data è a variabili separabili; ci sono quindi due possiblità, e cioè le soluzioni per cui $g(x)(1-g(x))=0$, e le altre. Nel primo caso troviamo che le funzioni $g(x)\equiv 0$ e $g(x)\equiv 1$ sono soluzioni.

Le altre soluzioni le determiniamo dividendo ed integrando, trovando che

$$\frac{g'(x)}{g(x)(1-g(x))}=1$$

da cui si ottiene che

$$g(x)=\frac{1}{1+ce^{-x}},\qquad x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}.$$

La soluzione che soddisfa la condizione $g(0)=\frac{1}{2}$ è determinata dalla costante $c=1$, determinando la quindi la funzione

$$g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}.$$

Tale funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, è monotona crescente e

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}g(x)=1.$$

Soluzione 2 La superficie cercata è parametrizzata dalla funzione $r:[0,2]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$,

$$r(t,s)=(t,e^{-t}\cos s,e^{-t}\sin s);$$

per tale superficie si ha

$$\|r_t(t,s)\times r_s(t,s)\|=e^{-t}\sqrt{1+e^{-2t}},$$

da cui si deduce che la superficie è regolare. Per il calcolo dell'area otteniamo

$$\begin{aligned}\text{Area}(\Sigma)=&\int_{[0,2]\times[0,2\pi]}\|r_t(t,s)\times r_s(t,s)\|dtds=2\pi\int_0^2 e^{-t}\sqrt{1+e^{-2t}}dt\\ =&1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{1+e^4}}{2e^4}+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{(\sqrt{1+e^4}+1)^2}\right).\end{aligned}$$

Soluzione 3 Siamo in presenza di un vincolo che non ha parte interna ed è luogo di zeri della funzione

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1;$$

possiamo quindi utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange introducendo la funzione

$$x+y-z-\lambda(x^2+y^2+z^2-1);$$

si arriva quindi al sistema

$$\begin{cases}1-2\lambda x=0\\ 1-2\lambda y=0\\ -1-2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2=0,\end{cases}$$

che determina come soluzioni i punti $\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$ con $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ con $\lambda=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dato che

$$f\Big(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)=\sqrt{3},$$

mentre

$$f\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)=-\sqrt{3},$$

se ne deduce che

$$\min_E f=-\sqrt{3},\qquad \text{assunto in }\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\Big),$$

mentre

$$\max_E f=\sqrt{3},\qquad \text{assunto in }\Big(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big).$$

Soluzione 4 L'insieme di integrazione è stratificato in direzione z con strati $B_{1-z}(0,0)$; usando questo fatto e le coordinate polari nel piano otteniamo

$$\begin{aligned}\int_E \frac{x^2y^2z}{x^2+y^2}dxdydz &= \int_0^1 dz\int_{B_{1-z}(0,0)}\frac{x^2y^2z}{x^2+y^2}dxdy\\ &=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^{1-z} z\varrho^3\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta d\varrho\\ &=\frac{pi}{16}\int_0^1 z(1-z)^4dz=\frac{\pi}{480}.\end{aligned}$$

Soluzione 5 Il limite puntuale della successione data è $\arctan(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$; verifichiamo se tale limite è anche uniforme;

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\arctan\left(x+\frac{1}{n}\right)-\arctan(x)\right|.$$

Definiamo quindi

$$g_n(x)=\arctan\left(x+\frac{1}{n}\right)-\arctan(x),\qquad x\in\mathbb{R};$$

si nota che per la monotonia della funzione arcotangente, le g_n sono positive,

$$\lim_{x\to-\infty}g_n(x)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}g_n(x)=0.$$

Inoltre

$$g_n'(x)=\frac{1}{1+(x+\frac{1}{n})^2}-\frac{1}{1+x^2}$$

che si annulla eslusivamente per $x=-\frac{1}{2n}$ dove la funzione vale

$$g_n\left(\frac{1}{2n}\right)=2\arctan\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Siccome tale valore tende a 0 per $n\to+\infty$, se ne deduce la convergenza uniforme su $\mathbb{R}$.

Per rispondere all'ultimo quesito, bisogna studiare la convergenza uniforme delle derivate prime

$$f_n'(x)=\frac{1}{1+\left(x+\frac{1}{n}\right)^2}$$

che tende uniformemente alla funzione

$$\frac{1}{1+x^2}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 19 dicembre 2013

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}\,(t + \ln t) \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 Dire in quali punti dello spazio si applica il Teorema della funzione implicita alla funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$g(x, y, z) = (x^2 + y^4 + z^2 - 3, x^4 + y^2 + z^4 - 3);$$

in particolare dire se $(1, 1, 1) \in E_{(0,0)}$ e se attorno a tale punto si applica il teorema. Scrivere infine le equazioni della retta tangente e del piano ortogonale all'insieme di livello passanti per $(1, 1, 1)$.

Esercizio 3 Trovare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = y^3 e^{xy+x}.$$

Esercizio 4 Dire, calcolandolo, se è ben definito il seguente integrale triplo generalizzato

$$\int_E z^2(x + y)e^{x^2+y^2}\,dxdydz,$$

con

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (|x| + |y|)^2 \le e^{-|z|}|\sin z|\}.$$

Esercizio 5 Studiare, per ogni $m \in \mathbb{N}$, la convergenza della serie

$$J_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+m}}{2^{2k+m} k!(k + m)!}.$$

Facoltativo: Dimostrare che $(t^m J_m(t))' = t^m J_{m-1}(t)$.

Soluzione 1 Siamo in presenza di un'equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti completa; l'equazione omogenea associata

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

si risolve ricercando le radici del polinomio carattaristico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2.$$

Si trova quindi che la soluzione generale dell'omogenea è data da

$$u_0(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t}.$$

Per determinare la soluzione dell'equazione completa conviene usare il metodo della variazione delle costanti, pensando alla soluzione nella forma

$$u(t) = (c_1(t) + c_2(t)t)e^{-t};$$

si arriva quindi alla ricerca delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (c_1'(t) + c_2'(t)t)e^{-t} = 0 \\ (c_2'(t) - c_1'(t) - c_2'(t)t)e^{-t} = e^{-t}(t + \ln t), \end{cases}$$

cioè al sistema

$$\begin{cases} c_1'(t) = -t^2 - t\ln t \\ c_2'(t) = t + \ln t. \end{cases}$$

Integrando le precedenti soluzioni si trova che

$$\begin{cases} c_1(t) = c_1 - \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^2}{2}\ln t + \dfrac{t^2}{4} \\[2ex] c_2(t) = c_2 + \dfrac{t^2}{2} + t\ln t - t. \end{cases}$$

In definitiva, la soluzione completa è data da

$$u(t) = \left(c_1 + c_2 t - \frac{3t^2}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}\ln t\right)e^{-t};$$

le condizioni iniziali sono soddisfatte per $c_1 = 1/12$ e $c_2 = 1/2$, da cui il fatto che la soluzione è data da

$$u(t) = \left(\frac{1}{12} + \frac{t}{2} - \frac{3t^2}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}\ln t\right)e^{-t}.$$

Soluzione 2 La matrice Jacobina di g è data da

$$Dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 4y^3 & 2z \\ 4x^3 & 2y & 4z^3 \end{pmatrix};$$

tale matrice non ha rango due se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$(2x, 4y^3, 2z) = \lambda(4x^3, 2y, 4z^3).$$

Tale uguaglianza si verifica nei seguenti casi:

1. in $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ con λ arbitrario;

2. in $(x,0,0)$ con $x \neq 0$ e $\lambda = 1/2x^2$;

3. in $(0,y,0)$ con $y \neq 0$ e $\lambda = 2y^2$;

4. in $(0,0,z)$ con $z \neq 0$ e $\lambda = 1/2z^2$;

5. in $(x,0,\pm x)$ con $x \neq 0$ e $\lambda = 1/2x^2$;

6. in $(x,\pm 1/2x,0)$ con $x \neq 0$ e $\lambda = 1/2x^2$;

7. in $(0,y,\pm 1/2y)$ con $y \neq 0$ e $\lambda = 2y^2$;

8. in $(x,\pm 1/2x,\pm x)$ con $x \neq 0$ e $\lambda = 1/2x^2$.

Se restringiamo l'attenzione al punto $(1,1,1)$, notiamo subito che $g(1,1,1) = (0,0)$, quindi $(1,1,1) \in E_{(0,0)}$; inoltre

$$Dg(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e tale matrice ha rango 2. Quindi le condizioni per l'applicazione del Teorema della funzione implicita sono soddisfatte; il vettore

$$v = (2,4,2) \times (4,2,4) = (12,0,-12)$$

è tangente all'insieme di livello, quindi la retta tangente sarà paramtrizzata da

$$r(t) = (1,1,1) + tv = (1+12t, 1, 1-12t),$$

che in forma cartesiana diventa

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + z = 2. \end{cases}$$

Il piano normale è parametrizzato da

$$r(t,s) = (1,1,1) + t(2,4,2) + s(4,2,4) = (1+2t+4s, 1+4t+2s, 1+2t+4s),$$

oppure in forma cartesiana da

$$(12,0,-12) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0,$$

cioè

$$z = x.$$

Soluzione 3 Si ricercano i punti stazionari imponendo $\nabla f(x,y) = 0$, arrivando al sistema

$$\begin{cases} y^3(y+1) = 0 \\ y^2(3+xy) = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ha per soluzione $(x,y) = (3,-1)$ e tutti i punti della forma $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$.

Per classificare tale punti calcoliamo la matrice Hessiana di f;

$$Hf(x,y) = e^{xy+x} \begin{pmatrix} y^3(y+1)^2 & 4y^3 + 3y^2 + xy^3(y+1) \\ 4y^3 + 3y^2 + xy^3(y+1) & 6y + 6xy^2 + x^2y^3 \end{pmatrix};$$

In $(3,-1)$ tale matrice diventa

$$Hf(3,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha determinante negativo, quindi siamo in presenza di un punto di sella. Nei punti $(x, 0)$ troviamo invece che

$$Hf(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

non possiamo quindi classificare i punti $(x, 0)$ mediante matrice Hessiana essendo tale matice semidefinita, sia negativa che positiva. Notiamo però che $f(x, 0) = 0$, mentre $f(x, y) > 0$ per $y > 0$ e $f(x, y) < 0$ per $y < 0$; se ne deduce quindi che i punti $(x, 0)$ sono tutti punti di sella.

Soluzione 4 La funzione integranda è somma di due funzioni, $f(x, y, z) = f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)$ con

$$f_1(x, y, z) = z^2 x e^{x^2+y^2}$$

dispari in x e

$$f_2(x, y, z) = z^2 y e^{x^2+y^2}$$

dispari in y, cioè

$$f_1(-x, y, z) = -f_1(x, y, z), \qquad f_2(x, -y, z) = -f_2(x, y, z),$$

e l'insieme E è invariante per simmetrie rispetto al piano yz e xz, cioè se $(x, y, z) \in E$, allora anche $(-x, y, z), (x, -y, z) \in E$. Se quindi l'integrale è ben definito si deve avere

$$\int_E f(x, y, z) dxdydz = 0.$$

Per studiare l'integrabilità consideriamo gli insiemi invadenti

$$E_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -h \leq z \leq h, (|x| + |y|)^2 \leq e^{-|z|} |\sin z|\};$$

sfruttando le disuguaglianze

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2 \leq e^{-|z|} |\sin z| \leq e^{-|z|},$$

ed il fatto che

$$e^{e^{-|z|}} \leq e, \qquad |\sin z| \leq 1,$$

troviamo che

$$\int_{E_h} |f(x, y, z)| dxdydz \leq 4e \int_0^h z^2 e^{-\frac{5}{2}z} dz = 4e \left(\frac{128}{125} - \Big(\frac{4}{5} h^2 + \frac{22}{25} h + \frac{128}{125} \Big) e^{-\frac{5}{4}h} \right) \leq \frac{512e}{125}.$$

Quindi dato che

$$\sup_{h \in \mathbb{N}} \int_{E_h} |f(x, y, z)| dxdydz < +\infty,$$

la funzione è integrabile in senso generalizzato e

$$\int_E f(x, y, z) dxdydz = \lim_{h \to +\infty} \int_{E_h} f(x, y, z) dxdydz = 0$$

per la disparità della funzione f.

Soluzione 5 La serie data può essere ricondotta ad una serie di potenze scrivendo

$$J_m(t) = t^m f(t^2),$$

dove

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{2^{2k+m} k!(k+m)!}.$$

La funzione f è quindi definita come serie di potenze centrata in 0 e coefficienti

$$c_k = \frac{(-1)^k}{2^{2k+m} k!(k+m)!};$$

applichiamo il criterio del rapporto trovando che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2^{2k+m} k!(k+m)!}{2^{2k+m+2}(k+1)!(k+m+1)!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{4(k+1)(k+m+1)} = 0,$$

quindi il raggio di convergenza è $\varrho = +\infty$ e quindi la serie converge puntualmente su $\mathbb{R}$, uniformememente e totalmente su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Quindi $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e quindi anche $J_m \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Per l'ultima parte, notiamo che

$$\begin{aligned}
(t^m J_m(t))' =& t^m \left(\frac{m J_m(t)}{t} + J_m'(t) \right) \\
=& t^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+2m) t^{2k+m-1}}{2^{2k+m} k!(k+m)!} \\
=& t^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+m-1}}{2^{2k+m-1} k!(k+m-1)!} \\
=& t^m J_{m-1}(t).
\end{aligned}$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 20 gennaio 2014

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) = \dfrac{y'(t)^2(1-y(t))}{2y(t)} \\ \\ y(e) = 1 \\ y'(e) = 2/e \end{cases}$$

determinado l'intervallo di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2 Scrivere il polinomio di Taylor di grado due intorno al punto $(1,1)$ della funzione

$$f(x,y) = xe^{xy};$$

determinare inoltre l'insieme di convessità della funzione f, cioè i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in cui la funzione è convessa.

Esercizio 3 Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = x|y|e^y$$

sull'insieme $E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \leq 1\Big\}$.

Esercizio 4 Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$$

uscente dal tetraedro $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$. Ricavare inoltre, dal punto precedente, il flusso dello stesso campo uscente dalla superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z = 1\}$ con normale esterna rivolta verso il basso.

Esercizio 5 Studiare le varie convergenze della serie di funzione

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^3}{x^2+k^2}.$$

Soluzione 1 L'equazione data è del secondo ordine autonoma; possiamo quindi ricondurla ad equazioni del primo ordine ponendo $v(y) = y'(t)$, da cui $y''(t) = v(y)v'(y)$. L'equazione diventa quindi

$$v(y)v'(y) = \frac{v(y)^2(1-y)}{2y},$$

a cui va accoppiata la condizione iniziale $v(y(e)) = v(1) = y'(e) = 2/e$. Possiamo dividere l'equazione precedente per $v(y)$; infatti la funzione $v \equiv 0$ è soluzione dell'equazione ma non soddisfa la condizione iniziale. Arriviamo quindi al problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'(y) = \frac{v(y)(1-y)}{2y}, \\ v(1) = 2/e. \end{cases}$$

Tale equazione è a variabili separabili; si tratta quindi di risolvere l'equazione

$$\frac{v'(y)}{v(y)} = \frac{1}{2y} - \frac{1}{2},$$

che integrata, tenendo conto del dato iniziale, produce la soluzione

$$v(y) = \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{e}}e^{-\frac{y}{2}}.$$

Si tratta ora di risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{2\sqrt{y(t)}}{\sqrt{e}}e^{-\frac{y(t)}{2}} \\ y(e) = 1. \end{cases}$$

Siamo ancora in presenza di un'equazione a variabili separabili e si tratta quindi di risolvere

$$\frac{e^{\frac{y(t)}{2}}y'(t)}{\sqrt{y(t)}} = \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

Dato che si tratta di integrare la funzione

$$\int e^{\frac{s}{2}}\sqrt{s}ds$$

che non ammette una primitiva nota, la soluzione viene data in forma implicita

$$F(y) = \int_1^y e^{\frac{s}{2}}\sqrt{s}ds = \frac{2t}{\sqrt{e}} + c;$$

con la condizione iniziale si trova che $c = -2\sqrt{e}$, e quindi la soluzione è data da

$$F(y) = \frac{2t}{\sqrt{e}} - 2\sqrt{e}.$$

Si può notare che la funzione F è localmente attorno a $y = 1$ invertibile; infatti $F(1) = 0$ e $F'(y) = \frac{e^{\frac{y}{2}}}{\sqrt{y}} > 0$, cioè F è strettamente monotona crescente; inoltre la derivata assume per $y \to +\infty$ valori sempre più grandi e quindi la funzione assume valori sempre maggiori man mano che y cresce. F è positiva, condizione che impone $\frac{2t}{\sqrt{e}} - 2\sqrt{e} \geq 0$, cioè $t \geq e$; dalla discussione sulla derivata se ne deduce anche che F è suriettiva con valori in $[0, \infty)$. La soluzione sarà quindi definita per $t \in [0, \infty)$ e sarà data da

$$y(t) = F^{-1}\left(\frac{2t}{\sqrt{e}} - 2\sqrt{e}\right)$$

Soluzione 2 Iniziamo col calcolare le derivate di f;

$$\partial_x f(x,y) = e^{xy}(1+xy), \qquad \partial_y f(x,y) = e^{xy}x^2,$$

$$\partial^2_{xx} f(x,y) = e^{xy}(2y+xy^2), \qquad \partial^2_{xy} f(x,y) = e^{xy}(2x+x^2y), \qquad \partial^2_{yy} f(x,y) = e^{xy}x^3.$$

Valutando tali derivate in $(1,1)$ si trova che

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(1,1) + \nabla f(1,1)\cdot(x-1,y-1) + \frac{1}{2}Hf(1,1)(x-1,y-1)\cdot(x-1,y-1)+ \\ &+ o(\|(x-1,y-1)\|^2) \\ =& e + (2e,e)\cdot(x-1,y-1) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e & 3e \\ 3e & e \end{pmatrix}(x-1,y-1)\cdot(x-1,y-1)+ \\ &+ o(\|(x-1,y-1)\|^2) \\ =& e + 2e(x-1) + 2(y-1) + \frac{3e}{2}(x-1)^2 + 3e(x-1)(y-1) + e(y-1)^2+ \\ &+ o(\|(x-1,y-1)\|^2). \end{aligned}$$

Per lo studio della convessità, dobbiamo trovare i punti $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ in cui la matrice Hessiana di f sia definita positiva, cioè i punti in cui

$$e^{xy}\begin{pmatrix} 2y+xy^2 & 2x+x^2y \\ 2x+x^2y & x^3 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice è definita positiva se

$$\begin{cases} 2y+xy^2 \geq 0 \\ (2y+xy^2)x^3 - (2x+x^2y)^2 \geq 0, \end{cases}$$

cioè per $y\leq 0$ e $2+xy\leq 0$.

Soluzione 3 Notiamo anzitutto che la funzione non è differenziabile per $y=0$ con $f(x,0)=0$; questi sono automaticamente candidati punti di massimo e minimo. Il gradiente della funzione, a meno di un segno, è dato da

$$\nabla f(x,y) = e^y(y, x+xy)$$

che si annulla esclusivamente per $(x,y)=(0,0)$, ma tale punto non è di differenziabilità per f e quindi va scartato. Andiamo quindi a considerare i punti di bordo; ci sono i quattro vertici

$$(1,-1), \quad f(1,-1)=\frac{1}{e}, \qquad (1,1), \quad f(1,1)=e,$$

$$(-1,-1), \quad f(-1,-1)=-\frac{1}{e}, \qquad (-1,1), \quad f(-1,1)=-e.$$

Restano da considerare i quattro lati; iniziamo col lato $x=1$ dove la funzione diventa

$$g_1(y) = f(1,y) = |y|e^y, \qquad y\in(-1,1);$$

la derivata di tale funzione , a parte il segno, è data da

$$g_1'(y) = e^y(1+y)$$

che non si annulla mai in $(-1,1)$. Nel lato $y=1$ otteniamo

$$g_2(x) = f(x,1) = ex, \qquad x\in(-1,1);$$

la derivata di tale funzione non si annulla mai. Nel lato $x = -1$ otteniamo

$$g_3(y) = -|y|e^y, \qquad y \in (-1, 1)$$

e come per g_1 la sua derivata non si annulla mai. Per il lato $y = -1$ si ottiene

$$g_4(x) = \frac{x}{e}, \qquad x \in (-1, 1)$$

che come per g_2 la sua derivata non si annulla mai. Se ne deduce che

$$\min_E f = -e \qquad \text{assunto in } (-1, 1),$$

$$\max_E f = e \qquad \text{assunto in } (1, 1).$$

Soluzione 4 Applichiamo il teorema della divergenza per ottenere

$$\begin{aligned}\Phi(F, \partial E) =& \int_E \mathrm{div} F(x, y, z) dxdydz \\ =& 2\int_E (x + y + z)dxdydz = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z)dz \\ =& \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'ultimo punto, si tenga presente che il flusso è dato dalla somma di quattro flussi sulle superfici laterali del bordo di E; tre di questi flussi sono nulli, quindi

$$\Phi(F, \Sigma) = \Phi(F, \Sigma) = -\frac{1}{4}$$

in quanto l'orientazione di Σ con normale verso il basso è dato dalla normale uscente da E cambiata di segno.

Soluzione 5 Notiamo che per $x = 0$ $u_k(x) = 0$ mentre per $x \neq 0$ $u_k(x)$ è asintoticamente equivalente alla serie armonica $\frac{1}{k^2}$. Abbiamo quindi convergenza puntuale per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per quanto riguarda la convergenza totale, si noti che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_k(x)| = +\infty,$$

quindi non si avrà convergenza totale in $\mathbb{R}$. Invece, sugli intervalli $[-a, a]$, dato che u_k è monotona, si ottiene che

$$\sup_{x\in[-a,a]} |u_k(x)| = \frac{a^3}{a^2 + k^2},$$

e la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^3}{a^2 + k^2}$$

è convergente. Se ne deduce quindi convergenza totale e uniforme in ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 17 febbraio 2014

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) = \dfrac{y'(t)^2}{t^3} \\ \\ y(2) = -5 \\ y'(2) = 4; \end{cases}$$

determinare il dominio di definizione della soluzione trovata e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 Data la funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z - 9, z),$$

dire in quali punti si può applicare il teorema della funzione implicita, determinando in particolare il livello $E_{(0,0)}$; calcolare quindi il lavoro del campo $F(x, y, z) = (-y, x^2, e^{z^2})$ lungo $E_{(0,0)}$.

Esercizio 3 Determinare i punti di massima e minima distanza dall'origine dei punti dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36, 4(x + 2)^2 + 3y^2 - z^2 = 4\}.$$

Esercizio 4 Data la funzione

$$f(x, y) = \cos(xy) + \arctan(2x + y^2) + xe^{y^2} - x^2 - 4y^2,$$

si determini il polinomio di Taylor $g(x, y)$ di grado 2 centrato in $(0, 0)$ e si calcoli il volume dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq g(x, y)\}.$$

Esercizio 5 Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione 2–periodica

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ x & \text{se } x \in [0, 1]; \end{cases}$$

di tale serie studiare le varie convergenze e, sapendo che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, determinare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

Soluzione 1 Siamo in presenza di un'equazione differenziale del secondo ordine che può essere risolta mediante due equazioni del primo ordine ponendo $y'(t) = v(t)$. Prima di tutto risolviamo quindi il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) = \dfrac{v(t)^2}{t^3} \\ \\ v(2) = 4. \end{cases}$$

Questa è un'equazione a variabili separabili la cui soluzione è data da

$$v(t) = \frac{8t^2}{t^2+4}.$$

La soluzione $y(t)$ si determina integrando la precedente espressione, arrivando a

$$y(t) = 8t - 16\arctan\left(\frac{t}{2}\right) + 4\pi - 21.$$

Tale soluzione, anche se l'espressione iniziale non è definita per $t = 0$ e quindi in teoria il Problema di Cauchy sarebbe da intendersi per $t > 0$, ha come dominio tutto $\mathbb{R}$; questo si spiega notando che

$$\lim_{t\to 0} \frac{y'(t)^2}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{62t}{(t^2+4)^2} = 0.$$

Soluzione 2 La funzione g è di classe C^1 e il suo Jacobiano è dato da

$$Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

tale matrice ha rango 2 in tutti i punti tranne che in $(0,0,z)$. I livelli E_c con $c = (c_1,c_2) \in \mathbb{R}^2$ sono quindi regolari ovunque se non esiste $z \in \mathbb{R}$ per cui $(0,0,z) \in E_c$, cioè se $g(0,0,z) = (c_1,c_2)$, che equivale a dire $c_2 \neq c_1 + 9$, mentre se $c_2 = c_1 + 9$ allora il livello E_c avrà una singolarità in corrispondenza del punto $(0,0,c_2)$.

Se ci concentriamo in particolare al livello $E_{(0,0)}$, notiamo che tale insieme è regolare e quindi tale livello è dato, almeno localmente attorno ad ogni suo punto, da una curva. Tale curva è determinata dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$

che altro non è che la circonferenza $x^2 + y^2 = 9$ posta nel piano $z = 0$. Possiamo quindi parametrizzare tale curva mediante $r : [0.2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t) = (3\cos t, 3\text{sen}\, t, 0).$$

Per calcolare il lavoro del campo possiamo quindi procedere in vari modi; il primo è mediante la definizione e cioè calcolando

$$\begin{aligned} \oint_r F(r(t)) \cdot r'(t)dt &= \int_0^{2\pi} (-3\text{sen}\, t, 9\cos^2 t, 1) \cdot (-3\text{sen}\, t, 3\cos t, 0)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (9\text{sen}^2 t + 27\cos^3 t)dt = 9\pi. \end{aligned}$$

In modo alternativo, si può applicare il Teorema di Stokes; notiamo anzitutto che

$$\text{rot}F(x,y,z) = (0,0,2x+1)$$

e la curva r è il bordo della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 \le 9\}.$$

Perchè l'orientazione di r sia quella indotta da Σ, dobbiamo considerare come normale uscente da Σ il versore $(0, 0, 1)$, quindi si ottiene che

$$\begin{aligned}\oint_r F(r(t)) \cdot r'(t) dt &= \int_\Sigma \mathrm{rot} F d\Sigma = \int_{B_3} (0, 0, 2x + 1) \cdot (0, 0, 1) dxdy \\ &= \int_{B_3} (2x + 1) dxdy = |B_3| = 9\pi.\end{aligned}$$

Soluzione 3 Dobbiamo trovare i massimi e minimi della funzione (quadrato) della distanza dall'origine $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ vincolata ad E; utilizziamo quindi il metodo dei moltiplicatori di Lagrange introducendo la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(4x^2 + 9y^2 + z^2 - 36) - \mu(4(x + 2)^2 + 3y^2 - z^2 - 4).$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 8\lambda x - 8\mu(x + 2) = 0 \\ 2y - 18\lambda y - 6\mu y = 0 \\ 2z - 2\lambda z + 2\mu z = 0 \\ 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36 \\ 4(x + 2)^2 + 3y^2 = z^2 + 4. \end{cases}$$

Tale sistema ha come soluzioni il punto $(0, 0, -3)$, $(1, 0, \pm 4\sqrt{2})$ e $(-\frac{16}{7}, \pm\frac{1}{7}\sqrt{\frac{230}{3}}, \pm\frac{\sqrt{50}}{7})$. Per confronto dei valori, si trova che i punti di minima distanza sono i quattro punti $(-\frac{16}{7}, \pm\frac{1}{7}\sqrt{\frac{230}{3}}, \pm\frac{\sqrt{50}}{7})$, mentre i punti di massima distanza sono i due punti $(1, 0, \pm 4\sqrt{2})$.

Soluzione 4 Notiamo anzitutto che $f(0, 0) = 1$, mentre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y \mathrm{sen}\,(xy) + \frac{2}{1 + (2x + y^2)^2} + e^{y^2} - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x \mathrm{sen}\,(xy) + \frac{2y}{1 + (2x + y^2)^2} + 2xye^{y^2} - 8y$$

da cui

$$\nabla f(0, 0) = (3, 0);$$

infine

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -y^2 \cos(xy) - \frac{8(2x + y^2)}{(1 + (2x + y^2)^2)^2} - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\mathrm{sen}\,(xy) - xy\cos(xy) - \frac{8y(2x + y^2)}{(1 + (2x + y^2)^2)^2} + 2ye^{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -x^2 \cos(xy) + \frac{2}{(1 + (2x + y^2)^2)} - \frac{8y^2(2x + y^2)}{(1 + (2x + y^2)^2)^2} + 2x(1 + 2y^2)e^{y^2} - 8$$

da cui

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

La funzione g sarà quindi data da

$$g(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2} Hf(0,0)(x,y) \cdot (x,y) = 1 + 3x - x^2 - 3y^2.$$

Calcoliamo quindi il volume dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1 + 3x - x^2 - 3y^2\};$$

tale insieme è normale rispetto al piano xy,

$$E = \{(x,y) \in D : 0 \le z \le 1 + 3x - x^2 - 3y^2\};$$

dove D è l'ellisse nel piano centrata in $(3/2, 0)$ e di semiassi $\sqrt{13}/2$ e $\sqrt{13}/2\sqrt{3}$. Troviamo quindi che

$$\begin{aligned}|E| =& \int_E dxdydz = \int_D (1 + 3x - x^2 - 3y^2) dxdy \\ =& \frac{13}{4\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \left(\frac{13}{4}\varrho - \frac{13}{4}\varrho^3 \right) d\varrho = \frac{169\pi}{32\sqrt{3}},\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{13}}{2} \varrho \cos\vartheta \\ \\ y = \dfrac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} \varrho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$$

con $\vartheta \in [0, 2\pi]$, $\varrho \in [0,1]$.

Soluzione 5 La funzione è 2–periodica, quindi la pulsazione è $\omega = \pi$; se si traccia il grafico dell'estensione 2–periodica della funzione definita nel testo, si nota che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, quindi la serie converge puntualmente ad f puntualmente e uniformemente su $\mathbb{R}$; come vedremo calcolando i coefficienti, si avrà anche convergenza totale su tutto $\mathbb{R}$.

Per calcolare i coefficienti, usiamo le formule

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^1 x dx = \frac{5}{6},$$

mentre per $k \ge 1$

$$\begin{aligned}a_k =& \int_{-1}^1 f(x) \cos(k\pi x) dx = \int_{-1}^0 x^2 \cos(k\pi x) dx + \int_0^1 x \cos(k\pi x) dx \\ =& \frac{3(-1)^k - 1}{\pi^2 k^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_k =& \int_{-1}^1 f(x) \operatorname{sen}(k\pi x) dx = \int_{-1}^0 x^2 \operatorname{sen}(k\pi x) dx + \int_0^1 x \operatorname{sen}(k\pi x) dx \\ =& \frac{2(1 - (-1)^k)}{\pi^3 k^3}.\end{aligned}$$

La serie di Fourier associata ad f è quindi data da

$$f(x) = \frac{5}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3(-1)^k - 1}{\pi^2 k^2} \cos(k\pi x) + \frac{2(1-(-1)^k)}{\pi^3 k^3} \operatorname{sen}(k\pi x) \right).$$

Per rispondere all'ultima parte dell'esercizio, basta valutare la precedente espressione equivalentemente in $x = 0$ o in $x = 1$ per ottenere che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 3 marzo 2014

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) = e^{-t} \operatorname{sen} t \cos(2t) \\ \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2 Data la curva $r : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t),$$

calcolare parametro d'arco e lunghezza; riparametrizzata la curva secondo il parametro d'arco, si determino la curvatura in ogni punto e i versori tangente e normale principale in $t = \frac{\pi}{4}$.

Esercizio 3 Determinare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - x^3 y + (z^2 - 1)^2.$$

Esercizio 4 Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = (ye^{x+y}, -xe^{x+y}, xy)$$

uscente dal bordo dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |y| \le x \le 2 - |y|, 0 \le z \le x + y\}.$$

Esercizio 5 Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k^2 x)}{k\sqrt{k}};$$

dire infine se la funzione somma è integrabile e/o derivabile in $\mathbb{R}$.

Soluzione 1 L'equazione omogenea si risolve determinando le radici del polinomio coratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2);$$

la soluzione generale dell'equazione omogenea è quindi data da

$$u_0(t) = c_1 + c_2 e^{2t}.$$

Per la soluzione dell'equazione completa si può usare sia il metodo della variazione delle costanti sia il metodo per somiglianza; in entrambi i casi serve scrivere

$$\operatorname{sen} t \cos(2t) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(3t) - \operatorname{sen} t\right).$$

Si arriva quindi alla soluzione data da

$$u(t) = \frac{11}{20} + \frac{31}{60}e^{2t} + e^{-t}\left(\frac{1}{30}\cos(3t) - \frac{1}{60}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{10}\cos t - \frac{1}{20}\operatorname{sen} t\right).$$

Soluzione 2 La curva è di classe C^1 e

$$r'(t) = 3\cos t \operatorname{sen} t(-\cos t, \operatorname{sen} t),$$

quindi

$$\|r'(t)\| = 3\cos t \operatorname{sen} t = \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2t);$$

la curva è quindi regolare eccetto che in $t = 0$ e $t = \pi/2$. Il parametro d'arco è dato da

$$s(t) = \frac{3}{2}\int_0^t \operatorname{sen}(2\tau)d\tau = \frac{3}{2}(\operatorname{sen}^2 t).$$

La lunghezza della curva è data da $\ell(r, [0, \pi/2]) = s(\pi/2) = 3/2$ e la riparametrizzazione in lunghezza d'arco si ottiene ricavando t in funzione di s,

$$t = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}s}\right).$$

Si ottiene quindi la curva $\tilde{r} : [0, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R}^2$,

$$\tilde{r}(s) = \left(\left(\frac{3-2s}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \left(\frac{2s}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right);$$

in questo modo si ottiene che

$$\hat{\tau}_{\tilde{r}}(s) = \tilde{r}'(s) = \left(-\left(\frac{3-2s}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{2s}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

e

$$\tilde{r}''(s) = k_{\tilde{r}}(s)\hat{n}_{\tilde{r}}(s) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{3}{3-2s}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{3}{2s}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Se ne deduce quindi che

$$k_{\tilde{r}}(s) = \|\tilde{r}''(s)\| = \frac{1}{\sqrt{2s(3-2s)}},$$

mentre

$$\hat{n}_{\tilde{r}}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2s}, \sqrt{3-2s}).$$

Per rispondere all'ultimo quesito, si ha che al tempo $t = \frac{\pi}{4}$ corrisponde il parametro d'arco $s = \frac{3}{4}$; quindi la tangente e la normale principale il tale istante saranno dati dai versori

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1), \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1).$$

Soluzione 3 Il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = (6x - 3x^2y, 2y - x^3, 4z(z^2-1));$$

tale gradiente si annulla in nove punti,

$$(0,0,0), \quad ,(0,0,1), \quad (0,0,-1),$$

$$(\sqrt{2},\sqrt{2},0), \quad ,(\sqrt{2},\sqrt{2},1), \quad (\sqrt{2},\sqrt{2},-1),$$

e

$$(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0), \quad ,(-\sqrt{2},-\sqrt{2},1), \quad (-\sqrt{2},-\sqrt{2},-1).$$

Per classificarli, scriviamo la matrice Hessiana

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6-6xy & -3x^2 & 0 \\ -3x^2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2-4 \end{pmatrix};$$

si ottengono quindi le matrici

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad Hf(0,0,\pm 1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$Hf(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix};$$

se ne deduce che i punti $(0,0,\pm 1)$ sono punti di minimo locale stretto mentre tutti gli altri sono punti di sella.

Soluzione 4 Calcoliamo il flusso applicando il Teorema della divergenza;

$$\Phi(F,\partial E) = \int_E \operatorname{div} F(x,y,z)dxdydz = \int_E (y-x)e^{x+y}dxdydz = \int_D (y^2-x^2)e^{x+y}dxdy$$

con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le x \le 2-|y|\}$. Se si effettua il cambio di variabili

$$(u,v) = F(x,y) = (x+y, y-x), \qquad (x,y) = F^{-1}(u,v) = \frac{1}{2}(u-v, u+v)$$

si ottiene che

$$\int_D (y^2-x^2)e^{x+y}dxdy = \frac{1}{2}\int_{[0,2]\times[-2,0]} uve^u dudv = -(e^2+1).$$

Soluzione 5 Dato che

$$\sup_{\mathbb{R}} |u_k(x)| = \sup_{\mathbb{R}} \frac{|\mathrm{sen}\,(k^2 x)|}{k\sqrt{k}} = \frac{1}{k\sqrt{k}} = M_k$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty,$$

la serie converge totalmente (e quindi anche puntualmente e uniformemente) su tutto $\mathbb{R}$. Se ne deduce quindi che

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,(k^2 x)}{k\sqrt{k}}$$

è integrabile in ogni insieme chiuso e limitato $[a, b]$. Per quanto riguarda la derivabilità di f, dato che la serie associata alle derivate delle funzioni u_k

$$u_k'(x) = \sqrt{k}\cos(k^2 x)$$

non converge in nessun punto $x \in \mathbb{R}$, se ne deduce che non si può applicare il teorema della derivazione per serie alla funzione f (in effetti la funzione f non è derivabile in nessun punto). La funzione f è quindi un esempio di una funzione continua non derivabile in alcun punto: in figura

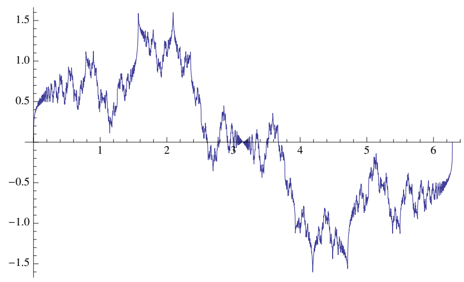


Figura 2: Grafico della funzione f_{1000} in $[0, 2\pi]$.

2 viene riportato il grafico della funzione somma

$$f_{1000}(x) = \sum_{k=1}^{1000} \frac{\mathrm{sen}\,(k^2 x)}{k\sqrt{k}}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 16 giugno 2014

Esercizio 1 Determinare i valori di t_0 e y_0 per i quali il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} (t^2+1)y'(t) = ty^3(t) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione. Per tali soluzioni, determinare il dominio di definizione.

Esercizio 2 Dire se il campo

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}, \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \right)$$

è irrotazionale e/o conservativo; calcolare quindi

$$\int_r F d\vec{r}$$

con $r(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [1,2]$.

Esercizio 3 Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = \frac{ye^x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

sull'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0, x \leq y \leq 2x, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}.$$

Esercizio 4 Si consideri la superficie Σ ottenuta come rotazione del grafico della funzione $y = 1/x$, $x \in [1,2]$, attorno all'asse x e si calcoli il seguente integrale:

$$\int_\Sigma x^6 d\Sigma.$$

Esercizio 5 Studiare le varie convergenze della serie di funzioni;

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2} x^n.$$

Calcolare quindi la funzione somma della serie, studiandone le proprietà di integrabilità e derivabilità.

Soluzione 1 L'equazione differenziale può essere riscritta nella forma

$$y'(t) = \frac{t}{t^2+1} y^3(t);$$

si tratta quindi di una equazione

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

dove la funzione $f(t, y)$ è data da

$$f(t, y) = \frac{t}{t^2+1} y^3.$$

La funzione $t \mapsto f(t, y)$ è quindi continua per ogni $t \in \mathbb{R}$ e la funzione $y \mapsto f(t, y)$ è continua e localmente Lipschitz per $y \in \mathbb{R}$, quindi per ogni $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy associato all'equazione differenziale ammette unica soluzione, definita su tutto $\mathbb{R}$. Per determinare le soluzioni, dato che siamo in presenza di una equazione a variabili separabili, dato che $f(t, 0) = 0$, la funzione $y(y) \equiv 0$ è soluzione, mentre le soluzioni non nulle sono date da

$$y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1 - y_0^2 \ln \frac{t^2+1}{t_0^2+1}}}.$$

Soluzione 2 È immediato notare che

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = 0.$$

Il dominio di F però è dato da

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x = y = 0\}$$

che altro non è che lo spazio privato dell'asse z; tale dominio non è semplicemente connesso, quindi non possiamo concludere che il campo sia conservativo.

Si nota però che

$$F(x, y, z) = \nabla U(x, y, z), \qquad U(x, y, z) = \frac{z}{x^2+y^2} + \arctan z;$$

siccome la funzione U ha lo stesso dominio di F, se ne deduce che F ha un potenziale globale e quindi F è conservativo.

Per calcolare l'integrale dato, visto che il punto iniziale della curva è $(1, 1, 1)$ e il punto finale è $(2, 4, 8)$, troviamo che

$$\int_r F \cdot d\vec{r} = U(2, 4, 8) - U(1, 1, 1) = \arctan(8) - \frac{1}{10} - \frac{\pi}{4}.$$

Soluzione 3 Il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x, y) = \frac{e^x}{(9 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} (y(9 - x^2 + x - y^2), 9 - x^2).$$

Tale gradiente non si annulla mai nell'interno dell'esieme E. Cerchiamo quindi i punti stazionari vincolati abbiamo quattro lati, cioè

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 = 4$$

$$x = y, \qquad y = 2x.$$

Possiamo parametrizzare i primi due lati con le curve

$$r_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \qquad r_2(t) = 2r_1(t),$$

ottenendo le due funzioni

$$g_1(t) = f(r_1(t)) = \frac{\operatorname{sen} t e^{\cos t}}{2\sqrt{2}}, \qquad g_2(t) = f(r_2(t)) = \frac{2\operatorname{sen} t e^{2\cos t}}{\sqrt{5}}.$$

Per quanto riguarda la prima funzione, la sua derivata è data da

$$g_1'(t) = \frac{e^{\cos t}}{2\sqrt{2}}(\cos^2 t + \cos t - 1)$$

che si annulla quando

$$\cos t = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

sotto tale condizione si indivudua il punto

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$$

che appartiene ad E e quindi è candidato massimo o minimo; calcoliamo quindi

$$f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}{2}.$$

Analogamente, per la seconda funzione si trova

$$g_2'(t) = \frac{2e^{2\cos t}}{\sqrt{5}}(2\cos^2 t + \cos t - 2)$$

che si annulla per

$$\cos t = \frac{\sqrt{17}-1}{4};$$

tale condizione individua il punto

$$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}\right)$$

e tale punto non appartiene ad E. Determiniamo quindi i quattro vertici di E che sono dati da

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

Per confronto dei valori troviamo quindi che

$$\min_E f = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{5}}}}{\sqrt{10}}, \qquad \text{assunto in } \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

mentre

$$\max_E f = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}, \qquad \text{assunto in } \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right).$$

Soluzione 4 La superficie si ottiene ruotando la curva

$$r(x) = \left(x, \frac{1}{x}, 0\right), \qquad x \in [1, 2],$$

attorno all'asse x; tale superficie è ad esempio parametrizzata da

$$r(x, \vartheta) = \left(x, \frac{\cos\vartheta}{x}, \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{x}\right), qquadx \in [1, 2], \vartheta \in [0, 2\pi].$$

L'integrale di superficie diventa quindi

$$\int_\Sigma x^6 d\Sigma = 2\pi \int_1^2 x^3\sqrt{x^4+1}dx = \frac{4\pi}{3}(17\sqrt{17} - 2\sqrt{2}).$$

Soluzione 5 La serie data è una serie di potenze con

$$c_n = (-1)^n \frac{n+1}{n+2};$$

dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1,$$

se ne deduce che la serie converge sicuramente per $|x| < 1$. Per $x = 1$ si ottiene la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2},$$

mentre per $x = -1$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2};$$

entrambe le serie non convergono in quanto il termine generale della serie non tende a 0. Quindi la serie converge in $x \in (-1, 1)$, con convergenza totale e uniforme negli intervalli chiusi e limitati $[a, b] \subset (-1, 1)$.

Per la determinazione della somma della serie, posto

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2} x^n = \frac{1}{x^2} f(x),$$

con

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2} x^{n+2};$$

notiamo quindi che

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{n+1} = x g(x),$$

con

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n.$$

Dato che

$$\int_0^x g(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{x}{1+x},$$

ne deduciamo che

$$g(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{(1+x)^2},$$

quindi

$$f'(x) = \frac{x}{(1+x)^2},$$

da cui

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{n+2}x^n = \frac{\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{x^2(1+x)} - \frac{1}{x^2}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 14 luglio 2014

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{2}{t} y(t) + 4t^2 \sqrt{y(t)} \\ \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 Dire se il campo

$$F(x, y, z) = \left(\frac{z}{x+y}, \frac{z}{x+y}, \ln(x+y) \right)$$

è irrotazionale e/o conservativo sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

in caso, calcolare il potenziale che vale 1 nel punto $(1, 1, 1)$.

Esercizio 3 Determinare l'area della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Esercizio 4 Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = \arctan(x^2 - y^3)$$

sull'insieme $E = [-1, 1] \times [0, 1]$.

Esercizio 5 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

Calcolare quindi i seguenti limiti

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx, \quad \lim_{n \to +\infty} \int_1^2 f_n(x) dx.$$

Soluzione 1 La funzione $y(t) \equiv 0$ risolve l'equazione differenziale e soddisfa la condizione iniziale, quindi è una soluzione.

Possiamo ricercare anche le soluzioni non nulle; il fatto che abbia senso cercare le soluzioni non nulle deriva dal fatto che la funzione

$$y \mapsto \frac{2}{t}y + 4t^2\sqrt{y}$$

non è Lipschitziana per $y \to 0$ e quindi non si applica il teorema di unicità delle soluzioni se il dato iniziale è $y_0 = 0$, come nel nostro caso.

Possiamo cercare le soluzioni non banali sia vedendo l'equazione come Bernoulli o come variabili separabili. Si arriva in entrambi i casi alla soluzione

$$y(t) = t^2(t^2 - 1)^2.$$

Soluzione 2 È facile verificare che

$$\text{rot}F(x, y, z) = 0;$$

dato che il dominio E è semplicemente connesso, se ne deduce che F è conservativo su E. Per quanto riguarda il potenziale, si nota che la funzione

$$U(x, y, z) = z\ln(x + y) + c$$

ha la prorietà che $\nabla U = F$; la condizione $U(1, 1, 1) = 1$ si verifica per $c = 1 - \ln 2$, da cui il fatto che il potenziale cercato è dato da

$$U(x, y, z) = z\ln(x + y) + 1 - \ln 2.$$

Soluzione 3 Possiamo scrivere $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ con

$$\Sigma^\pm = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y = \pm\sqrt{x(2 - x)}\};$$

si nota anche che $\text{Area}(\Sigma^+) = \text{Area}(\Sigma^-)$ e quindi $\text{Area}(\Sigma) = 2\text{Area}(\Sigma^\pm)$.

Calcoliamo ad esempio l'area di

$$\Sigma^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sqrt{x(2 - x)}, z^2 \leq 4 - 2x\};$$

tale superficie è il grafico della funzione

$$g(x, z) = \sqrt{x(2 - x)}$$

sul dominio

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -\sqrt{4 - 2x} \leq z \leq \sqrt{4 - 2x}\}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\text{Area}(\Sigma^+) &= \int_D \sqrt{1 + |\nabla g(x, z)|^2}dxdz \\
&= \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-2x}}^{\sqrt{4-2x}} \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}dz \\
&= \int_0^2 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}dx = 8.
\end{aligned}$$

Soluzione 4 Il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{1+(x^2-y^3)}(2x, -3y^2)$$

che si annulla in $(0,0)$, punto non interno all'insieme dato.

Vediamo la restrizione ai bordi; otteniamo le funzioni

$$g_1(x) = f(x,1) = \arctan(x^2-1), \quad g_2(x) = f(x,0) = \arctan(x^2)$$

e

$$g_3(y) = f(1,y) = \arctan(1-y^3), \quad g_4(y) = f(-1,y) = \arctan(1-y^3) = g_3(y).$$

Dato che

$$g_1'(x) = \frac{2x}{1+(x^2-1)^2}, \quad g_2'(x) = \frac{2x}{1+x^4},$$

troviamo che i due punti $(0,1)$ e $(0,0)$ sono candidati massimo e minimo; calcoliamo

$$f(0,1) = -\frac{\pi}{4}, \qquad f(0,0) = 0.$$

Per le altre due funzioni

$$g_3'(y) = g_4'(y) = -\frac{3y^2}{1+(1-y^3)^2},$$

e quindi anche i punti $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono candidati; calcoliamo

$$f(1,0) = f(-1,0) = \frac{\pi}{4}.$$

Infine valutiamo la funzione nei quattro vertici:

$$f(1,0) = f(-1,0) = \frac{\pi}{4}, \quad f(1,1) = f(-1,1) = 0.$$

In definitiva

$$\min_E f = -\frac{\pi}{4} \text{ assunto in } (0,1),$$

mentre

$$\max_E f = \frac{\pi}{4} \text{ assunto un } (1,0) \text{ e } (-1,0).$$

Soluzione 5 È facile verificare che per ogni $x > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{x^2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{x},$$

mentre $f_n(0) = 0$ per ogni n. Quindi la successione di funzioni converge alla funzione discontinua $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La convergenza non può quindi essere uniforme su tutto $[0,+\infty)$ in quanto le f_n sono continue; in effetti

$$\sup_{x\geq 0} \left| \frac{x}{x^2+\frac{1}{n}} - f(x) \right| = \sup_{x>0} \left| \frac{x}{x^2+\frac{1}{n}} - \frac{1}{x} \right| = \sup_{x>0} \frac{1}{nx(x^2+\frac{1}{n})} = +\infty.$$

La convergenza sarà uniforme su $[a, +\infty)$ per ogni $a > 0$ in quanto

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,+\infty)} \frac{1}{nx(x^2 + \frac{1}{n})} = \frac{1}{na(x^2 + \frac{1}{n})} \to 0$$

per $n \to +\infty$. Per quanto riguarda i due limiti, per il primo dobbiamo calcolare prima l'integrale e poi fare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \ln(1 + n) = +\infty,$$

mentre per il secondo possiamo usare il teorema di passaggio al limite sotto al segno di integrale per ottenere

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 f_n(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 3 settembre 2014

Esercizio 1 Risolvere al variare del parametro $y_0 \in \mathbb{R}$ il seguente problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{y(t) - y(t)^2}{t} \\ \\ y(1) = y_0. \end{cases}$$

Delle soluzioni trovate, determinare il dominio (t_1, t_2) di esistenza e calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{t \to t_i} y(t), \qquad \lim_{t \to t_i} y'(t), \qquad i = 1, 2.$$

Esercizio 2 Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \sqrt[3]{y^2(x-1)};$$

dire quindi dove la funzione è di classe C^1 e studiare la differenziabilità nei punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$, scrivendo dove possibile l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nei suddetti punti.

Esercizio 3 Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{2(x + 2y) - x^2 - 2y^2 - 1}$$

e su tale dominio determinare massimo e minimo della funzione.

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int_E \frac{ye^x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy,$$

con $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Esercizio 5 Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^4 + 1},$$

discutendo in particolare la derivabilità di f.

Soluzione 1 L'equazione può essere vista come a variabili separabili, con

$$a(t) = \frac{1}{t}, \qquad b(y) = y(1-y).$$

Dato che il dominio di a è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e il dato iniziale è assegnato per $t_0 = 1$, le soluzioni vanno ricercate nell'intervallo $(0, +\infty)$. Siccome $b(y) = 0$ per $y = 0$ e $y = 1$, abbiamo le due soluzioni stazionarie

$$y(t) \equiv 0, \qquad y(t) \equiv 1,$$

entrambe definite per $t \in (0 + \infty)$. le soluzioni non stazionarie si cercano dividendo l'equazione per $b(y)$, arrivando alle soluzioni

$$y(t) = \frac{y_0 t}{y_0(t-1)+1};$$

calcoliamo anche la derivata della precedente funzione

$$y'(t) = \frac{y_0(1-y_0)}{(y_0(t-1)+1)^2}.$$

Il dominio di tali soluzioni dipende dal dato iniziale y_0, in quanto il denominatore è definito per

$$t \neq 1 - \frac{1}{y_0}.$$

Siccome per $y_0 < 0$ si ha che $1 - \frac{1}{y_0} > 1$, allora in tal caso si avrà $t_1 = 0$ e $t_2 = 1 - \frac{1}{y_0}$, cioè le soluzioni sono definite in $(0, 1 - \frac{1}{y_0})$. Avremo che

$$\lim_{t \to 0} y(t) = 0, \qquad \lim_{t \to 1 - \frac{1}{y_0}} y(t) = -\infty,$$

mentre

$$\lim_{t \to 0} y'(t) = \frac{y_0}{1 - y_0}, \qquad \lim_{t \to 1 - \frac{1}{y_0}} y(t) = -\infty.$$

Per $y_0 \in (0,1)$, avremo che $1 - \frac{1}{y_0} < 0$, e quindi si avrà $t_1 = 0$ e $t_2 = +\infty$, cioè il fatto che le soluzioni sono definite in $(0, +\infty)$. Avremo poi che

$$\lim_{t \to 0} y(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} y(t) = 1,$$

mentre

$$\lim_{t \to 0} y'(t) = \frac{y_0}{1 - y_0}, \qquad \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0.$$

Infine per $y_0 > 1$ avremo che $1 - \frac{1}{y_0} \in (0,1)$, e quindi $t_1 = 1 - \frac{1}{y_0}$ e $t_2 = +\infty$, cioè le soluzioni sono definite in $(1 - \frac{1}{y_0}, +\infty)$. Avremo infine che

$$\lim_{t \to 1 - \frac{1}{y_0}} y(t) = +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} y(t) = 1,$$

mentre

$$\lim_{t \to 1 - \frac{1}{y_0} 0} y'(t) = -\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0.$$

Soluzione 2 La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$; le derivate parziali di f sono date da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x-1}{y}}.$$

Tali derivate sono definite e continue per $x \neq 1$ (quanto meno per la derivata rispetto ad x) e $y \neq 0$ (quanto meno per la derivata rispetto ad y).

Ci si può chiedere se la derivata rispetto ad x può essere definita anche per $x = 1$; si deve in tal caso distinguere il caso $y = 0$ e $y \neq 0$. Nel primo caso si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h} = 0,$$

mentre per $y \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,y) - f(1,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{y^2 h}}{h} = \infty.$$

Ripetiamo l'argomento per la derivata rispetto ad y per trattare il caso $y = 0$; distinguiamo ancora il caso $x = 1$ dal caso $x \neq 1$. Avremo che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,h) - f(1,0)}{h} = 0,$$

mentre per $x \neq 1$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^2(x-1)}}{h} = \infty.$$

Si può inoltre vedere che

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y);$$

basta infatti porre $x = 1 + \varrho\cos\vartheta$ e $y = \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$ per trovare che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\cos\vartheta}{\mathrm{sen}\,\vartheta}}$$

e quindi passando al limite per $\varrho \to 0$ si nota che il limite dipende dall'angolo ϑ. Analogamente si trova che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{\mathrm{sen}\,\vartheta}{\cos\vartheta}\right)^2}$$

ed ancora il limite per $\varrho \to 0$ dipende dall'angolo ϑ.

In definitiva, se ne conclude che f è di classe C^1 in

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 1, y = 0\}$$

e quindi ivi differenziabile, mentre il gradiente esiste anche in $(1,0)$. Per vedere se in tale punto la funzione sia differenziabile o meno bisogna usare la definizione e verificare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{f(x,y) - f(1,0) - \nabla f(1,0)\cdot(x-1,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$$

La verifica si fa prendendo $\nabla f(1,0) = (0,0)$ e quindi passando alle coordinate polari centrate in $(1,0)$ si ottiene che

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{f(x,y) - f(1,0) - \nabla f(1,0)\cdot(x-1,y)}{\|(x-1,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt[3]{y^2(x-1)+1} - 1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$
$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\sqrt[3]{\varrho^3 \cos\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta}}{\varrho} = \sqrt[3]{\cos\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta}.$$

Anche in questo caso il limite dipende dall'angolo ϑ e quindi se ne deduce che la funzione non è differenziabile in $(1,0)$.

In definitiva la funzione non è differenziabile nel punto $(1,0)$, mentre lo è in $(0,1)$ con $\nabla f(0,1) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$. Quindi solo nel secondo punto ha senso parlare di piano tangente che avrà quindi equazione data da

$$z = f(0,1) + \nabla f(0,1)\cdot(x, y-1) = \frac{1}{3}(1,-2)\cdot(x,y-1),$$

cioè

$$x - 2y - 3z + 2 = 0.$$

Soluzione 3 Il dominio della funzione è determinato dalla condizione

$$2(x+2y) - x^2 - 2y^2 - 1 \geq 0,$$

che può essere equivalentemente scritta come

$$\frac{(x-1)^2}{2} + (y-1)^2 \leq 1.$$

Tale dominio è quindi dato da un'ellisse centrata in $(1,1)$ con semiassi $\sqrt{2}$ e 1. La funzione f è sempre positiva e nulla per

$$\frac{(x-1)^2}{2} + (y-1)^2 = 1;$$

se ne deduce quindi che

$$\min f = 0, \qquad \text{assunto nei punti dell'ellisse } \frac{(x-1)^2}{2} + (y-1)^2 = 1.$$

Per determinare il massimo basta determinare il massimo della funzione

$$g(x,y) = 2(x+2y) - x^2 - 2y^2 - 1;$$

dato che

$$\nabla g(x,y) = (2-2x, 4-4y), \qquad Hg(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

notiamo che g è strettamente concava. Quindi se ha un punto stazionario, esso è pure l'unico punto di massimo. In effetti $\nabla g(x,y) = 0$ per $(x,y) = (1,1)$, quindi

$$\max f = \sqrt{2}, \qquad \text{assunto in } (1,1).$$

Soluzione 4 Possiamo calcolare l'integrale in modo diretto:

$$\int_E \frac{ye^x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{ye^x}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$
$$= \int_{-1}^{1} e^x 1 - |x| dx = e + \frac{1}{e} - 2.$$

Soluzione 5 Dato che

$$|u_n(x)| = \frac{|\cos(n^2 x)|}{n^4+1} \leq \frac{1}{n^4+1} \leq \frac{1}{n^4}$$

e che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \infty,$$

se ne deduce che la serie converge totalemente su tutto $\mathbb{R}$. La funzione f è quindi ben definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, dato che

$$|u_n'(x)| = \frac{n^2|\mathrm{sen}\,(n^2 x)|}{n^4+1} \leq \frac{n^2}{n^4+1} \leq \frac{1}{n^2},$$

se ne deduce che anche le serie delle derivate converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$. Possiamo quindi applicare il teorema di derivazione per serie per concludere che $f \in C^1(\mathbb{R})$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 15 settembre 2014

Esercizio 1 Risolvere al variare del parametro $y_0 \in \mathbb{R}$ il seguente problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 - 1 \\ \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Delle soluzioni trovate, determinare il dominio; in particolare, si traccino dei grafici qualitativi per le soluzioni con $y_0 = -2, -1, 0, 1, 2$.

Esercizio 2 Si dica se e dove la seguente funzione è concava o convessa:

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 + y}.$$

Esercizio 3 Determinare e classificare i punti stazionari di

$$f(x, y) = \frac{x + y - 1}{x^2 + y^2}.$$

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int_E \frac{|x|e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdydz,$$

con $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Esercizio 5 Si scriva la serie di Fourier associata alla funzione π–periodica $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \operatorname{sen} x & \text{se } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \\ \cos x & \text{se } x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

Studiare quindi le varie convergenze della serie.

Soluzione 1 L'equazione è a variabili separabili; abbiamo quindi due soluzioni stazionarie

$$y(t) \equiv 1, \qquad y(t) \equiv -1.$$

Le altre soluzioni si determinano dividendo per $y^2 - 1$ ed integrando, arrivando alle soluzioni

$$y(t) = \frac{y_0 - 1 + (y_0 + 1)e^{2t}}{(y_0 + 1)e^{2t} - (y_0 - 1)}.$$

In corrispondenza dei valori iniziali $y_0 = -2, -1, -0, 1, 2$ si avranno quindi le soluzioni

$$y_{-2}(t) = \frac{e^{2t} + 3}{e^{2t} - 3}, \quad y_{-1}(t) = -1, \quad y_0(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1},$$

$$y_1(t) = 1, \quad y_2(t) = \frac{3e^{2t} + 1}{3e^{2t} - 1}.$$

Le soluzioni sono definite per

$$e^{2t} \neq \frac{y_0 - 1}{y_0 + 1};$$

quindi, se

$$\frac{y_0 - 1}{y_0 + 1} \leq 0,$$

le soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$, altrimenti abbiamo delle restrizioni. La condizione precedente equivale a richiedere

$$y_0 \in [-, 1, 1].$$

Inoltre, dato che

$$\frac{y_0 - 1}{y_0 + 1} > 1$$

per $y_0 < -1$, avremo in tal caso che la soluzione è definita nell'intervallo

$$\left(-\infty, \frac{1}{2} \ln \frac{y_0 - 1}{y_0 + 1}\right),$$

invece dato che per $y_0 > 1$ abbiamo

$$0 < \frac{y_0 - 1}{y_0 + 1} < 1,$$

in tal caso le soluzioni saranno definite in

$$\left(\frac{1}{2} \ln \frac{y_0 - 1}{y_0 + 1}, +\infty\right).$$

Soluzione 2 Per studiare la convessità o concavità di f studiamo la matrice Hessiana. Anzitutto il dominio di f è individuato dalla condizione

$$1 - x^2 + y \geq 0,$$

con disuguaglianza stretta se vogliamo che sia di classe C^∞. La matrice Hessiana di f è data da

$$Hf(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2 + y)^3}} \begin{pmatrix} -y - 1 & \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

la matrice Hessiana è definita positiva, grazie al criterio di Sylvestre, se

$$\begin{cases} y \leq -1 \\ y \geq x^2 - 1 \end{cases},$$

condizione mai verificata sul dominio di f, mentre la matrice è definita negativa se

$$\begin{cases} y \geq -1 \\ y \geq x^2 - 1 \end{cases},$$

condizione sempre verificata sul dominio di f. Se ne deduce che la funzione è strettamente concava sul suo dominio.

Si poteva arrivare alla stessa conclusione notando che la funzione è composizione della funzione radice (strettamente concava e monotona crescente) con il polinomio di secondo grado

$$g(x, y) = 1 - x^2 + y$$

la cui matrice Hessiana è data da

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi g è concava; da qui la concavità di f in quanto composizione di due funzioni concave.

Soluzione 3 Osserviamo anzitutto che la funzione è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e in $(0, 0)$ non c'è modo di estenderla continua in quanto

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + y - 1}{x^2 + y^2}.$$

Cerchiamo i punti stazionari di f ponendo $\nabla f(x, y) = 0$; dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y^2 - x^2 - 2xy + 2x}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{x^2 - y^2 - 2xy + 2y}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} y^2 - x^2 - 2xy + 2x = 0 \\[1ex] x^2 - y^2 - 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$

Sommando e sottraendo le due equazioni si arriva al sistema equivalente

$$\begin{cases} x + y - 2xy = 0 \\[1ex] y^2 - x^2 + x - y = 0 \end{cases}$$

Siccome la seconda equazione può essere riscritta nella forma

$$(y - x)(y + x - 1) = 0,$$

notiamo che si può avere o $y = x$ o $y = 1 - x$. Nel primo caso si trova il punto $(1, 1)$, mentre nel secondo caso non si trovano soluzioni. Quindi $(1, 1,)$ è l'unico punto stazionario per f; dato che la matrice Hessiana di f in tale punto è data da

$$Hf(1, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

se ne deduce che $(1, 1)$ è un punto di massimo locale stretto.

Soluzione 4 Possiamo integrare per strati ottenendo

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{|x|e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz =& \int_{-1}^{1} e^z \left(\int_{B_{\sqrt{1-z^2}}} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \right) dz \\
=& 4\int_{-1}^{1} e^z \left(\int_{\{x^2+y^1\le 1-z^2, x\ge 0, y\ge 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \right) dz \\
=& 2\int_{-1}^{1} e^z [\operatorname{sen}\vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} [\varrho^2]_0^{\sqrt{1-z^2}} dz \\
=& \frac{8}{e}.
\end{aligned}$$

Soluzione 5 Se si traccia il grafico di f su tutto $\mathbb{R}$, ci si accorge che la funzione è π–periodica con discontinuità in $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi la serie di Fourier converge alla funzione regolarizzata con convergenza uniforme negli intervalli $[a,b] \subset (0,\pi)$ e sue repliche π–periodiche.

Calcoliamo quindi i coefficienti che sono dati da

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\operatorname{sen} x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx \right) = 1 - \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned}
a_k =& \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\operatorname{sen} x)\cos(2kx)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos(2kx) dx \right) \\
=& \frac{2(1+(-1)^k)}{\pi(4k^2-1)} = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(8h^2-1)} & \text{se } k=2h \\ 0 & \text{se } k = 2h-1. \end{cases}
\end{aligned}$$

ed infine

$$\begin{aligned}
b_k =& \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen}(2kx)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \operatorname{sen}(2kx) dx \right) \\
=& \frac{8k^2-1+(-1)^k}{\pi k(4k^2-1)}.
\end{aligned}$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 10 novembre 2014

Esercizio 1 Scrivere l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y''(t) + y'(t) = 4 + 2t + e^{-t}.$$

Esercizio 2 Studiare la regolarità della curva definita da:

$$\varrho = \cos^3\left(\frac{\vartheta}{3}\right), \qquad \vartheta \in \left[-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right].$$

Si calcoli quindi la lunghezza di tale curva.

Esercizio 3 Verificare che siano soddisfatte le condizioni del Teorema della funzione implicita per la funzione

$$f(x, y, z) = ((y + 3)z - \tan z + 2x, \sin z + 3y - 3x)$$

in $(0, 0, 0)$; scrivere quindi l'equazione della retta tangente e del piano normale all'insieme $E_{(0,0)}(f) = \{f = 0\}$ nel punto $(0, 0, 0)$.

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_E \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy,$$

con E determinato in coordinate polari dalle condizioni $\vartheta \in [\pi, 2\pi]$, $\varrho \leq \vartheta$.

Esercizio 5 Si studino le convergenze, in particolare quella totale, della serie di funzioni

$$f_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-k^2 a} \sin(kx),$$

con $a > 0$ parametro reale fissato. Definire quindi la funzione $u(x, t) = f_t(x)$ e dimostrare che u è derivabile sia rispetto ad x che rispetto a t e mostrare che

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

Soluzione 1 L'equazione data è una equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti completa con termine forzante $4+2t+e^{-t}$. Si può risolvere tale equazione in vari modi; sia usando il polinomio caratteristico e poi ricercando la soluzione particolare, oppure ricondurre l'equazione ad una equazione del primo ordine mediante la sostituzione $z(t)=y'(t)$. Presentiamo la soluzione utilizzando questo secondo metodo, notando solo che nel primo caso la soluzione particolare si può ricercare sia con il metodo della variazione delle costanti, sia utilizzando il metodo per somiglianza scrivendo il termine forzante come somma dei due termini

$$4+2t, \qquad e^{-t}.$$

Se poniamo $z=y'$, arriviamo all'equazione lineare del primo ordine

$$z'(t)+z(t)=4+2t+e^{-t};$$

per tale equazione abbiamo la formula risolutiva che genera la soluzione

$$\begin{aligned} z(t) =& e^{-t}\left(c_1+\int e^t(4+2t+e^{-t})dt\right) \\ =& c_1e^{-t}+te^{-t}+2+2t. \end{aligned}$$

Integrando la precedente espressione si arriva alla soluzione generale

$$y(t)=c_1e^{-t}+c_2-te^{-t}+2t+t^2,$$

dove la costante c_1 in quest'ultima espressione non è la stessa di quella nella soluzione z ma é data da $-c_1-1$.

Soluzione 2 La curva data è regolare quando $\varrho(\vartheta)\neq 0$, cioè per $\vartheta\neq\pm\frac{3\pi}{2}$; si vede ciò scrivendo

$$r(\vartheta)=\varrho(\vartheta)(\cos\vartheta,\sin\vartheta)$$

e notando che

$$\|r'(\vartheta)\|=\sqrt{\varrho(\vartheta)^2+\varrho'(\vartheta)^2}=\cos^2\left(\frac{\vartheta}{3}\right);$$

quindi in realtà la curva è regolare in $[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$. La lunghezza della curva sarà poi data da

$$\ell(r,[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}])=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^2\left(\frac{\vartheta}{3}\right)d\vartheta=\frac{3\pi}{2}.$$

Il sostegno della curva è riportato in Figura3.

Soluzione 3 Calcoliamo la matrice Jacobiana della funzione data;

$$Df(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2 & z & y+3-1-\tan^2 z \\ -3 & 3 & \cos z \end{pmatrix}$$

che in $(0,0,0)$ diventa

$$Df(0,0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

il rango di tale matrice è 2 e quindi il teorema si applica per concludere che attorno al punto $(0,0,0)$ il livello $E_{(0,0)}$ è una curva. Il vettore

$$(2,0,2)\times(-3,3,1)=(-6,-8,6)$$

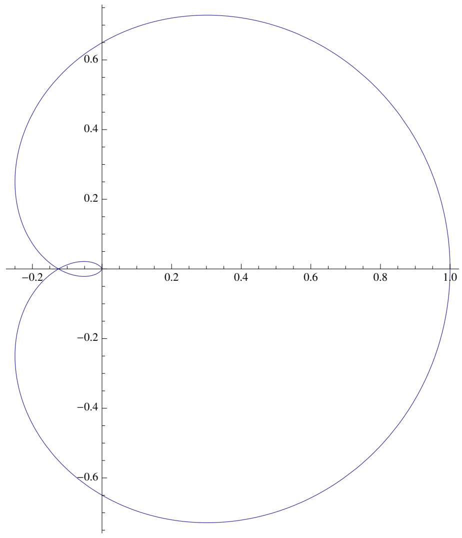


Figura 3: Sostegno della curva $\varrho = \cos^3(\vartheta/3)$.

è un vettore tangente ad $E_{(0,0)}$ in $(0,0,0)$, quindi la retta tangente è parametrizzata da

$$r(t) = t(-6,-8,6), \qquad t \in \mathbb{R},$$

che in forma cartesiana diventa

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 4x - 3y = 0. \end{cases}$$

L'equazione del piano ortogonale sarà invece data da

$$6x + 8y - 6z = 0.$$

Si può notare che la curva $E_{(0,0)}$ può in questo caso anche essere parametrizzata, almeno intorno al punto $(0,0,0)$; infatti, ricavando dall'equazione $f_2(x,y,z) = 0$

$$x = \frac{1}{3}\sin z + y$$

e sostituendola nell'equazione $f_1(x,y,z) = 0$, possiamo ricavare y in funzione di z

$$y = \frac{1}{z+2}\left(\tan z - \frac{2}{3}\sin z - 3z\right)$$

che è ben definita per $z \neq 2$. Di conseguenza

$$x = \frac{1}{3}\sin z + \frac{1}{z+2}\left(\tan z - \frac{2}{3}\sin z - 3z\right).$$

Si può quindi definire la curva $r : (-2,+\infty) \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t) = \left(\frac{1}{3}\sin t + \frac{1}{t+2}\left(\tan t - \frac{2}{3}\sin t - 3t\right), \frac{1}{t+2}\left(\tan t - \frac{2}{3}\sin t - 3t\right), t\right)$$

con la proprietà che $r(0) = (0,0,0)$. In questo caso la retta tangente sarà parametrizzata da

$$(0,0,0) + tr'(0) = \left(-t, -\frac{4}{3}t, t\right),$$

in quanto

$$r'(0) = \left(-1, -\frac{4}{3}, 1\right);$$

si noti che tale parametrizzazione è equivalente a quella trovata in precedenza in quanto

$$(-1, -\frac{4}{3}, 1) = \frac{1}{6}(-6, -8, 6).$$

Soluzione 4 L'insieme di integrazione è già dato in coordinate polari, quindi calcoliamo l'integrale passando alle coordinate polari

$$\begin{aligned}\int_E \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy &= \int_\pi^{2\pi} d\vartheta \int_0^\vartheta \varrho^2 \sin\vartheta\cos\vartheta d\varrho \\ &= \frac{1}{6}\int_\pi^{2\pi} \vartheta^3 \sin(2\vartheta) d\vartheta \\ &= -\frac{7}{12}\pi^3 + \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

Soluzione 5 Si noti che, posto $u_k(x) = \frac{e^{-k^2a}\sin(kx)}{k}$,

$$|u_k(x)| \leq \frac{e^{-k^2a}}{k}$$

e la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2a}}{k}$$

converge in quanto $a > 0$ (si applichi il criterio della radice), quindi la serie di funzioni converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$.

Inoltre, la serie delle derivate rispetto ad x è determinata dalle funzioni

$$v_k(x) = e^{-k^2a}\cos(kx), \qquad w_k(x) = -ke^{-k^2a}\sin(kx);$$

anche per tali serie di funzioni vi è la convergenza totale su tutto $\mathbb{R}$ in quanto le funzioni v_k e w_k sono maggiorate da e^{-k^2a} e ke^{-k^2a} e le due serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2a}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2a}$$

sono convergenti. Esiste quindi la derivata seconda rispetto ad x della funzione

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2t}}{k}\sin(kx)$$

con

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2t}\sin(kx).$$

Per quanto riguarda la derivata di u rispetto a t, si deve studiare la convergenza della derivate di

$$\frac{e^{-k^2 t}}{k}\sin(kx)$$

rispetto alla variabile t; tali derivate sono date da

$$-ke^{-k^2 t}\sin(kx),$$

arrivando ancora allo studio della convergenza della serie associata alle funzioni w_k. Sappiamo quindi già che tale serie converge totalemente su tutto $\mathbb{R}$ e quindi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2 t}\sin(kx),$$

e quindi la funzione u risolve effettivamente l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

Si potrebbe in realtà dimostrare che la funzione è derivabile infinite volte sia rispetto ad x che rispetto a t. Sostituendo i valori $x = 0$ e $x = \pi$ nell'espressione di u, si trova facilmente che

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad \forall t \geq 0.$$

Notiamo infine che la funzione u per $t = 0$ assume il valore

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin(kx);$$

quest'ultima espressione è lo sviluppo in serie di Fourier della funzione 2π–periodica dispari i cui coefficienti sono dati da

$$a_k = 0, b_k = \frac{1}{k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Se denotiamo con $f(x)$ tale funzione, con $x \in \mathbb{R}$, abbiamo quindi trovato la soluzione del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & \forall x \in [0,\pi], t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \forall t > 0. \end{cases}$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 22 dicembre 2014

Esercizio 1 Determinare, al variare del paramtro reale $y_0 \in \mathbb{R}$, la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (1 - y(t))(2 - y(t))t, \\ \\ y(0) = y_0; \end{cases}$$

tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni ed in particolare determinare la soluzione relativa a $y_0 = 3$.

Esercizio 2 Dire se nel punto $(0, 0, 2)$ si può applicare il Teorema della funzione implicita per la funzione

$$f(x, y, z) = (ze^x + y \ln z - 3x \cos y, x^5 + yz);$$

scrivere quindi l'equazione della retta tangente e del piano normale ad $E_{(2,0)}$ in $(0, 0, 2)$.

Esercizio 3 Dopo aver individuato il suo dominio, determinare, se esistono, massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y^2) + \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

(N.B. Nella soluzione si tenga presente che $\sqrt{2} + 1 > 2e^{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$).

Esercizio 4 Verificare la validità del Teorema di Stokes per il campo

$$F(x, y, z) = (y + y^2z^3, z + 2xyz^3, x + 3xy^2z^2)$$

sulla superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9x^2z^2 + 4y^2z^3 \leq 36z, z = 1\}$$

orientata con versore normale la cui terza componente è negativa.

Esercizio 5 Studiare le convergenze della serie di Fourier associata alla funzione 6–periodica pari definita in $[0, 3]$ da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ \\ \dfrac{3 - x}{2} & \text{se } x \in [1, 3]. \end{cases}$$

Soluzione 1 L'equazione data è a variabili separabili; ci sono le due soluzioni stazionarie

$$y(t) \equiv 1, \qquad y(t) \equiv 2.$$

Per le soluzioni non stazionarie bisogna integrare

$$\frac{y'(t)}{(1-y(t))(2-y(t))} = t$$

ottenendo le soluzioni

$$y(t) = 1 + \frac{1}{1-ce^{\frac{t^2}{2}}}, \qquad c \neq 0.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$ si trova la soluzione nella forma

$$y(t) = 1 + \frac{y_0 - 1}{(y_0-1)-(y_0-2)e^{\frac{t^2}{2}}};$$

si ritrovano in questa forma anche le soluzioni stazionarie sostituendo $y_0 = 1$ e $y_0 = 2$.

Il dominio di tali soluzioni è determinato dalla condizione

$$(y_0-2)e^{\frac{t^2}{2}} \neq= (y_0-1);$$

troveremo quindi che il dominio è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0 \leq 2$, mentre altrimenti la soluzione è definita per

$$|t| < \sqrt{\ln\left(\frac{y_0-1}{y_0-2}\right)^2}.$$

In figura 4 sono riportati i grafici di alcune delle soluzioni trovate.

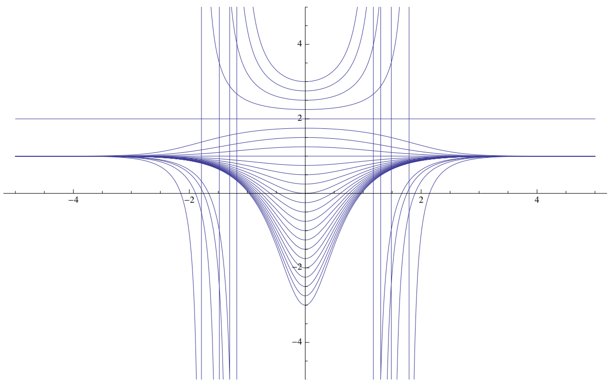


Figura 4: Grafici delle soluzioni trovate.

Soluzione 2 La matrice Jacobiana della funzione data è

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} ze^x - 3\cos y & \ln z + 3x\sin y & e^x + \frac{y}{z} \\ 5x^4 & z & y \end{pmatrix}$$

che nel punto $(0,0,2)$ assume il valore

$$Df(0,0,2) = \begin{pmatrix} -1 & \ln 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

tale matrice ha rango 2 e quindi il Teorema della funzione implicita si applica attorno al punto $(0,0,2)$ per poter dire che, dato che $f(0,0,2) = (2,0)$, il livello $E_{(2,0)}(f)$ è una curva regolare.

Dato che

$$(-1, \ln 2, 1) \times (0,2,0) = (-2,0,-2),$$

si ricava che l'equazione parametrica del vettore tangente

$$r(t) = (0,0,2) + t(-2,0,-2) = (-2t, 0, 2-2t),$$

che in forma cartesiana diventa

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z + 2 = 0. \end{cases}$$

L'equazione del piano normale è invece dato da

$$x + z = 2.$$

Soluzione 3 Il dominio della funzione si determina imponendo la due condizioni

$$x^2 - y^2 > 0, \qquad 1 - x^2 - y^2 \geq 0;$$

si ricava quindi che

$$E = D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x|, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Tale dominio è limitato in quanto contenuto nella palla unitaria, ma non è chiuso (le rette $y = \pm x$ non sono incluse nel dominio). Non possiamo quindi applicare il Teorema di Weierstrass per concludere che esistano massimi e minimi; in effetti, il minimo della funzione f su E non esiste in quanto

$$\lim_{x^2-y^2 \to 0} f(x,y) = -\infty,$$

cioè la funzione non è inferiormente limitata, quindi

$$\inf_E f = -\infty.$$

Esiste però il massimo di f; per determinarlo, cerchiamo prima i punti stazionari interni, poi quelli vincolati su $x^2 + y^2 = 1$.

Dato che

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2 - y^2} - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, -\frac{2y}{x^2 - y^2} - \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right),$$

per cercare i punti stazionari dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x \left(\dfrac{2}{x^2 - y^2} - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) = 0, \\[2ex] y \left(-\dfrac{2}{x^2 - y^2} - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) = 0. \end{cases}$$

Discutendo i vari casi, si trovano i punti stazionari

$$\left(\pm\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}, 0 \right) \in E, \quad \left(0, \pm\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)} \right) \notin E.$$

Cerchiamo ora i punti stazionari vincolati al bordo, che parametrizziamo con

$$r(t) = (\cos t, \sin t), \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right).$$

Troviamo quindi la funzione

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = \ln(\cos^2 t - \sin^2 t),$$

la cui derivata è data da

$$g'(t) = -\frac{4\cos t \sin t}{\cos^2 t - \sin^2 t}.$$

Gli unici punti stazionari vincolati sono quindi quelli corrispondenti a $t = 0$ e $t = \pi$, cioè i due punti $(1, 0)$ e $(-1, 0)$; in tali punti la funzione si annulla, quindi per confronto dei valori, si trova che

$$\max_E f = 0, \qquad \text{assunto nei due punti } (1,0), (-1,0).$$

Soluzione 4 La superficie può essere riscritta nella forma

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}.$$

Si tratta quindi di una ellisse contenuta nel piano $z = 1$ e quindi la sua normale è costante e quella che punta verso il basso è data da

$$\nu_\Sigma = (0, 0, -1).$$

Possiamo quindi parametrizzare il bordo di Σ, tenendo conto dell'orientazione indotta da ν_Σ, mediante

$$r(t) = (2\cos t, -3\sin t, 1), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Verifichiamo quindi la validità dell'espressione

$$\int_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot \nu_\Sigma d\Sigma = \oint_{\partial^+\Sigma} F \cdot d\vec{r}.$$

Iniziamo col primo integrale: denotiamo con D l'ellisse nel piano (x, y) di semiassi 2 e 3 ed otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot \nu_\Sigma d\Sigma &= \int_D \mathrm{rot} F(x, y, 1) \cdot (0, 0, -1) dx dy \\ &= \int_D (-1, -1, -1) \cdot (0, 0, -1) dx dy = |D| = 6\pi.\end{aligned}$$

Analogamente, otteniamo che

$$\begin{aligned}\oint_{\partial^+\Sigma} F \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} F(2\cos t, -3\sin t, 1) \cdot (-2\sin t, -3\cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (6\sin^2 t - 18\sin^3 t - 3\cos t + 36 \sin t \cos^2 t) dt = 6\pi.\end{aligned}$$

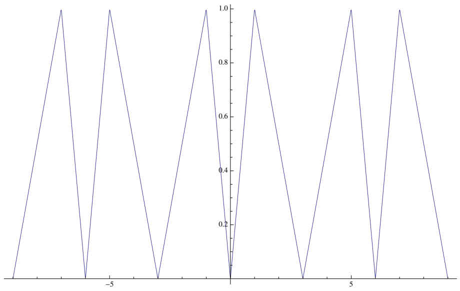


Figura 5: Grafico della funzione in $[-9, 9]$.

Soluzione 5 Se si traccia il grafico della funzione estesa per periodicità, si nota che tale estensione è continua e regolare a tratti. La serie di Fourier quindi converge puntualmente alla funzione data uniformemente su tutto $\mathbb{R}$. In Figura 5 riportiamo il grafico della funzione nell'intervallo $[-9, 9]$.

L'estensione della funzione data è pari, quindi bisogna calcolare solo i seguenti coefficienti:

$$\begin{aligned} a_0 =& \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{2}{3}\int_{0}^{3} f(x)dx \\ =& \frac{2}{3}\left(\int_0^1 x dx + \int_1^3 \frac{3-x}{2} dx\right) = 1 \end{aligned}$$

mentre per $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{3}x\right)dx = \frac{2}{3}\int_{0}^{3} f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{3}x\right)dx \\ =& \frac{2}{3}\left(\int_0^1 x\cos\left(\frac{k\pi}{3}x\right)dx + \int_1^3 \frac{3-x}{2}\cos\left(\frac{k\pi}{3}x\right)dx\right) \\ =& \frac{9}{\pi^2 k^2}\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) - \frac{3(-1)^k}{\pi^2 k^2} - \frac{6}{\pi^2 k^2}. \end{aligned}$$

Si potrebbe notare che $\cos(k\pi/3)$ assume i valori $1/2$, $-1/2$, -1, $-1/2$, $1/2$ e 1 per poi ripetersi con periodicità 6, mentre $(-1)^k$ assume i valori -1 e 1 ripetuti con periodicità 2. Possiamo quindi distinguere i vari casi

$k = 6h + 1$: dove i coefficienti diventano

$$a_k = a_{6h+1} = \frac{3}{2\pi^2(6h+1)^2};$$

$k = 6h + 2$: dove i coefficienti diventano

$$a_k = a_{6h+2} = -\frac{27}{2\pi^2(6h+2)^2} = -\frac{27}{8\pi^2(3h+1)^2};$$

$k = 6h + 3$: dove i coefficienti diventano

$$a_k = a_{6h+3} = -\frac{3(3(-1)^h - 1)}{\pi^2(6h+3)^2} = -\frac{3(-1)^h - 1}{3\pi^2(2h+1)^2};$$

$k = 6h + 4$**:** dove i coefficienti diventano

$$a_k = a_{6h+4} = -\frac{27}{2\pi^2(6h+4)^2} = -\frac{27}{8\pi^2(3h+2)^2};$$

$k = 6h + 5$**:** dove i coefficienti diventano

$$a_k = a_{6h+5} = \frac{3}{2\pi^2(6h+5)^2};$$

$k = 6h$**:** dove i coefficienti diventano

$$a_k = a_{6h} = 0.$$

La serie di Fourier associata ad f è quindi data da

$$\begin{aligned}
f(x) =& \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{\pi^2 k^2} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) - \frac{3(-1)^k}{\pi^2 k^2} - \frac{6}{\pi^2 k^2}. \right) \cos\left(\frac{k\pi}{3} x\right) \\
=& \frac{1}{2} + \frac{3}{2\pi^2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(6h+1)^2} \cos\left(\frac{(6h+1)\pi}{3} x\right) - \frac{27}{8\pi^2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(3h+1)^2} \cos\left(\frac{2(3h+1)\pi}{3} x\right) + \\
& - \frac{1}{3\pi^2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{3(-1)^h - 1}{(2h+1)^2} \cos((2h+1)\pi x) - \frac{27}{8\pi^2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(3h+2)^2} \cos\left(\frac{2(3h+2)\pi}{3} x\right) + \\
& + \frac{3}{2\pi^2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(6h+5)^2} \cos\left(\frac{(6h+5)\pi}{3} x\right)
\end{aligned}$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 26 gennaio 2015

Esercizio 1 Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = e^{2t} \sin(t) \cos(2t).$$

Esercizio 2 Data la curva $r : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = \left(t - \tanh(t), \frac{1}{\cosh(t)} \right),$$

studiarne la regolarità; determinare quindi il parametro d'arco e riparametrizzare la curva mediante l'ascissa curvilinea. Determinare infine la lunghezza della curva.

Esercizio 3 Trovare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = (x - 1)^2(x^2 - y^2).$$

Esercizio 4 Calcolare l'integrale

$$\int_\Sigma \sqrt{\frac{z}{x^2 + y^2}} d\Sigma$$

dove Σ è la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z il grafico della funzione $z = (1 - x)^2$, $x \in [0, 1]$ (discutere anche la regolarità di tale superficie).

Esercizio 5 Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n + 1}{n^2 + 1} x^n,$$

studiando in particolare la derivabilità di f.

Soluzione 1 La soluzione dell'equazione omogenea si determina trovando le radici del polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0.$$

Abbiamo quindi le soluzioni

$$y_0(t) = e^{-t}(c_1 \cos(t\sqrt{2}) + c_2 \sin(t\sqrt{2})).$$

Per la determinazione delle soluzioni particolari, possiamo scrivere

$$e^{2t} \sin(t) \cos(2t) = \frac{1}{2} e^{2t}(\sin(3t) - \sin(t));$$

quindi cerchiamo le due soluzioni particolari

$$y_1(t) = e^{2t}(a \cos(3t) + b \sin(3t))$$

e

$$y_2(t) = e^{2t}(\alpha \cos(t) + \beta \sin(t))$$

La determinazione delle costanti a, b, α e β si fa imponendo che tali funzioni siano soluzioni particolari; troveremo che

$$a = -\frac{9}{328}, \qquad b = \frac{1}{328},$$

mentre

$$\alpha = \frac{3}{136}, \qquad \beta = -\frac{5}{136}.$$

Chiudiamo con una osservazione; la soluzione particolare può essere determinata anche mediante il metodo della variazione delle costanti. In tal caso, il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} e^{-t}(c_1'(t) \cos(t\sqrt{2}) + c_2'(t) \sin(t\sqrt{2})) = 0 \\ e^{-t}((-c_1'(t) + c_2'(t)\sqrt{2}) \cos(t\sqrt{2}) - (c_2'(t) + c_1'(t)\sqrt{2}) \sin(t\sqrt{2})) = e^{2t} \sin(t) \cos(2t) \end{cases}$$

Tale sistema non è di immediata soluzione e lasciamo i dettagli come esercizio.

Soluzione 2 Dato che

$$r'(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)^2}(\sinh(t), -1);$$

quindi la curva è regolare, eccettuato al più il punto $t = 0$ che però è interno all'insieme di definizione. Inoltre

$$s(t) = \int_0^t \frac{\sinh(\tau)}{\cosh(\tau)} d\tau = \ln\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right).$$

Quindi

$$\ell(r, [0,1]) = s(1) = \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2e}\right).$$

Per riparametrizzare in lunghezza d'arco, ricaviamo t in funzione di s, cioè

$$e^t = e^s \pm \sqrt{e^{2s} - 1};$$

dato che per $t \in [0,1]$, $e^t \in [1, e]$, se ne ricava che

$$e^t = e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}$$

e cioè
$$t = \ln\left(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}\right).$$
La riparametrizzazione in lunghezza d'arco è quindi data da
$$\tilde{r}(s) = \tilde{r}(s(t)) = r(t) = \left(\ln(e^2 + \sqrt{e^{2s} - 1}) - e^{-s}\sqrt{e^{2s} - 1}, e^{-s}\right).$$

Soluzione 3 Il gradiente della funzione è dato da
$$\nabla f(x, y) = (2x(x-1)^2 + 2(x-1)(x^2 - y^2), -2y(x-1)^2);$$
tale gradiente si annulla nei punti $(0, 0)$, $(1/2, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, y)$ per ogni y. La matrice Hessiana è data nei vari punti da
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Hf\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$
mentre
$$Hf(1, y) = \begin{pmatrix} 2(1-y^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Quindi $(0, 0)$ è un punto di sella, $(1/2, 0)$ è punto di massimo locale stretto, mentre per i punti $(1, y)$ la matrice Hessiana non fornisce informazioni. Siccome $f(1, y) = 0$, per la classificazione basta studiare il segno di f. Dato che $f(x, y) = 0$ per $x = 1$, oppure per $|x| = |y|$, mentre $f(x, y) > 0$ per $|y| < |x|$, se ne deduce che i punti $(1, y)$ con $|y| > 1$ sono punti di massimo locale stretto, mentre con $|y| < 1$ sono punti di minimo locale stretto ed infine $(1, 1)$ e $(1, -1)$ sono punti di sella.

Soluzione 4 La superficie viene parametrizzata da $r : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,
$$r(t, s) = (t \cos s, t \sin s, (1 - t)^2);$$
siccome
$$\|r_t(t, s) \times r_s(t, s)\| = t\sqrt{1 + 4(1 - t)^2},$$
si vede subito che tale superficie è regolare per $t \neq 0$; l'insieme $r(\{0\} \times [0, 2\pi])$ è trascurabile, quindi
$$\begin{aligned} \int_\Sigma \sqrt{\frac{z}{x^2 + y^2}} d\Sigma = & \int_0^{2\pi} ds \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-t)^2}{t^2}} t\sqrt{1 + 4(1-t)^2} dt \\ = & 2\pi \int_0^1 (1 - t)\sqrt{1 + 4(1 - t)^2} dt = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Soluzione 5 Siamo in presenza di una serie di potenze con
$$c_n = (-1)^n \frac{n + 1}{n^2 + 1};$$
dato che
$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1,$$
si deduce che la serie converge per $|x| < 1$. Per $x = 1$ si ottiene la serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n + 1}{n^2 + 1}$$

che converge grazie al criterio di Leibniz, mentre per $x = -1$ si ottiene la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$$

che non converge. Quindi l'insieme di convergenza puntuale è dato da $(-1, 1]$, invece l'insieme di convergenza uniforme sarà dato da $[-a, 1]$ per ogni $0 < a < 1$ e l'insieme di convergenza totale sarà dato da $[-a, a]$ per ogni $0 < a < 1$.

Per studiare la derivabilità di f si deve studiare la serie di funzioni

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+n}{n^2+1} x^{n-1};$$

tale serie di potenze converge puntualmente in $(-1, 1)$, mentre converge uniformemente e totalemente in $[-a, a]$ per ogni $0 < a < 1$. Quindi la funzione f è derivabile in $(-1, 1)$ con $f'(x) = g(x)$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 19 febbraio 2015

Esercizio 1 Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, le soluzioni del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) = a - y'(t)^2 \\ \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

indicando il dominio delle soluzioni trovate.

Esercizio 2 Determinare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = \frac{(x+y)^3}{2}$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + 2y^2 = 4\}$.

Esercizio 3 Dire se il campo

$$F(x, y, z) = \left(\frac{y}{1+z^2}, \frac{x}{1+z^2} - \frac{2yz}{(1+y^2)^2}, -\frac{2z(1+xy)}{(1+z^2)^2} + \frac{1}{1+y^2} \right)$$

è conservativo o meno; in caso, determinarne un potenziale e calcolare

$$\int_r F \cdot d\vec{r}$$

con $r : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ data da $r(t) = (t + (t-1)^3, t^3 + 1, t^4 - t^2 + 3t)$.

Esercizio 4 Calcolare, al variare del parametro $h \in \mathbb{N}$ il volume dell'insieme

$$E_h = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| \le \frac{e^{1-\frac{z}{h}}}{\sqrt{h}}, z \in [0, h] \right\};$$

calcolare quindi, se esiste, il limite di tale volume per $h \to +\infty$.

Esercizio 5 Scrivere la serie di Fourier, studiandone le varie convergenze, della funzione 2π–periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = -x|x|.$$

Soluzione 1 Siamo in presenza di una equazione differenziale del secondo ordine riconducibile a due equazioni del primo ordine mediante la sostituzione $v(t) = y'(t)$.

Si distinguono tre casi; $a = 0$, $a = \alpha^2 > 0$ e $a = -\alpha^2 < 0$. Nel primo caso, l'equazione diventa $y''(t) = -y'(t)$ e si nota che $y(t) \equiv 0$ è la soluzione del Problema di Cauchy, definita quindi in tutto $\mathbb{R}$.

Nel caso $a = \alpha^2 > 0$, siamo in presenza di una equazione differenziale per v a variabili separabili

$$v'(t) = b(v(t)),$$

con $b(v) = \alpha^2 - v^2 = (\alpha - v)(\alpha + v)$; tale equazione ammette due soluzioni stazionarie $v(t) \equiv \pm\alpha$, che però non soddisfano la condizione iniziale $v(0) = y'(0) = 0$. Cerchiamo quindi le soluzioni non stazionarie risolvendo

$$\frac{v'(t)}{(\alpha - v(t))(\alpha + v(t))} = 1$$

con la condizione iniziale $v(0) = 0$. Troviamo quindi

$$v(t) = \frac{\alpha e^{\alpha t} - \alpha}{1 + e^{\alpha t}} = y'(t).$$

La soluzione $y(t)$ si trova quindi integrando; tenendo quindi conto che $y(0) = 0$, si trova che

$$y(t) = 2\ln(e^{\alpha t} + 1) - \alpha t - 2\ln 2.$$

Nel caso $a = -\alpha^2 < 0$, dobbiamo risolvere l'equazione a variabili separabili

$$v'(t) = -(\alpha^2 + v(t)^2)$$

che non ha soluzioni stazionarie. Si tratta quindi di integrare

$$\frac{v'(t)}{\alpha^2 + v(t)^2} = -1,$$

arrivando alla soluzione

$$v(t) = -\alpha\tan(\alpha t),$$

definiita in $t \in (-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha})$. La soluzione y è quindi data da

$$y(t) = \ln\cos(\alpha t).$$

Soluzione 2 L'insieme E è un'ellisse senza parte interna, quindi E è chiuso e limitato; usiamo quindi i moltiplicatori di Lagrange sulla funzione

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \frac{(x+y)^3}{2} - \lambda(x^2 + 2xy + 2y^2 - 4).$$

Per trovare i punti stazionari vincolati dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(x+y)^2 = \lambda(2x+y) \\ \frac{3}{2}(x+y)^2 = \lambda(x+4y) \\ x^2 + 2xy + 2y^2 = 4. \end{cases}$$

Si trovano quindi le soluzioni con $\lambda = 0$, $(2, -2)$ e $(-2, 2)$; altrimenti si trovano le soluzioni con $\lambda = \pm\frac{3}{2}$ con i punti $(\pm 2, 0)$.

Per confronto dei valori si trova che

$$\min_E f = -4, \qquad \text{assunto in } (-2, 0),$$

mentre

$$\max_E f = 4, \qquad \text{assunto in } (2, 0).$$

Soluzione 3 Si vede da un conto diretto che

$$\text{rot } F(x, y, z) = 0;$$

Il dominio del campo è tutto $\mathbb{R}^3$, quindi il campo è conservativo. Per determinare i potenziali, dobbiamo anzitutto risolvere l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z) = \frac{y}{1 + z^2},$$

da cui

$$U(x, y, z) = \frac{xy}{1 + z^2} + c(y, z).$$

Imponendo che

$$\frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z) = \frac{x}{1 + z^2} - \frac{2yz}{((1 + y^2)^2)}$$

si trova la condizione

$$\frac{\partial}{\partial y} c(y, z) = -\frac{2yz}{(1 + y^2)^2},$$

da cui

$$c(y, z) = \frac{z}{1 + y^2} + c(z),$$

e quindi

$$U(x, y, z) = \frac{xy}{1 + z^2} + \frac{z}{1 + y^2} + c(z).$$

Imponendo infine la condizione

$$\frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) = -\frac{2z(1 + xy)}{(1 + z^2)^2} + \frac{1}{1 + y^2}$$

si trova la condizione

$$c'(z) = -\frac{2z}{1 + z^2}.$$

In definitiva si trova che

$$U(x, y, z) = \frac{xy}{1 + z^2} + \frac{z}{1 + y^2} + \frac{1}{1 + z^2} + c.$$

Per quanto riguarda il calcolo del lavoro, si nota che dalla conservatività di F,

$$\int_r F \cdot d\vec{r} = U(r(1)) - U(r(0)) = U(1, 2, 3) - U(-1, 1, 0) = \frac{9}{10}.$$

Soluzione 4 L'insieme è stratificato in direzione z e per ogni $z \in [0, h]$, l'linsieme

$$E_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq \frac{e^{1-\frac{z}{h}}}{\sqrt{h}}\}$$

è un quadrato ruotato di $\pi/4$ di lato $\sqrt{2}e^{1-\frac{z}{h}}\sqrt{h}$, quindi

$$\text{Vol}(E) = \int_0^h \text{Area}(E_z) dz = \int_0^h \frac{2}{h} e^{2-\frac{2z}{h}} dz = e^2 - 1.$$

Quindi tutti gli insiemi dati hanno lo stesso volume.

Soluzione 5 L'estensione della funzione f a tutto $\mathbb{R}$ è dispari e continua a tratti; i punti di discontinuità sono $\pi + 2k\pi$, $z \in \mathbb{Z}$, dove la regolarizzata vale 0; negli intervalli aperti $(\pi + 2k\pi, \pi + 2(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, la funzione è regolare. La serie converge quindi puntualmente su tutto $\mathbb{R}$ alla regolarizzata, quindi ad f tranne che nei punti $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ dove converge a 0, mentre si ha convergenza uniforme negli intervalli chiusi contenuti negli intervalli di continuità di f.

Essendo poi la funzione dispari, i coefficienti a_k, $k \geq 0$ sono tutti nulli, mentre

$$b_k = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2(-1)^k}{k} + \frac{2}{k^3}(1-(-1)^k)\right).$$

La serie di Fourier è quindi data da

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) =& 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin(kx) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^k)}{k^3}\sin(kx)\\ =& 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin(kx) + \frac{8}{\pi}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{(2h+1)^3}\sin((2h+1)x).\end{aligned}$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 3 marzo 2015

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} ty'(t) + 2y(t) = te^{-t} \\ \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{4 - \ln(x^2 + y^2 - 2)}$$

e dire se tale insieme è chiuso, aperto, limitato, compatto, connesso, semplicemente connesso. Determinare inoltre il piano tangente e la retta normale al grafico di f nel punto $(2, 2)$.

Esercizio 3 Determinare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = \frac{y^2}{4} - (y + 1)\cos x.$$

Esercizio 4 Calcolare

$$\int_E 2|x|y dxdy$$

dove E è il triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(0, 2)$ e $(2, 0)$.

Esercizio 5 Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1 - x^n), \qquad x \in [0, 1].$$

Soluzione 1 Riscrivendo l'equazione nella forma

$$y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = e^{-t}$$

si riconosce l'equazione del primo ordine lineare con $a(t) = \frac{2}{t}$ e $b(t) = e^{-t}$. La soluzione sarà quindi data da

$$y(t) = e^{-A(t)} \int_1^t e^{A(\tau)} b(\tau) d\tau,$$

con

$$A(t) = \int_1^t a(\tau) d\tau = \ln t^2.$$

Troviamo quindi la soluzione data da

$$y(t) = \frac{5}{t^2 e} - \frac{2}{t^2 e^t} - \frac{2}{t e^t} - \frac{1}{e^t}.$$

Soluzione 2 Il dominio di f è dato da

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 2, 4 - \ln(x^2+y^2-2) \geq 0\} = \overline{B}_{\sqrt{2+e^4}}(0,0) \setminus \overline{B}_{\sqrt{2}}(0,0).$$

Tale insieme è limitato, non aperto e non chiuso, connesso ma non semplicemente connesso. L'insieme di derivabilità di f è invece dato dall'aperto

$$E' = B_{\sqrt{2+e^4}}(0,0) \setminus \overline{B}_{\sqrt{2}}(0,0)$$

ed il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x,y) = -\frac{1}{(x^2+y^2-2)\sqrt{4 - \ln(x^2+y^2-2)}}(x,y).$$

Ricaviamo quindi l'equazione del piano tangente

$$x + y + 3z\sqrt{4 - \ln 6} = 16 - 3\ln 6,$$

mentre la retta normale è data, in forma parametrica, da

$$(2, 2, \sqrt{4 - \ln 6}) + t\left(\frac{1}{3\sqrt{4-\ln 6}}, \frac{1}{3\sqrt{4-\ln 6}}, 1\right).$$

Soluzione 3 Il gradiente della funzione data è

$$\nabla f(x,y) = \left((y+1)\sin x, \frac{y}{2} - \cos x\right)$$

che si annulla nei punti

$$\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -1\right), \left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, -1\right), (2k\pi, 2), (\pi + 2k\pi, -2), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

La matrice Hessiana è data da

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} (y+1)\cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

tale matrice diventa nei punti stazionari

$$Hf\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi,-1\right)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, Hf\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi,-1\right)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$Hf(2k\pi,2)=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, Hf(\pi+2k\pi,2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dato che le prime due matrici hanno determinante negativo, siamo in presenza di punti di sella, mentre le seconde due matrici hanno entrambi gli autovalori positivi e quindi siamo in presenza di minimi locali stretti.

Soluzione 4 Mediante un calcolo diretto troviamo che

$$\int_E 2|x|y dx dy = -\int_{-1}^{0} dx \int_0^{2x+2} 2xy dy + \int_0^2 dx \int_0^{2-x} 2xy dy = 7.$$

Soluzione 5 Siamo in presenza di una serie di funzioni con

$$u_n(x) = x^n(1-x^n), \qquad x \in [0,1];$$

le u_n si annullano in 0 ed in 1, quindi in tali punti si ha convergenza; per $x \in (0,1)$ notiamo che

$$x^n(1-x^n) \sim x^n,$$

quindi per tali punti la convergenza è equivalente alla convergenza della serie geometrica di ragione $x \in (0,1)$. Se ne conclude che la serie converge puntualmente in $[0,1]$. Passiamo direttamente alla convergenza totale studiando

$$\sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)| = \max_{x\in[0,1]} u_n(x).$$

Cerchiamo i massimi di u_n interni a $(0,1)$ ponendo

$$u_n'(x) = nx^{n-1}(2-x^n) = 0;$$

troviamo quindi i punti

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}},$$

dove la funzione vale

$$u_n(x_n) = \frac{1}{4}.$$

La serie quindi non converge totalmente in $[0,1]$. Si noti però che $x_n \to 1$ per $n \to +\infty$ e per ogni $a < 1$

$$\max_{x\in[0,a]} u_n(x) = a^n(1-a^n) = M_n;$$

dato che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n$$

è convergente, se ne deduce la convergenza totale e quindi uniforme negli intervalli $[0,a]$, per ogni $a < 1$.

Resta aperto il problema della convergenza uniforme in $[0,1]$; per concludere questo studio basta scrivere esplicitamente le funzioni

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x), \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

per $x \in (0,1)$ e studiare l'eventuale convergenza uniforme di f_N ad f, estese in 0 e 1 uguali a 0.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 10 aprile 2015

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(t)y''(t) - y'(t)^2 = y(t)^4 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 2; \end{cases}$$

di tale soluzione indicare il dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 Si consideri la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

orientata in modo tale che $\hat{k} \cdot \nu_\Sigma \geq 0$; si determini, parametrizzandola, la curva regolare a tratti $\partial^+\Sigma$ e si calcoli la circuitazione su tale curva del campo

$$F(x, y, z) = (1, 0, y).$$

Esercizio 3 Trovare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 + \ln(1 + z^2)$$

sull'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x = 1, x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4\}$.

Esercizio 4 Calcolare il volume del solido

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \frac{R}{2} \leq z \leq R\right\}.$$

Esercizio 5 Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x\sqrt{n})}{1 + n^2};$$

dire in particolare se f è continua, derivabile e con derivata continua nel suo dominio di definizione.

Soluzione 1 L'equazione differenziale è un'equazione differenziale del secondo ordine autonoma, quindi riconducibile al primo ordine ponendo $y'(t) = z(y)$. Derivando, si arriva al Croblema di Cauchy

$$\begin{cases} yz(y)z'(y) - z(y)^2 = y^4 \\ z(-1) = 2. \end{cases}$$

Possiamo ulteriormente fare la sostituzione $v(y) = z^2$ ed arrivare al Problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'(y) - \frac{2}{y}v(y) = 2y^3 \\ v(-1) = 4. \end{cases}$$

Questa è un'equazione lineare del primo ordine la cui soluzione è data da

$$v(y) = y^2(3 + y^2).$$

Quindi la soluzione z è data, tenendo conto dei segni sia di y che di y', da

$$z(y) = -y\sqrt{y^2 + 3};$$

dobbiamo quindi ora risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t)\sqrt{y(t)^2 + 3} \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Tale equazione è a variabili separabili ed integrata fornisce la soluzione

$$y(t) = \frac{2\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})e^{-t\sqrt{3}}}{e^{-2t\sqrt{3}} - 7 - 4\sqrt{3}};$$

tale funzione ha come dominio $(-\frac{\ln(7+4\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}, +\infty)$.

Soluzione 2 La superficie è la parte di grafico della funzione $g(x, y) = x^2 + y^2$ con

$$(x, y) =\in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Una parametrizzazione è data quindi da $r : D \to \mathbb{R}^3$

$$r(t, s) = (t, s, t^2 + s^2)$$

e normale

$$\nu_\Sigma(t, s) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + 4s^2}}(-2t, -2s, 1).$$

Per calcolare la circuitazione di F possiamo quindi utilizzare il Teorema del rotore

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+\Sigma} F \cdot d\vec{r} &= \int_\Sigma \text{rot}F \cdot \nu_\Sigma d\Sigma = \int_D (1, 0, 0) \cdot r_t(t, s) \times r_s(t, s) dtds \\ &= \int_D (1, 0, 0) \cdot (-2t, -2s, 1) dtds = -2 \int_D tdtds = -\frac{2R^3}{3}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il bordo $\partial^+\Sigma$, si tratta di una curva regolare a tratti composta da tre curve regolari che, tenendo conto dell'orientazione, possono essere parametrizzate mediante $r^{(1)} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $r^{(2)} : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$ e $r^{(3)} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$

$$r^{(1)}(t) = (Rt, 0, R^2t^2), \quad r^{(2)}(t) = (R\cos t, R\sin t, R^2), \quad r^{(1)}(t) = (0, R(1 - t), R^2(1 - t)^2).$$

La circuitazione può quindi essere calcolata anche mediante

$$\int_{\partial^+\Sigma} F \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F(r^{(1)}(t)) \cdot (R, 0, 2R^2 t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(r^{(2)}(t)) \cdot (-R\sin t, R\cos t, 0)dt$$
$$+ \int_0^1 F(r^{(3)}(t)) \cdot (-R, 0, -2R^2(1-t))dt = -\frac{2R^3}{3}.$$

Soluzione 3 Siamo in presenza di due vincoli, quindi possiamo utilizzare due moltiplicatori di Lagrange o più semplicemente prima sostituire $x = \frac{1}{2}$ e poi ottimizzare

$$g(x, y) = y^2 + \ln(1 + z^2) - \frac{3}{4}$$

con vincolo $y^2 + 2z^2 = \frac{15}{8}$. Possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e cercare i punti stazionari di

$$y^2 + \ln(1 + z^2) - \frac{3}{4} - \lambda(y^2 + 2z^2 - \frac{15}{8});$$

si trovano quindi i punti stazionari

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \pm\frac{\sqrt{15}}{4}\right), \qquad \text{con } \lambda = \frac{8}{31},$$

e

$$\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, 0\right), \qquad \text{con } \lambda = 1.$$

Per confronto dei valori, si trova che

$$\min_E f = \ln\frac{31}{16} - \frac{3}{4}, \qquad \text{assunto in } \left(\frac{1}{2}, 0, \pm\frac{\sqrt{15}}{4}\right),$$

mentre

$$\max_E f = \frac{9}{8}, \qquad \text{assunto in } \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, 0\right).$$

Soluzione 4 L'insieme è stratificato in direzione z, quindi

$$\text{Vol}(E) = \int_{\frac{R}{2}}^{R} \text{Area}(D_z)dz$$

con

$$D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\}.$$

Quindi

$$\text{Vol}(E) = \pi \int_{\frac{R}{2}}^{R} (R^2 - z^2)dz = \frac{5\pi}{24}R^3.$$

Soluzione 5 Siamo in presenza di una serie di funzioni con

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

con funzioni continue

$$u_n(x) = \frac{\sin(x\sqrt{n})}{1+n^2};$$

siccome

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

si deduce la convergenza totale su tutto $\mathbb{R}$, quindi anche tutte le altre convergenze. In praticolare, la funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$. Per quanto riguarda le derivate, siccome

$$|u_n'(x)| = \left|\frac{\sqrt{n}\cos(x\sqrt{n})}{1+n^2}\right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

anche la serie delle derivate converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$, quindi $f \in C^1(\mathbb{R})$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 16 giugno 2015

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) = y'(t)^2 - 2y'(t)e^{-y(t)} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 2; \end{cases}$$

di tale soluzione indicare il dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 Data la curva $r : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$r(t) = (4\cos^3 t, 5\sin^3 t, 3\cos^3 t),$$

determinare la parametrizzazione del cerchio osculatore alla curva per $t = \pi/4$. Calcolare quindi l'integrale

$$\int_r (x+y)d\ell.$$

Esercizio 3 Trovare i punti di massima e minima quota dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 = 3, x + 2y + z = 0\}.$$

Esercizio 4 Calcolare il volume del solido

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Esercizio 5 Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^{2n} + 1}.$$

Soluzione 1 Siamo in presenza di una equazione omogenea; ponendo $z(y) = y'(t)$ si arriva al Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(y) = z(y) - 2e^{-y} \\ \\ z(0) = 2. \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è quindi data da

$$z(y) = e^y + e^{-y};$$

quindi la soluzione del problema originarioè data da

$$y(t) = \ln\tan\left(t + \frac{\pi}{4} - 1\right) :$$

tale funzione è definita in $(1 - \frac{\pi}{4}, 1 + \frac{\pi}{4})$.

Soluzione 2 Per scrivere la parametrizzazione del cerchio osculatore serve calcolare $r(\pi/4)$, $\hat{\tau}_r(\pi/4)$, $\hat{n}(\pi/4)$ e $k_r(\pi/4)$. Si trova che

$$r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}, \frac{5}{4}\sqrt{2}, \frac{3}{4}\sqrt{2}\right), \hat{\tau}_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{2}{5}\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{10}\sqrt{2}\right),$$

mentre

$$\hat{n}_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{2}{5}\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{10}\sqrt{2}\right), k_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{15}.$$

Quindi il cerchio osculatore ha parametrizzazione

$$\begin{aligned} c(s) =& r(\pi/4) + \frac{1}{k_r(\pi/4)}\hat{n}(\pi/4) + \frac{1}{k_r(\pi/4)}\cos s\hat{\tau}_r(\pi/4) + \frac{1}{k_r(\pi/4)}\sin s\hat{n}_r(\pi/4) \\ =& \sqrt{2}\left(4 - 3\cos s + 3\sin s, 5 + \frac{15}{4}\cos s + \frac{15}{4}\sin s, 3 - \frac{9}{4}\cos s + \frac{9}{4}\sin s\right). \end{aligned}$$

L'integrale curvilineo infine è dato da

$$\int_r (x+y)d\ell = \int_0^{\pi/2} \left(4\cos^3 t + 5\sin^3 t\right)\frac{15}{2}\sin(2t)dt = 27.$$

Soluzione 3 Si può usare sia il metodo dei moltiplicatori di Lagrange che quello per parametrizzazione del vincolo; in entrambi i casi si arriva a determinare il punto di massima quota in $(-1, -1, 3)$ con quota quindi 3 e quello di minima quota in $(1, 1, -3)$ con quota quindi pari a -3.

Soluzione 4 Per determinare l'integrale si integra per strati e quindi in coordinate polari per arrivare a determinare che

$$\mathrm{Vol}(E) = 2\int_{\{(x-1)^2+y^2\leq 1} \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy = \frac{16}{3}\pi - \frac{64}{9}.$$

Soluzione 5 Siamo in presenza di una serie di potenze con

$$c_n = \frac{(-1)^n}{3^{2n}+1}.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{9}$$

si determina il raggio di convergenza che è 9. Dato che per $x = \pm 9$ la serie non converge, se ne deduce ci si ha convergenza puntuale e assoluta in $(-9, 9)$, totale e quindi uniforme e assoluta uniforme negli intervalli $[-a, a]$ con $0 < a < 9$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 13 luglio 2015

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) = y'(t) - y'(t)^2 \\ y(0) = \ln 2 \\ y'(0) = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

di tale soluzione indicare il dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 Si dica in quali sottoinsiemi del piano la funzione

$$f(x,y) = -e^x \ln y$$

è convessa ed in quali è concava.

Esercizio 3 Dopo aver verificato che $(0, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}) \in E$ con

$$E = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \\ 9x^2 + 16(2y+z)^2 = 4, z = y + \sin\left(\frac{\pi}{2}(9x^2 + 4(2y+z)^2)\right) \Big\},$$

si verifichi se in tale punto sono soddisfatte le condizioni del Teorema della funzione implicita. Determinata quindi la retta tangente ad E nel punto dato, si determino i punti di tale retta che minimizzano la distanza dall'origine.

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_E (z-y)\sin(9x^2 + 4(2y+z)^2)\,dxdydz$$

con

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \le z \le y+1, 9x^2 + 4(2y+z)^2 \le 1 \right\}.$$

Esercizio 5 Dopo aver scritto lo sviluppo in serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$ della funzione coseno, si determini lo sviluppo in serie di Taylor centrato in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2}\,dt,$$

motivando i vari passaggi; si studino quindi le varie convergenze della serie determinata e dimostrare quindi che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Soluzione 1 L'equazione data è del secondo ordine riconducibile ad una del primo ordine ponendo $v(t) = y'(t)$. Si ottiene così la soluzione

$$v(t) = \frac{e^t}{1 + e^t}.$$

Integrando e tenendo conto della condizione iniziale si arriva alla soluzione

$$y(t) = \ln(1 + e^t),$$

il cui dominio è tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione 2 La matrice Hessiana di f è data da

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -e^x \ln y & -\frac{e^x}{y} \\ -\frac{e^x}{y} & \frac{e^x}{y^2} \end{pmatrix};$$

tale matrice è definita positiva se e solo se

$$\begin{cases} -e^x \ln y \geq 0 \\ -\frac{e^{2x} \ln y}{y^2} - \frac{e^{2x}}{y^2} \geq 0, \end{cases}$$

e quindi sull'insieme

$$E = \{(x, y) : 0 < y \leq e^{-1}\}.$$

Quindi su E la funzione è convessa, strattamente nella parte interna di E. La matrice Hessiana è invece definita negativa se e solo se

$$\begin{cases} -e^x \ln y \leq 0 \\ -\frac{e^{2x} \ln y}{y^2} - \frac{e^{2x}}{y^2} \geq 0, \end{cases}$$

e quindi mai. Nell'insieme

$$F = \{(x, y) : y > e^{-1}\}$$

la funzione non è né concava né convessa.

Soluzione 3 Si ponga

$$g(x, y, z) = \left(9x^2 + 16(2y + z)^2 - 4, z - y - \sin\left(\frac{\pi}{2}(9x^2 + 4(2y + z)^2)\right)\right);$$

è facile notare che $g(0, -1/6, 5/6) = 0$. Dato che

$$g\left(0, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 32 & 16 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

si nota che tale matrice ha rango due e quindi sono verificate le condizioni per l'applicabilità del Teorema della funzione implicita e concludere che localmente attorno al punto dato l'insieme E è una retta.

La retta tangente sarà data da

$$\left(0, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) + t(0, 32, 16) \times (0, -1, 1) = \left(48t, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right).$$

La distanza al quadrato dei punti appartenti a tale retta dall'origine è data da

$$(48t)^2 + \frac{13}{18},$$

il cui minimo viene preso per $t = 0$, e quindi nel punto dato.

Soluzione 4 Se si effettua il cambio di coordinate

$$\begin{cases} u = 3x \\ v = 4y + 2z \\ w = z - y \end{cases}$$

si può riscrivere l'integrale mediante

$$\int_E (z-y)\sin(9x^2 + 4(2y+z)^2)dxdydz = \frac{1}{18}\int_{E'} w\sin(u^2+v^2)dudvdw$$

con

$$E' = \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le w \le 1, u^2 + v^2 \le 1\right\}.$$

Si arriva quindi al risultato

$$\int_E (z-y)\sin(9x^2 + 4(2y+z)^2)dxdydz = \frac{\pi}{36}(1-\cos 1).$$

Soluzione 5 Dato che

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!},$$

se ne deduce che

$$\frac{1-\cos t}{t^2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{t^{2k-2}}{(2k)!}.$$

In definitiva

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k)!(2k-1)};$$

siccome la serie che definisce f è convergente in tutto $\mathbb{R}$ con convergenza totale e uniforme sui compatti di $\mathbb{R}$, si conclude che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 16 settembre 2015

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v''(x) - v'(x) = 3x \\ v(0) = 1 \\ v'(0) = 1; \end{cases}$$

di tale soluzione determinare il dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 Descrivere, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2 + y^2}{z^2} = a \right\};$$

dire inoltre in quali punti degli insiemi determinati sono soddisfatte le condizioni del Teorema della funzione implicita.

Esercizio 3 Dire se la funzione $f(x, y, z) = y + zx$ ammette massimo e minimo sull'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + x = 3y, 4x = 2 - y - z\}$$

ed in caso, determinarli.

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_E \frac{y^2}{y^2 + z^2} dxdydz$$

con $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, y^2 + z^2 \leq x^2, x \geq 0\}$.

Esercizio 5 Si studino le convergenze puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right), \qquad x \in [-1, 1]$$

e calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x) dx.$$

Soluzione 1 Siamo in presenza di una equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti completa; la soluzione dell'omogenea è data da

$$v(x) = c_1 + c_2 e^x,$$

mentre per la soluzione particolare si trova la funzione

$$v_p(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x.$$

La soluzione, imponendo le condizioni iniziali, sarà quindi data da

$$v(x) = 4e^x - \frac{3}{2}x^2 - 3x - 3.$$

Soluzione 2 Osserviamo preliminarmente che n punto (x, y, z) per appartenere ad un livello della funzione

$$g(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$$

deve avere $z \neq 0$ altrimenti g non è definita. Detto questo, si nota che se $a < 0$, allora $\{g = a\} = \emptyset$, mentre se $a = 0$ $\{g = 0\} = \{(0, 0, z), z \neq 0\}$. Infine, se $a > 0$ l'insieme di livello è un cono privato del vertice. Per vedere in quali punti si può applicare il Teorema della funzione implicita, si nota che

$$\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{2x}{z^2}, \frac{2y}{z^2}, -\frac{2x^2 + 2y^2}{z^3} \right),$$

e quindi la condizione $\nabla g(x, y, z) \neq 0$ diventa $(x, y) \neq 0$. Quindi per il solo livello $\{g = 0\}$ non si applica il teorema, mentre nei livelli $\{g = a\}$ con $a > 0$ il teorema si applica.

Soluzione 3 La funzione è regolare ma l'insieme E è solo chiuso e non limitato, trattandosi di intersezione di due piani e quindi di una retta. Non è garantita quindi l'esistenza di massimo e minimo.

L'insieme E è ottenuto come zero della funzione

$$g(x, y, z) = (x + z - 3y, 4x + y + z - 2)$$

la cui matrice Jacobiana è costante e pari a

$$Dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 2 e quindi in effetti l'insieme E è una curva (una retta nello spazio). Possiamo parametrizzare mediante

$$r(t) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0 \right) + t(1, 1, -3) \times (4, 1, 1) = \left(\frac{2}{3} + 4t, -3t, -\frac{2}{3} - 13t \right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

In tal modo otteniamo la funzione di una variabile

$$f(r(t)) = 52t^2 - \frac{43}{3}t - \frac{4}{9};$$

tale funzione è strettamente convessa e tende ad infinito per $|t| \to +\infty$, quindi la funzione ammette minimo ma non massimo per le proprietà delle funzioni convesse. Per determinare il minimo calcoliamo

$$\frac{d}{dt} f(r(t)) = -104t - \frac{43}{3} = 0,$$

per trovare punto di minimo per $t = -\frac{43}{312}$ dove la funzione vale $\frac{113}{208}$. In definitiva abbiamo trovato che

$$\min_E f = \frac{113}{208}, \qquad \text{assunto in } \left(\frac{3}{26}, \frac{129}{312}, \frac{117}{104}, \right).$$

In modo alternativo si poteva arrivare allo stesso risultato mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange cercando i punti stazionari liberi della funzione

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = xy + z - \lambda(x + z - 3y) - \mu(4x + y + z - 2).$$

Soluzione 4 Utilizziamo le coordinate cilindriche

$$x = t, \qquad y = \rho \cos \vartheta, \qquad z = \rho \operatorname{sen} \vartheta,$$

con $0 \le \vartheta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$ e $\rho \le t \le \sqrt{2 - \rho^2}$. L'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \left(\rho \frac{\rho^2 \cos^2 \vartheta}{\rho^2}\right) dt = (2\sqrt{2} - 2)\frac{\pi}{3}.$$

Soluzione 5 Proponiamo due svolgimenti. Il primo scrivendo $f_n(x)$ come $\log(1+x/n)^n$ e si ottiene che il limite puntuale è la funzione $f(x) = x$. Vediamo se tale convergenza è uniforme. Prendiamo in considerazione le funzioni $g_n(x) = (1 + x/n)^n$. Sappiamo che $(1 + x/n)^n$ è crescente in n per x positivo, mentre $(1 + x/n)^n$ è decrescente in n per x negativo e e converge alla funzione $g(x) = e^x$. Derivando si ottiene

$$g'(x) - g_n'(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 0 \\ = 0 & \text{se } x = 0 \\ < 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si osservi però che $g_n(0) = g(0) = 1$ per cui $|g(x) - g_n(x)| > 0$ tranne che per $x = 0$ che risulta essere un punto di minimo. È chiaro che il massimo è assunto quindi per $x = -1$ oppure per $x = 1$ e si ha

$$\sup_{x \in [-1,1]} |g_n(x) - g(x)| \le \max\{|g_n(-1) - e^{-1}|, |g_n(1) - e|\} \to 0.$$

Per cui $\{g_n\}$ converge uniformemente a g in $[-1, 1]$. Poiché la funzione $x \mapsto \log x$ è continua nell'intervallo $[e^{-1}, e]$ (nel quale assumono valori le g_n) e $\log g_n(x) = f_n(x)$, $\log g(x) = f(x)$, concludiamo che anche $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $[-1, 1]$.

Per l'ultima parte dell'esercizio, dalla convergenza uniforme segue che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x) dx = \int_{-1}^{1} x dx = 0.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 17 dicembre 2015

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 2y(t) = t^2 + 1 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Dire se la funzione

$$f(x, y, z) = x^4 + 6x^2z^2 + 3z^4 + 2y^2$$

è convessa in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_E \frac{|x|e^{-y}}{\sqrt{x^2 + z^2}} dxdydz,$$

con $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x^2 - y^2 + z^2 \leq 0\}$.

Esercizio 4 [7 punti] Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione 2π–periodica definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \cosh(x);$$

studiare quindi le varie convergenze della serie di Fourier.

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che permetta di calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = \text{sen}\,(2x + 3y)$$

e di tracciare i grafici di $f(x, 2)$, $\partial_x f(x, 2)$, $\partial^2_{xy} f(x, 2)$ e $\partial^2_{xx} f(x, 2)$.

Soluzione 1 Siamo in presenza di una equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti completa. La soluzione dell'equazione omogenea si trova cercando le radici del polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Troviamo cosi' che la soluzione generale dell'omogenea associata è data da

$$y_0(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}.$$

La soluzione particolare la cerchiamo usando il metodo per somiglianza; cerchiamo quindi

$$y_p(t) = at^2 + bt + c$$

per cui $y_p''(t) - y_p'(t) - 2y_p(t) = t^2 + 1$. Si trova quindi che

$$y_p(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} - \frac{3}{4}.$$

La soluzione generale dell'equazione completa è quindi data da

$$y(y) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} - \frac{3}{4}.$$

Imponiamo a questo punto le condizioni iniziali $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$, e troviamo la soluzione del Problema di Cauchy

$$y(t) = 2e^{-t} + \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} - \frac{3}{4}..$$

Soluzione 2 La matrice Hessiana di f è data da

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12(x^2+z^2) & 0 & 24xz \\ 0 & 4 & 0 \\ 24xz & 0 & 12(x^2+3z^2) \end{pmatrix}.$$

La funzione è convessa se e solo se la matrice Hessiana è semidefinita positiva, strettamente convessa se è definita positiva. La matrice Hessiana è semidefinita positiva se e solo se

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \geq 0 \\ x^2 + z^2 \geq 0 \\ (x^2+z^2)(x^2+3z^2) \geq 4x^2z^2. \end{cases}$$

Queste condizioni sono sempre verificate quindi f è convessa. Le precedenti disugualianze diventano strette se $(x,z) \neq (0,0)$; quindi f è sicuramente strettamente convessa nei punti non appertenti all'asse y. Su tale asse la funzione è però data da $f(0,y,0) = 2y^2$ che è strettamente convessa, quindi f è strettamente convessa su tutto $\mathbb{R}^3$.

Soluzione 3 Per calcolare tale integrale conviene passare alle coordinate cilindriche; si ottiene quindi che

$$\int_E \frac{|x|e^{-y}}{\sqrt{x^2+z^2}} dxdydz = 4\int_D \varrho e^{-t} d\varrho dt,$$

con $D = \{\varrho \leq |t| \leq \sqrt{9-\varrho^2}\}$. Sviluppando i calcoli si ottiene quindi che

$$\begin{aligned} 4\int_D \varrho e^{-t} d\varrho dt =& 8\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \varrho d\varrho \int_\varrho^{\sqrt{9-\varrho^2}} \cosh(t) dt \\ =& 24\cosh(3) - 8\sinh(3) - 24\sqrt{2}\cosh\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) + 16\sinh\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Soluzione 4 La funzione è pari e l'estensione 2π–periodica è contunua su tutto $\mathbb{R}$, quindi la serie di Fourier converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo i coefficienti; dato che f è pari, $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$, mentre

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cosh(x)dx = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi},$$

e, integrando per parti,

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cosh(x)\cos(kx)dx = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}\frac{(-1)^k}{1+k^2}.$$

Quindi vale l'identità

$$f(x) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}\cos(kx).$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 12 gennaio 2016

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y'(t) = (1 + y(t)^2)t^3 \\ \\ y(0) = a. \end{cases}$$

Delle soluzioni trovate determinare il dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Si determino spazio tangente, spazio normale, retta tangente e piano normale all'insieme

$$E = \{(x, y, z) : (x^2 + 2y^2, x + 2y + z) = (3, 0)\}$$

nel punto $(1, -1, 1)$.

Esercizio 3 [6 punti] Dato l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq e^{-x^2}\},$$

si determino i volumi dei solidi E ed F ottenuti ruotando D attorno all'asse y ed x rispettivamente.

Esercizio 4 [7 punti] Determinare, motivando i vari passaggi, la serie di Taylor centrata in 0 della funzione $f(x) = \ln(1 + x)$. Determinare quindi la somma della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che permetta di disegnare le curve di livello ed il campo gradiente della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 5y^2$$

nel dominio $E = [-1, 1]^2$.

Soluzione 1 L'equazione data è una equazione del primo ordine a variabili separabili. Non vi sono soluzioni stazionarie e la soluzione generale dell'equazione è data da

$$\arctan y(t) = \frac{t^4}{4} + c.$$

La condizione iniziale implica che $c = \arctan a$. La soluzione del Problema di Cauchy è pertanto data in forma implicita da

$$\arctan y(t) = \frac{t^4}{4} + \arctan a.$$

Tale espressione ha senso fintanto che

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{t^4}{4} + \arctan a < \frac{\pi}{2},$$

quindi per $|t| < \sqrt[4]{2\pi - 4\arctan a}$; su tale dominio quindi la soluzione del Problema di Cauchy sarà data da

$$y(t) = \tan\left(\frac{t^4}{4} + \arctan a\right).$$

Soluzione 2 Posto $g(x, y, z) = (x^2 + 2y^2, x + 2y + z)$, dato che

$$Dg(1, -1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

si nota che le ipotesi per poter applicare il Teorema della funzione implicita sono soddisfatte. Quindi l'insieme $E_{(3,0)}(g)$ è localmente attorno al punto $(1, -1, 1)$ una curva. Lo spazio normale è genearto dai due vettori $(1, -4, 0)$ e $(1, 2, 1)$, cioè

$$N_{(1,-,1,1)}E_{(3,0)}(g) = \text{span}\{(1, -4, 0), (1, 2, 1)\};$$

tale spazio in forma parametrica è determinato da

$$r(s, t) = (s + t, -4s + 2t, t),$$

mentre in forma Cartesiana è descritto dall'equazione

$$4x + y - 6z = 0.$$

Lo spazio tangente è il generato dal vettore

$$v = (2, -4, 0) \times (1, 2, 1) = (-4, -2, 8),$$

cioè

$$T_{(1,-,1,1)}E_{(3,0)}(g) = \text{span}\{(-4, -2, 8)\};$$

tale spazio è pertanto parametrizzato da

$$r(t) = (-4t, -2t, 8t),$$

mentre in forma Cartesiana è descritto delle equazioni

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4y + z = 0. \end{cases}$$

Il piano ortogonale è invece parametrizzato da

$$r(s,t) = (1+s+t, -1-4s+2t, 1+t),$$

che in forma Cartesiana viene caratterizzato dall'equazione

$$4x + y - 6z + 3 = 0.$$

Infine la retta tangente è parametrizzata da

$$r(t) = (1-4t, -1-2t, 1+8t),$$

che in forma Cartesiana è descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Soluzione 3 Si sta chiedendo di determinare il volume dei due solidi

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq e^{-x^2-z^2}\},$$

e

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y^2 + z^2 \leq e^{-2x^2}\}.$$

Possiamo quindi utilizzare le due formule

$$\mathrm{Vol}(E) = 2\pi \int_0^\infty x f(x) dx = \pi,$$

mentre

$$\mathrm{Vol}(F) = \pi \int_0^\infty f(x)^2 dx = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Soluzione 4 Per determinare lo sviluppo in serie di Taylor di f si nota che

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

dove l'ultima identità è soddisfatta se $|x| < 1$. Integrando termine a termine si nota quindi che per $|x| < 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

La somma della serie si ottiene notando che la serie a secondo membro nella formula precedente è uniformemente convergente in $[-a, 1]$ per $0 \leq a < 1$ e che in tale intervallo definisce una funzione continua. Siccome sia f che la serie sono continue in $[-a, 1]$ e coincidono in $[-a, 1)$, devono coincidere anche in 1, pertanto

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 16 febbraio 2016

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y(t)y''(t) + y'(t)^2 = 4 \\ y(0) = 1, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Della soluzione trovata determinare il dominio e tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 - 1)^2 - y^2} + \sqrt{4 - x^2}$$

e su tale dominio, determinare massimi e minimi di f.

Esercizio 3 [6 punti] Verificare la validità del Teorema della divergenza con la funzione

$$F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$$

sul dominio

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Esercizio 4 [7 punti] Studiare le varie convergenze della successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2x^2)}.$$

Calcolare quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-1}^{1} f_n(y)dy$$

e le proprietà della successione di funzioni

$$g_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(y)dy.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che, data la successioni di funzioni f_n dell'esercizio precedenti, calcoli l'integrale

$$\int_{-1}^{1} f_n(y)dy$$

e tracci i grafici delle funzioni $g_n(x)$ con $n \in \{1, \ldots, 10\}$ e $x \in [-1, 1]$.

Soluzione 1 L'equazione data è del secondo ordine autonoma; poniamo quindi $y'(t) = v(y)$ ed otteniamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} yv(y)v'(y) + v(y)^2 = 4 \\ v(1) = 1. \end{cases}$$

Si trova quindi la soluzione

$$y'(t) = v(y(t)) = \frac{\sqrt{4y(t)^2 - 3}}{y(t)}$$

accoppiata alla condizione iniziale $y(0) = 1$. Questa è una equazione a variabili separabili la cui soluzione è data in forma implicita da

$$\sqrt{4y(t)^2 - 3} = 4t + 1.$$

Avremo quindi la condizione $t \geq -\frac{1}{4}$ e y data in forma esplicita da

$$y(t) = \sqrt{4t^2 + 2t + 1}.$$

Soluzione 2 Il dominio della funzione è dato da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |x| \leq 2, 1 - x^2 \leq y \leq x^2 - 1\}.$$

Cerchiamo anzitutto i punti stazionari interni ponendo $\nabla f(x, y) = 0$; si troveranno i punti $(0, 0)$ e $(\pm\frac{\sqrt{15}}{2}, 0)$. In tali punti si ha

$$f(0, 0) = 3, \qquad f\Big(\pm\frac{\sqrt{15}}{2}, 0\Big) = \frac{13}{4}.$$

Per quanto riguarda il bordo si hanno sei vertici $(\pm1, 0)$, $(2, 3)$, $(2, -3)$, $(-2, 3)$ e $(-2, -3)$ in cui la funzione vale

$$f(\pm1, 0) = \sqrt{3}, \qquad f(\pm2, \pm3) = 0.$$

Infine resta da considerare le parti di bordo di E individuate dalle curve

$$\Sigma_1^{\pm} = \{(x, y)\mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, y = \pm(x^2 - 1)\}, \qquad \Sigma_2^{\pm} = \{(x, y)\mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2, y = \pm(x^2 - 1)\}$$

e

$$\Sigma_3^{\pm} = \{(x, y)\mathbb{R}^2 : x = \pm2, -3 < y < 3\}.$$

Dato che si tratta di curve cartesiane, possiamo considerare le funzioni di una variabile

$$f(x, \pm(x^2 - 1)) = \sqrt{4 - x^2}, \qquad f(\pm2, y) = \sqrt{9 - y^2}.$$

Si trovano quindi i punti $(\pm2, 0)$ e $(0, \pm1)$ in cui

$$f(\pm2, 0) = 3, \qquad f(0, \pm1) = 2.$$

In definitiva troveremo che

$$\min_E f = 0, \qquad \text{assunto in } (2, 3), (2, -3), (-2, 3) \text{ e } (-2, -3),$$

mentre

$$\max_E f = \frac{13}{4}, \qquad \text{assunto in } \Big(\pm\frac{\sqrt{15}}{2}, 2\Big).$$

Soluzione 3 Possiamo calcolare il flusso direttamente mediante la definizione

$$\Phi(F, \partial E) = \int_{\partial E} F \cdot \hat{\nu}_E d\Sigma$$

oppure mediante il Teorema della divergenza

$$\Phi(F, \partial E) = \int_E \mathrm{div} F(x, y, z) dx dy dz.$$

Nel secondo caso avremo che, denotando con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$

$$\begin{aligned}\int_E \mathrm{div} F(x, y, z) dx dy dz &= \int_E (2x + 2y + 2z) dx dy dz \\ &= \int_D dx dy \int_0^1 (2x + 2y + 2z) dz \\ &= \int_D (2x + 2y + 1) dx dy = 3\pi.\end{aligned}$$

Nel primo caso invece scriveremo $\partial E = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ con

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, (x, y) \in D\}, \Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, (x, y) \in D\},$$

e

$$\Sigma_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2x, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Σ_1 e Σ_2 sono due superfici cartesiane con normale esterna data rispettivamente da $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$. Σ_3 è invece la superficie laterale di un cilindo con base data dalla circonferenza unitaria centrata in $(1, 0)$ e di raggio 1 con $z \in [0, 1]$; tale superficie la possiamo parametrizzare mediante $r : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t, s) = (1 + \cos t, \sin t, s).$$

In tal modo la normale esterna sarà data dal vettore $(\cos t, \sin t, 0)$. Otteniamo quindi che

$$\Phi(F, \partial E) = \Phi(F, \Sigma_1) + \Phi(F, \Sigma_2) + \Phi(F, \Sigma_3).$$

Svolgendo i calcoli troviamo quindi che

$$\Phi(F, \Sigma_1) = \int_D (x^2, y^2, 1) \cdot (0, 0, 1) dx dy = \pi,$$

$$\Phi(F, \Sigma_2) = \int_D (x^2, y^2, 0) \cdot (0, 0, -1) dx dy = 0$$

mentre

$$\Phi(F, \Sigma_3) = \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 ((1 + \cos t)^2, \sin^2 t, s) \cdot (\cos t, \sin t, 0) ds = 2\pi.$$

Soluzione 4 Si nota che per $x \neq 0$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0,$$

mentre dato che $f_n(0) = \frac{n}{\pi}$,

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(0) = +\infty.$$

Quindi f_n converge puntualmente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ alla funzione $f(x) = 0$. La convergenza non è uniforme dato che le f_n sono continue su $\mathbb{R}$ e la funzione limite f non è data in 0. Proviamo a vedere se c'è convergenza uniforme negli intervalli del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 0$ (sfruttiamo la parità delle f_n). Avremo che

$$\sup_{x \geq a} f_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2 a^2)}.$$

Dato che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\pi(1 + n^2 a^2)} = 0,$$

se ne deduce la convergenza uniforme in $[a, +\infty)$, e quindi negli intervalli chiusi contenuti in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Per quanto riguarda l'integrale non possiamo usare il Teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrazione in quanto in $[-1, 1]$ non vi è convergenza uniforme. Un conto diretto però porta a

$$\int_{-1}^{1} f_n(y) dy = \frac{2}{\pi} \arctan(n)$$

e quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-1}^{1} f_n(y) dy = 1.$$

Per quanto riguarda la funzione g_n, mediante integrazione si ottiene che

$$g_n(x) = \frac{1}{\pi} \Big(\arctan(nx) + \frac{\pi}{2} \Big).$$

Si nota quindi che per $x < 0$

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = 0,$$

mentre per $x = 0$, $g_n(0) = \frac{1}{2}$ e quindi

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(0) = \frac{1}{2},$$

ed infine per $x > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = 1.$$

La funzione limite non è continua e quindi la convergenza non sarà uniforme su $\mathbb{R}$. Per completezza, si potrebbe anche vedere la convergenza uniforme in $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ con $a > 1$ (il punto $x = 0$ è l'unico punto di non continuità della funzione limite). Studiamo ad esempio la convergenza uniforme in $[a, +\infty)$; dato che

$$\sup_{[a,+\infty)} |g_n(x) - 1| = \sup_{[a,+\infty)} \left| \frac{1}{\pi} \Big(\arctan(nx) + \frac{\pi}{2} \Big) - 1 \right| = \frac{1}{\pi} \Big(\frac{\pi}{2} - \arctan(na) \Big),$$

se ne deduce la convergenza uniforme dato che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\pi} \Big(\frac{\pi}{2} - \arctan(na) \Big) = 0,$$

per ogni $a > 0$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 30 marzo 2016

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t^2 - y(t)^2}{2ty(t)} \\ \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Della soluzione trovata determinare il dominio e tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Dire se nei punti appartenenti all'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1, x^2 + y^2 = 1\}$$

sono soddisfatte le condizioni del Teorema della funzione implicita; determinare quindi i punti di massima e minima distanza dei punti di E dall'origine.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = xyz(x, y, z)$$

uscente dalla superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \geq 0\}$ orientata in modo che la normale alla superficie abbia la terza componente positiva.

Esercizio 4 [7 punti] Data la funzione 2π–periodica definita da

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \qquad x \in [0, 2\pi),$$

scrivere la serie di Fourier ad essa associata discutendone le varie convergenze. Dedurre quindi le somme delle seguenti serie:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2}, \qquad \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1}.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che determini la soluzione del Problema di Cauchy dell'Esercizio 1) e che ne tracci il grafico.

Soluzione 1 L'equazione può essere riscritta nella forma

$$2y(t)y'(t) = -\frac{y(t)^2}{t} + t;$$

ponendo $v(t) = y(t)^2$ si riconosce un'equazione differenziale del primo ordine lineare in v con $v(1) = 4$. La soluzione sarà pertanto data da

$$v(t) = \frac{11 + t^3}{3t},$$

e quindi la soluzione $y(t)$ è data da

$$y(t) = \sqrt{\frac{11 + t^3}{3t}}.$$

Tale soluzione è definita per $t \in (0, +\infty)$.

Soluzione 2 Consideriamo la funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$g(x, y, z) = (x^2 - xy + y^2 - z^2, x^2 + y^2);$$

il suo Jacobiano è dato da

$$Dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - y & -x + 2y & -2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $z \neq 0$, allora il rango è sicuramente due; vediamo il caso $z = 0$. Sicuramente per $(x, y) = (0, 0)$ la matrice ha rango 0 e quindi il Teorema della funzione implicita non si applica; si nota però che $(0, 0, 0) \notin E$. Per $z = 0$ la matrice Jacobiana diventa

$$Dg(x, y, 0) = \begin{pmatrix} 2x - y & -x + 2y & 0 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix};$$

tale matrice ha rango 1 per $(x, y) \neq (0, 0)$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui

$$(2x - y, -x + 2y) = \lambda(2x, 2y).$$

Si tratta quindi di trovare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2(1 - \lambda)x = y \\ 2(1 - \lambda)y = x, \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} y = 2(1 - \lambda)x \\ x = 4(1 - \lambda)^2 x; \end{cases}$$

Nella seconda equazione si può avere $x = 0$, nel qual caso si troverebbe $y = 0$, che però è il caso che stiamo scartando. Quindi dalla seconda equazione si deduce che $\lambda = 1 \pm \frac{1}{2}$. da cui $y = \pm x$. Nei punti quindi del tipo $(x, x, 0)$ e $(x, -x, 0)$ il Teorema della funzione implicita non si applica; nessuno di tali punti appartiene ad E quindi E è localmente attorno ad ogni suo una curva.

Per risolvere il problema di massimo e minimo applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange introducendo la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1) - \mu(x^2 + y^2 - 1).$$

Si arriva al sistema

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda + \lambda y - 2\mu x = 0 \\ 2y - 2\lambda y + \lambda x - 2\mu = 0 \\ 2z + 2\lambda z = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Soluzioni di tale sistema sono i punti

$$(1,0,0), (0,1,0),$$

e

$$(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2), (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2);$$

i primi due punti sono punti di minima distanza, mentre i secondi quattro sono punti di massima distanza.

Soluzione 3 Posiamo applicare direttamente la definizione di flusso;

$$\begin{aligned} \Phi(F,\Sigma) &= \int_\Sigma F(x,y,z)\cdot \hat{\nu}_\Sigma d\Sigma = \int_\Sigma xyz(x,y,z)\cdot(x,y,z)d\Sigma \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin\varphi \sin\vartheta \sin\varphi \cos\varphi \sin\varphi d\varphi = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Soluzione 4 Se si estende per periodicità la funzione e la si guarda in $(-\pi,\pi]$ ci si accorge che la funzione è dispari. Quindi $a_k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, mentre

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{k}.$$

L'estensione di f è discontinua nei punti $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pertanto la funzione è solo continua a tratti e regolare a tratti. La serie quindi converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ alla funzione regolarizzata ed uniformemente negli intervalli $[a,b] \subset (0,2\pi)$. Dall'identità

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right),$$

si deduce che

$$\sum_{h=0}^\infty \frac{(-1)^h}{2h+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Infine, dalla formula di Parseval si deduce che

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 14 giugno 2016

Esercizio 1 [6 punti] Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'(t) - y(t)\cos t = \cos t e^{2\sin t}.$$

Determinare le soluzioni che massimizzano e minimizzano la quantità $\frac{y(0)-1}{e^2+(y(\pi/2)-e^2)^2}$ e tracciare un grafico qualitativo di tali soluzioni.

Esercizio 2 [6 punti] Verificare che siano soddisfatte le condizioni del Teorema della funzione implicita in $(0,0)$ per la funzione

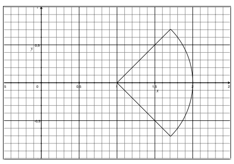
$$f(x,y) = \sin y \cos x + y - e^x + x^2 + 1;$$

determinare quindi il polinomio di Taylor di terzo grado della funzione $y = g(x)$ che definisce localmente il luogo di zeri di f.

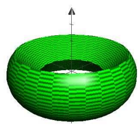
Esercizio 3 [6 punti] Dato l'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2}-1)^2 + z^2 \leq 1, |z| \leq \sqrt{x^2+y^2}-1\},$$

(vedi Figura 6(b)), si calcolino $\mathrm{Vol}(E)$ e $\mathrm{Area}(\partial E)$.



(a) La regione del piano da ruotare



(b) L'insieme E ottenuto dalla rotazione

Esercizio 4 [7 punti] Si studino le varie convergenze della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1} x^n.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che tracci, come in un filmato, i grafici delle funzioni

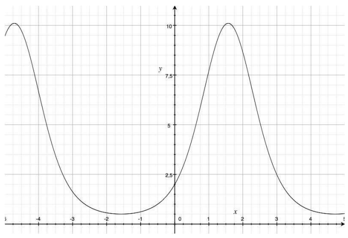
$$g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1} x^n.$$

con $x \in [-2,2]$ e $N = 1, \ldots, 100$.

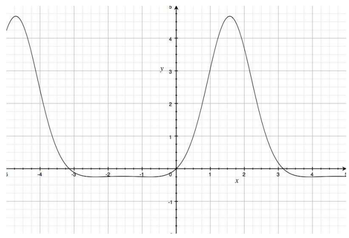
Soluzione 1 L'equazione data è del primo ordine lineare con $a(t) = -\cos t$ e $b(t) = \cos t e^{2\sin t}$. Quindi $A(t) = -\sin t$, da cui l'integrale generale

$$y(t) = e^{\sin t}\Big(c + e^{\sin t}\Big).$$

Le soluzioni che massimizzinano e minimizzano la quantità richiesta sono determinate da $c = 1$ e $c = 2$ rispettivamente e sono rappresentate in Figura 6(c) e 6(d).



(c) $y(t) = e^{\sin t} + e^{2\sin t}$



(d) $y(t) = -e^{\sin t} + e^{2\sin t}$

Soluzione 2 Notiamo che $f(0,0) = 0$ e che $\nabla f(0,0) = (-1,2)$. Si può quindi applicare il Teorema delle funzioni implicite per dedurre che il luogo di zeri di f è localmente un grafico sia in forma $y = g(x)$ che $x = h(y)$.

Per determinare il polinomio di Taylor di terzo grado di $g(x)$ basta derivare tre volte nell'espressione

$$\sin g(x)\cos x + g(x) - e^x + x^2 + 1 = 0.$$

Si ottiene quindi che

$$g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{32}x^3 + o(x^3).$$

Soluzione 3 L'insieme E è un pezzo di toro; tale insieme si può determinare mediante la funzione $F : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \times [0, 2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$,

$$F(\varphi, \vartheta, \varrho) = ((1 + \varrho\cos\varphi)\cos\vartheta, (1 + \varrho\cos\varphi)\sin\vartheta, \varrho\sin\varphi).$$

Dato che

$$|\det DF(\varphi, \vartheta, \varrho)| = \varrho(1 + \varrho\cos\varphi),$$

si trova che

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_E dxdydz = \int_{[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]\times[0,2\pi]\times[0,1]} \varrho(1 + \varrho\cos\varphi)d\varphi\vartheta\varrho = \frac{\pi^2}{2} + \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Il bordo di E è composto da due superfici; una parte contenuta nella superficie laterale del toro parametrizzata da $r : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(\varphi, \vartheta) = ((1 + \cos\varphi)\cos\vartheta, (1 + \cos\varphi)\sin\vartheta, \sin\varphi),$$

e due tronchi di cono determinati da

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 \le 1, |z| = \sqrt{x^2 + y^2} - 1\},$$

parametrizzabili mediante

$$B_{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}(0,0) \setminus B_1(0,0) \ni (x, y) \mapsto \left(x, y, \pm(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)\right).$$

Troviamo quindi che

$$\begin{aligned}\text{Area}(\partial E) &= \int_{[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]\times[0,2\pi]} \|r_\varphi(\varphi,\vartheta)\times r_\vartheta(\varphi,\vartheta)\| d\varphi d\vartheta + 2\int_{B_{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}(0,0)\setminus B_1(0,0)} \sqrt{2}dxdy \\ &= \int_{[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]\times[0,2\pi]} (1+\cos\varphi) d\vartheta d\varphi + \pi(4+\sqrt{2}) = \pi^2 + 4\pi + 3\pi\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Soluzione 4 Siamo in presenza di una serie di potenze con

$$c_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1,$$

ricaviamo che il raggio di convergenza è $\varrho = 1$. Notiamo inoltre che per $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$$

che converge grazie al criterio di Leibniz, mentre per $x = -1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1},$$

che non coverge. Quindi l'insieme di convergenza puntuale è $P = (-1, 1]$. Si avrà, grazie sempre al criterio di Leibniz, che la serie converge uniformemente in $[-a, 1]$ per ogni $0 \le a < 1$, mentre converge totalmente in $[-a, a]$ per ogni $0 \le a < 1$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 13 luglio 2016

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = \operatorname{sen} t \cos t, \\ \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Dire se la curva $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t) = (\operatorname{sen} t \operatorname{sen}(6t), \operatorname{sen} t \cos(6t), \operatorname{sen} t)$$

è regolare; scrivere quindi l'equazione della retta tangente e del piano ortogonale alla curva nel punto $(0, -1/2, 1/2)$ e determinare la massima e la minima distanza dei punti della curva dal piano $z = -2$.

Esercizio 3 [6 punti] Si determini il volume del solido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq \pi\},$$

con π piano tangente in $(0, 0, 1)$ all'insieme

$$\left\{(x, y, z) : x^2 y + \arctan z + e^z = \frac{\pi}{4} + e\right\}.$$

Esercizio 4 [7 punti] Si scriva la serie di Fourier associata alla funzione 6–periodica dispari definita in $[0, 3]$ da

$$f(x) = 3x - x^2.$$

Si studino le varie convergenze e si determino le somme delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)^3}, \quad \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^6}, \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^6}.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che determini la soluzione dell'Esercizio 1 e ne tracci il grafico nell'intervallo $[0, 20]$.

Soluzione 1 Iniziamo col risolvere l'equazione omogenea associata; il polinomio coratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4$ che ha due radici reali, -4 e -1. Quindi la soluzione generale dell'omogenea è data da

$$y_0(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}.$$

Per trovare la soluzione completa, scriviamo il termine forzante come

$$\operatorname{sen} t\ \cos t = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t);$$

cerchiamo quindi la soluzione particolare nella forma

$$y_p(t) = a\operatorname{sen}(2t) + b\cos(2t).$$

Si ricava quindi che la soluzione generale dell'equazione completa è data da

$$y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{20}\cos(2t);$$

imponendo le condizioni iniziali si trova infine che

$$y(t) = -\frac{1}{60}e^{-4t} + \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{20}\cos(2t).$$

Soluzione 2 Derivando troviamo che

$$r'(t) = \cos(t)(\operatorname{sen}(6t), \cos(6t), 1) + 6\operatorname{sen} t(\cos(6t), -\operatorname{sen}(6t), 0);$$

quindi

$$\|r'(t)\| = \sqrt{2 + 34\operatorname{sen}^2 t} \neq 0,$$

cioè il fatto che la curva sia regolare. La curva passa nel punto $(0, -1/2, 1/2)$ per $t = \pi/6$; in tal punto

$$r'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(-3, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

quindi la retta tangente è parametrizzata da

$$\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + t\left(-3, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

che in forma cartesiana diventa

$$\begin{cases} x\sqrt{3} - 6y - 3 = 0 \\ x\sqrt{3} + 6z - 3 = 0. \end{cases}$$

Il piano ortogonale è invece individuato dall'equazione

$$6x + y\sqrt{3} - z\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0.$$

Per l'ultima parte dell'esercizio, la distanza dal piano $z = -2$ è data da $\operatorname{sen} t + 2$, che quindi è massima in $t = \pi/2$ dove vale 3 e minima in $t = 3\pi/2$ dove vale 1.

Soluzione 3 Se calcoliamo il gradiente della funzione $f(x, y, z) = x^2 y + \arctan z + e^z$ si trova

$$\nabla f(x, y, z) = \left((2xy, x^2, \frac{1}{1+z^2} + e^z\right),$$

da cui $\nabla f(0,0,1) = (0,0,\frac{1}{2}+e)$. Il piano tangente è quindi determinato dall'equazione

$$\left(0,0,\frac{1}{2}+e\right)(x,y,z-1) = 0,$$

cioè $z = 1$. Il volume del nostro insieme è quindi dato da

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_{-2}^{1} dz \int_{x^2+y^2=4-z^2} dxdy = \pi \int_{-2}^{1} (4-z^2)dz = 9\pi.$$

Soluzione 4 La funzione è dispari quindi $a_k = 0$ per ogni $k \geq 0$. Per i b_k abbiamo

$$b_k = \frac{2}{3}\int_0^3 (3x-x^2)\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{3}x\right) dx = \frac{36}{\pi^3 k^3}(1-(-1)^k) = \begin{cases} \dfrac{72}{\pi^3 k^3} & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ è pari.} \end{cases}$$

La serie di Fourier è quindi data da

$$f(x) = \frac{72}{\pi^3}\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^3}\mathrm{sen}\left(\frac{(2h+1)\pi}{3}x\right).$$

Tale serie converge puntualmente, uniformemente e totalmente su tutto $\mathbb{R}$ in quanto la funzione è continua e regolare a tratti. Per le somme delle serie richieste si nota che la prima serie è legata al valore di f in $x = 3/2$; si ricava quindi che

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Dalla formula di Parseval si trova poi che

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

e quindi, notando che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(2h)^6} + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^6} = \frac{1}{64}\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^6} + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^6},$$

se ne deduce che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 6 settembre 2016

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)+\sqrt{t^2-y(t)^2}}{t}, \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Della soluzione trovata determinare il dominio e tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Determinare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + xy + y^2}$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Esercizio 3 [6 punti] Si consideri la curva nel piano xz parametrizzata da

$$r(t) = (\operatorname{sen} t - \cos t, \operatorname{sen} t + \cos t), \qquad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$$

e si definisca la superficie ottenuta ruotando tale curva attorno all'asse z. Si dica se tale superficie è regolare e se ne determini l'area.

Esercizio 4 [7 punti] Si studino le varie convergenze della serie di funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^4 + x^2}.$$

Si dica inoltre se la funzione f è continua e derivabile con continuità.

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che disegni il sostegno della superficie dell'esercizio 3. e ne calcoli l'area.

Soluzione 1 Siamo in presenza di una equazione di tipo omogeneo; si effettua pertanto la sostituzione $z(t) = y(t)/t$ e si arriva alla souzione, in forma implicita

$$\arcsin z(t) = \ln \frac{t}{2}.$$

Tale identità implica che $\ln \frac{t}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Esplicitando e tornando alla soluzione $y(t)$ si trova

$$y(t) = t \sin \ln \frac{t}{2};$$

tenendo presente che il Problema di Cauchy è definito per $t \geq 0$ si trova che il dominio di tale soluzione è $t \in [2, 2e^{\frac{\pi}{2}}]$.

Soluzione 2 Possiamo equivalentemente studiare i massimi e minimi della funzione

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2;$$

tale funzione, definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ha un solo punto stazionario in $(0, 0)$; dato che la matrice Hessiana in tale punto è definita positiva, si tratta di un punto di minimo. La matrice Hessiana è strettamente definita positiva in tutto $\mathbb{R}^2$ (è costante), quindi la funzione g è strettamente convessa. Se ne deduce che g ha in $(0, 0)$ un punto di minimo stretto che è punto di minimo stretto globale su tutto $\mathbb{R}^2$. Quindi $g(0, 0) = 0$ e $g(x, y) > 0$ per $(x, y) \neq (0, 0)$. Quindi la funzione f è continua su E, che è compatto; ne concludiamo che f ammette massimo e minimo.

Per determinare massimi e minimi di f determiniamo massimo e minimo di g su E; dato che all'interno di E il gradiente di g non si annulla mai, i punti stazionari vanno ricercati al bordo. Parametrizziamo il bordo di E per trovare le due funzioni

$$h_1(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t), \quad h_2(t) = f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t) = 2h_1(t).$$

Determinando i punti stazionari di h_1 e h_2 si conclude che

$$\max_E f = 2, \quad \text{assunto in } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

mentre

$$\min_E f = \frac{1}{3}, \quad \text{assunto in } (1, 1), (-1, -1).$$

Soluzione 3 La superficie è parametrizzata da

$$r(t, s) = ((\operatorname{sen} t - \cos t)\cos s, (\operatorname{sen} t - \cos t)\operatorname{sen} s, \operatorname{sen} t + \cos t), \quad (t, s) \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \times [0, 2\pi].$$

Siccome

$$\|r_t(t, s) \times r_s(t, s)\| = \sqrt{2}(\operatorname{sen} t - \cos t),$$

se ne deduce la regolarità della superficie tranne che per $t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$. Infine

$$\text{Area} = 2\pi\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\operatorname{sen} t - \cos t)dt = 4\pi.$$

Soluzione 4 Se definiamo
$$u_n(x) = \frac{\ln n}{n^4 + x^2},$$
si nota che tale successione di funzioni è data da funzioni continue e pari, con
$$|u_n(x)| \leq \frac{\ln n}{n^4} = M_n;$$
Siccome la serie associata alla successione M_n è convergente, se deduce, dal criterio di Weierstrass che la serie di funzioni é totalmente convergente su $\mathbb{R}$; quindi si ha convergenza puntuale e uniforme su tutto $\mathbb{R}$ e la funzione f così definita è continua e pari. Per quanto riguarda la derivabilità di f basta studiare le funzioni
$$u_n'(x) = -\frac{2x \ln n}{(n^4 + x^2)^2};$$
sicccome
$$|u_n'(x)| \leq \frac{3\sqrt{3} \ln n}{8n^6},$$
se ne deduce la convergenza totale anche della serie delle derivate; quindi f è derivabile con continuità su tutto $\mathbb{R}$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 26 ottobre 2016

Esercizio 1 [6 punti] Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^t + t.$$

Esercizio 2 [6 punti] Dire se nel punto $(1, 2, 3)$ si applica il Teorema della funzione implicita alla funzione

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 14, xyz - 6);$$

determinare in particolare tangente e normale in $(1, 2, 3)$ al livello $\{f = 0\}$.

Esercizio 3 [6 punti] Dire se il campo

$$F(x, y, z) = \left(\frac{y}{z}, \frac{x}{z}, -\frac{xy}{z^2}\right)$$

è conservativo o meno. Calcolare quindi il flusso del campo attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1, z > 1\}.$$

Esercizio 4 [7 punti] Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione 2-periodica pari definita per $x \in [0, 1]$ da

$$f(x) = x(1 - x);$$

studiare le varie convergenze della serie di Fourier e calcolare le somme delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che determini la soluzione dell'esercizio 1 e ne disegni il grafico con le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$.

Soluzione 1 L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}.$$

Per quanto riguarda l'equazione completa possiamo usare il principio di sovrapposizione e considerare separatamente le forzanti $f_1(t) = e^t$ e $f_2(t) = t$. Per tali forzanti si usa ad esempio il metodo per somiglianza e si arriva quindi a trovare che l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + \frac{t}{3} e^t - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}.$$

Soluzione 2 Notiamo che

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

ed in particolare

$$Df(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 2 ed i vettori $(2, 4, 6)$ e $(6, 3, 2)$ sono una base per il piano ortogonale, mentre il vettore $(2, 4, 6) \times (6, 3, 2) = (-10, 32, -8)$ è un vettore tangente. La retta tangente quindi sarà parametrizzata da

$$(1, 2, 3) + t(-10, 32, -8),$$

mentre il piano ortogonale sarà parametrizzato da

$$(1, 2, 3) + t(2, 4, 6) + s(6, 3, 2).$$

Soluzione 3 Si nota che

$$F(x, y, z) = \nabla \left(\frac{xy}{z} + c \right), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

La funzione

$$f(x, y, z) = \frac{xy}{z} + c$$

ha lo stesso dominio di F, quindi il campo è conservativo. Per il calcolo del flusso, parametrizziamo la superficie Σ usando la funzione $r : [0, 2\pi] \times [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t, s) = (1 + \cos t \sin s, 1 + \sin t \sin s, 1 + \cos s).$$

Con questa parametrizzazione si ha che

$$r_t(t, s) \times r_s(t, s) = -(\cos t \sin^2 s, \sin t \sin^2 s, \sin s \cos s).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \Phi(F, \Sigma) &= \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]} F(r(t, s)) \cdot r_t(t, s) \times r_s(t, s) dtds \\ &= -\int_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]} \frac{\sin s \cos s}{(1 + \cos s)^2} dtds = \pi - 2\pi \ln 2. \end{aligned}$$

Il calcolo del precedente integrale si poteva anche fare come segue; si nota che definendo la superficie

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, (x, y) \in B_1(1, 1)\},$$

allora $Sigma \cup \Sigma_1 = \partial E$ con

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \leq 1, z \geq 1\}.$$

Quindi possiamo usare il Teorema della divergenza; notando che sui punti di Σ si ha che

$$r_t(t,s) \times r_s(t,s) = -\nu_{\partial E}(r(t,s)),$$

si trova quindi che

$$\begin{aligned}
\Phi(F,\Sigma) =& -\int_E \mathrm{div} F(x,y,z)dxdydz - \Phi(F,\Sigma_1)\\
=&\int_E \frac{xy}{z^3}dxdydz - \int_{B_1(1,1)} F(x,y,1)\cdot(0,0,1)dxdy\\
=&-\int_{B_1(1,1)} xy\int_1^{1+\sqrt{1-(x-1)^2-(y-1)^2}} \frac{1}{z^3}dz - \int_{B_1(1,1)} xydxdy\\
=&\pi - 2\pi\ln 2.
\end{aligned}$$

Soluzione 4 La funzione è continua se estesa per parità e 2 periodica, quindi la serie di Fourier converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$. I coefficienti sono dati da

$$a_0 = \int_0^1 x(1-x)dx = \frac{1}{6},$$

mentre

$$a_k = \int_0^1 x(1-x)\cos(k\pi x)dx = -\frac{1+(-1)^k}{k^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ dispari,}\\ -\frac{2}{k^2\pi^2} & \text{se } k \text{ pari.}\end{cases}$$

Infine, $b_k = 0$ in quanto la funzione è pari. Quindi in definitiva

$$f(x) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k\pi x)}{k^2} = x(1-x);$$

qui la prima uguaglianza va intesa per ogni x, mentre la seconda solo per $x \in [0,1]$. Da questo sviluppo si nota la convergenza totale della serie ed inoltre, valutando in $x=0$ e $x=\frac{1}{2}$, si deduce che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

mentre

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{3}.$$

Infine usando la formula di Parseval si ottiene che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{11}{18}\pi^4.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 21 dicembre 2016

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y'''(t) - 2y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = te^t, \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Determinare massimo e minimo della funzione $f(x, y, z) = z$ sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, x^2 - xy + y^2 - z = 0\}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = \big(3xy^2 - x^3, yz^2 - y^3, 3x^2 z\big)$$

uscente dalla superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36\}.$$

Esercizio 4 [7 punti] Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 + x^k}.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che tracci il grafico sull'intervallo $[-2, 2]$ delle prime n funzioni, $n \in 10, 50, 100$, della successione

$$u_k(x) = \frac{1}{1 + x^k}$$

e il grafico della funzione somma delle prime n funzioni di tale successione.

Soluzione 1 Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è dato da

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6,$$

le cui radici sono $1, -2$ e 3. La soluzione generale dell'omogenea associata è data quindi da

$$y_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t}.$$

Per la soluzione particolare, possiamo usare il metodo per somiglianza e cercare la soluzione nella forma

$$y_p(t) = e^t(at^2 + bt).$$

Si trova quindi la soluzione particolare

$$y_p(t) = -\frac{e^t}{36}(3t^2 + t).$$

La soluzione generale dell'equazione completa è quindi data da

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} - \frac{e^t}{36}(3t^2 + t).$$

Se si impongono le condizioni iniziali si trova che $c_1 = {}^{209}\!/_{216}$, $c_2 = {}^{1}\!/_{135}$ mentre $c_3 = {}^{1}\!/_{40}$. In definitiva, la soluzione del Problema di Cauchy è data da

$$y(t) = \frac{209}{216} e^t + \frac{1}{135} e^{-2t} + \frac{1}{40} e^{3t} - \frac{e^t}{36}(3t^2 + t).$$

Soluzione 2 Per determinare massimi e minimi, possiamo usare il metodo per parametrizzazione; dato che $x^2 + y^2 = 4$ determina una circonferenza di raggio 2 nel piano xy e potendosi ricavare $z = x^2 + y^2 - xy$ dalla seconda equazione, possiamo utilizzare la parametrizzazione $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$r(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4 - 2\sin(2t))$$

per l'insieme E. Si nota da tale parametrizzazione che E è chiuso e limitato essendo limitate tutte e tre le componenti x, y e z mediante la parametrizzazione r. Si ottiene quindi la funzione

$$g(t) = f(r(t)) = 4 - 2\sin(2t).$$

Tale funzione ha minimo 2 per $t = {}^{\pi}\!/_{4}$ e $t = {}^{5\pi}\!/_{4}$, mentre ha massimo 6 per $t = {}^{3\pi}\!/_{4}$ e $t = {}^{7\pi}\!/_{4}$. In definitiva

$$\max_E f = 6, \qquad \text{assunto in } \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 6\right), \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 6\right),$$

mentre

$$\min_E f = 2, \qquad \text{assunto in } \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\right), \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\right).$$

Soluzione 3 Per determinare il flusso usiamo il Teorema della divergenza

$$\Phi(F, \partial E) = \int_E \mathrm{div} F(x, y, z)\, dxdydz = \int_E z^2 dxdydz.$$

Per il calcolo, possiamo usare il fatto che E sia stratificato con strati dati da

$$D_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9(1 - z^2)} + \frac{y^2}{4(1 - z^2)} \leq 1 \right\},$$

cioè un'ellisse di semiassi $3\sqrt{1 - z^2}$ e $2\sqrt{1 - z^2}$. Troviamo quindi che

$$\int_E z^2 dxdydz = \int_{-1}^{1} \left(\int_{D_z} z^2 dxdy \right) dz = \int_{-1}^{1} z^2 |D_z| dz = 6\pi \int_{-1}^{1} z^2(1 - z^2) dz = \frac{8}{5}\pi.$$

Soluzione 4 Le funzioni

$$u_k(x) = \frac{1}{1+x^k}$$

sono tutte ben definite se $x \neq -1$ (per k pari, le funzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$, altrimenti per k dispari sono tutte definite se $x \neq -1$). Quindi la convergenza va studiata in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Si nota che per $|x| > 1$,

$$\frac{1}{1+x^k} \sim \frac{1}{x^k}$$

e la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^k}$$

è assolutamente in quanto serie geometrica con argomento $|{}^1\!/x| < 1$. Per $x = 1$, $u_k(x) = {}^1\!/2$, mentre per $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x^k} \sim 1.$$

Quindi si avrà convergenza puntuale se e solo se $|x| > 1$. Le funzioni u_k sono tutte continue, quindi non si potrà avere convergenza uniforme in tutto l'insieme $|x| > 1$. Si nota però che per $|x| \geq a > 1$ si trova che

$$|u_k(x)| \leq \frac{1}{a^k - 1}$$

e la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^k - 1} < +\infty$$

è convergente. Si ha quindi convergenza totale (e quindi uniforme) sugli insiemi $|x| \geq a$ per ogni $a > 1$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 19 gennaio 2017

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y''(t) = \dfrac{y'(t)^2 + 1}{2y(t)} \\ \\ y(0) = 1, y'(0) = 1; \end{cases}$$

della soluzione trovata, determinare il dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Dire se ed in quali punti dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, (x-1)^2 + y^2 = 1\}$$

di può applicare il Teorema della funzione implicita; determinare quindi retta tangente e piano ortogonale all'insieme dato nel punto $(3/2, \sqrt{3}/2, 1)$.

Esercizio 3 [6 punti] Dato l'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\},$$

determinare Vol(E) e Area(∂E).

Esercizio 4 [7 punti] Studiare le varie convergenze della successione di funzioni

$$f_n(x) = x^n(1-x), \qquad x \in [0, 1].$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che determini la soluzione del Problema di Cauchy dato nell'esercizio 1) e che ne tracci il grafico.

Soluzione 1 Siamo in presenza di una equazione del secondo ordine di tipo autonomo; poniamo quindi $z(y) = y'(t)$ ed otteniamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z(y)z'(y) = \dfrac{z(y)^2 + 1}{2y} \\ \\ z(1) = 1. \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è data da

$$z(y) = \sqrt{2y - 1}.$$

Per concludere, risolviamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{2y(t) - 1} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + t + 1.$$

Soluzione 2 Consideriamo la funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, (x - 1)^2 + y^2);$$

la matrice Jacobiana di tale funzione è data da

$$Dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2(x-1) & 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome

$$(2x, 2y, 2z) \times (2(x - 1), 2y, 0) = (-4yz, 4z(x - 1), 4y),$$

si nota che la matrice Jacobiana non ha rango due solo nei punti $(1, 0, z)$ e $(x, 0, 0)$. Di tali punti solo il punto $(2, 0, 0)$ appartiene all'insieme che stiamo considerando, e quindi tale punto è l'unico punto in cui non si applica il Teorema della Funzione implicita. Nel punto $(3/2, \sqrt{3}/2, 1)$ in particolare le condizioni per l'applicazione del teorema sono soddisfatte; la retta tangente sarà data da

$$\begin{cases} x + y\sqrt{3} = 3 \\ 2y\sqrt{3} - 4z + 1 = 0, \end{cases}$$

mentre il piano ortogonale sarà dato da

$$x\sqrt{3} - y - z\sqrt{3} = 0.$$

Soluzione 3 Per quanto riguarda il volume dell'insieme dato abbiamo che

$$\mathrm{Vol}(E) = 2 \int_{\{(x-1)^2+y^2 \leq 1\}} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy = \frac{16}{3}\pi - \frac{64}{9}.$$

Per l'area della superficie laterale scriviamo $\partial E = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ con

$$\Sigma_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}, \quad \Sigma_2 = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, (x - 1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Possiamo quindi calcolare

$$\text{Area}(\Sigma_1) = 4 \int_{\{(x-1)^2+y^2 \leq 1\}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dxdy = 8\pi - 16,$$

mentre

$$\text{Area}(\Sigma_2) = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = 16.$$

In definitiva

$$\text{Area}(\partial E) = 8\pi.$$

Soluzione 4 Per la convergenza puntuale si nota che per $x \in [0,1]$

$$\lim_{n \to +\infty} x^n (1-x) = 0.$$

Per la convergenza uniforme si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = 0,$$

quindi la convergenza è anche uniforme.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 16 febbraio 2017

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere, al variare del parametro $y_0 \in \mathbb{R}$, il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{y(t) - y(t)^2}{t} \\ \\ y(1) = y_0; \end{cases}$$

delle soluzioni trovate, determinare il dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Dire se il campo

$$F(x, y, z) = \left(-\frac{z}{(x+y^2)^2}, -\frac{2yz}{(x+y^2)^2} + \frac{1}{z}, \frac{1}{x+y^2} - \frac{y}{z^2} + 2z \right)$$

è conservativo ed in caso determinarne i potenziali. Calcolare quindi

$$\int_r F \cdot d\vec{r},$$

con $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata da

$$r(t) = (2 + \cos t, \operatorname{sen} t, t + 1).$$

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare

$$\int_\Sigma \sqrt{\frac{z}{x^2 + y^2}} d\Sigma,$$

con Σ la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva data nel piano xz da $z = (1 - x)^2$, $x \in [0, 1]$.

Esercizio 4 [7 punti] Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1} x^n.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che determini le soluzioni del Problema di Cauchy dato nell'esercizio 1) con $y_0 \in \{-2, -3/2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$ e che ne tracci i grafici.

Soluzione 1 Siamo in presenza di un'equazione a variabili separabili; le soluzioni stazionarie sono $y(t) \equiv 0$ e $y(t) \equiv 1$, mentre le soluzioni non stazionarie sono date da

$$y(t) = \frac{y_0 t}{1 + y_0(t-1)};$$

tali soluzioni sono definite in $(0, 1 - 1/y_0)$ se $y_0 < 0$, in $(0, +\infty)$ se $y_0 \in (0,1)$ ed in $(1 - 1/y_0, +\infty)$ se $y_0 > 1$.

Soluzione 2 Si può notare direttamente che il campo è irrotazionale; dato che il dominio del campo è dato da

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq -y^2, z \neq 0\},$$

che è unione di domini semplicemente connessin, se ne deduce che il campo è conservativo. Il potenziale è dato da

$$U(x,y,z) = \frac{z}{x+y^2} + \frac{y}{z} + z^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Per la determinazione dell'integrale curvilineo, si nota che

$$\int_r F \cdot d\vec{r} = U(r(2\pi)) - U(r(0)) = 4\pi^2 + 4\pi.$$

Soluzione 3 Dato che la superficie è una superficie di rotazione, si nota che

$$\int_\Sigma \sqrt{\frac{z}{x^2+y^2}} d\Sigma = 2\pi \int_0^1 \frac{(1-t)}{t} t\sqrt{1+4(1-t)^2} dt = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

Soluzione 4 La serie data è una serie di potenze con

$$c_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1};$$

dato che

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1,$$

si trova che il raggio di convergenza è 1. Per $x = 1$ si ottiene la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$$

che converge grazie al criterio di Leibniz, mentre per $x = -1$ si ottiene la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$$

che non converge. Si ha quindi convergenza puntuale in $(-1, 1]$. Sempre grazie al Teorema di Leibniz si ottiene convergenza unifore in $[-a, 1]$ per ogni $0 \leq a < 1$, mentre si avrà convergenza totale in $[-a, a]$ per ogni $0 \leq a < 1$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 15 giugno 2017

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = t^2 \operatorname{sen} t \\ \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 z + y^2$$

sull'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 1\}$.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare la circuitazione del campo

$$F(x, y, z) = (y + 2z, z + 2x, x + 2y)$$

lungo la curva $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 10, x + z = 0\}$, sia usando la definizione di circuitazione, che utilizzando il Teorema di Stokes.

Esercizio 4 [7 punti] Scrivere e studiare le varie convergenze della serie di Fourier associata alla funzione 2-periodica definita in $[-1, 1]$ da

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in [-1, 0] \\ \\ 2x - x^2 & \text{se } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Ricordando che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, si determini la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che determini la soluzione del Problema di Cauchy presentato nell'Esercizio 1 e ne tracci un grafico per $t \in [0, 3\pi]$.

Soluzione 1 L'integrale generale dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \text{sen}\, t,$$

mentre la soluzione particolare va cercata nella forma

$$y_p(t) = (at^3 + bt^2 + ct)\cos t + (dt^3 + et^2 + ft)\text{sen}\, t.$$

Imponento la condizione

$$y_p''(t) + y_p(t) = t^2 \text{sen}\, t$$

si trova che

$$y_p(t) = \left(-\frac{t^3}{6} + \frac{t}{4}\right)\cos t + \frac{t^2}{4}\text{sen}\, t.$$

L'integrale generale dell'equazione completa è quindi dato da

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \text{sen}\, t + \left(-\frac{t^3}{6} + \frac{t}{4}\right)\cos t + \frac{t^2}{4}\text{sen}\, t;$$

imponendo le condizioni iniziali si trova che la soluzione del Problema di Cauchy è

$$y(t) = \left(-\frac{t^3}{6} + \frac{t}{4}\right)\cos t + \frac{t^2-1}{4}\text{sen}\, t.$$

Soluzione 2 Dato che possiamo riscrivere

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x, x^2 + y^2 = 2\},$$

si nota che E può essere parametrizzato mediante $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\text{sen}\, t, -\sqrt{2}\cos t).$$

In tal modo la circuitazione si determina come segue:

$$\begin{aligned}\int_r F \cdot d\vec{r} = & \int_0^{2\pi} (\sqrt{2}\text{sen}\, t - 2\sqrt{2}\cos t, -\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos t + 2\sqrt{2}\text{sen}\, t) \cdot \\ & \cdot(-\sqrt{2}\text{sen}\, t, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\text{sen}\, t)dt \\ = & \; 4\pi.\end{aligned}$$

Per utilizzare il Teorema di Stokes, notiamo che $E = \partial^+\Sigma$, se per Σ si considera

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0, x^2 + y^2 \le 2\}$$

con normale data da

$$\nu_\Sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1).$$

In tal caso si trova quindi che

$$\int_r F \cdot d\vec{r} = \int_\Sigma \text{rot} F \cdot \nu_\Sigma d\Sigma = \int_{\{x^2+y^2\le 2\}} (1,1,1)\cdot(1,0,1)dxdy = 4\pi.$$

Soluzione 3 Possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e cercare i punti stazionari della funzione

$$x^2 z + y^2 - \lambda(2x^2 + 4y^2 + z^2 - 1)$$

arrivando al sistema

$$\begin{cases} 2xz - 4\lambda x = 0 \\ 2y - 8\lambda y = 0 \\ x^2 - 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Tale sistema ha le seguenti soluzioni:

$$\begin{aligned} \text{per } \lambda = 0 &\text{ i punti } (0,0,1), (0,0,-1) \\ \text{per } \lambda = \frac{1}{4} &\text{ i punti } \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \\ &\qquad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \\ \text{per } \lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}} &\text{ i punti } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ \text{per } \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{3}} &\text{ i punti } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Per confronto si trova che

$$\max_E f = \frac{1}{4} \qquad \text{assunto nei punti } \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right),$$

mentre

$$\min_E f = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \qquad \text{assunto nei punti } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Soluzione 4 Tracciando il grafico dell'estensione 2–periodica della funziona data, si nota che tale estensione è continua e regolare a tratti. Quindi la serie di Fourier converge puntualmente e uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ all'estensione periodica di f. I coefficienti della funzione sono dati da

$$a_0 = -\int_{-1}^{0} x dx + \int_0^1 (2x - x^2) dx = \frac{7}{6},$$

$$a_k = -\int_{-1}^{0} x \cos(k\pi x) dx + \int_0^1 (2x - x^2)(\cos(k\pi x)) dx = \frac{(-1)^k - 3}{k^2 \pi^2},$$

$$b_k = -\int_{-1}^{0} x \text{sen}\,(k\pi x) dx + \int_0^1 (2x - x^2)(\text{sen}\,(k\pi x)) dx = \frac{2(1 - (-1)^k)}{k^3 \pi^3}.$$

Otteniamo quindi l'identità

$$f(x) = \frac{7}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k - 3}{k^2 \pi^2} \cos(k\pi x) + \frac{2(1 - (-1)^k)}{k^3 \pi^3} \text{sen}\,(k\pi x) \right).$$

Infine, dall'identità

$$0 = \frac{7}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 3}{k^2 \pi^2},$$

si ricava che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 13 luglio 2017

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} -y'(t) = \displaystyle\int_0^t \sqrt{1+y'(s)^2}ds \\ \\ y(0) = \sqrt{2}-1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Della soluzione trovata, si determini il dominio e se ne tracci un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = (x^2+4y^2+4z^2, y-2z),$$

si dimostri che l'equazione $f(x,y,z) = (8,0)$ definisce localmente attorno al punto $(\sqrt{3}, 1, 1/2)$ una curva regolare

$$r(x) = (x, y(x), z(x)).$$

Calcolare quindi la curvatura di $r(x)$ in $x = \sqrt{3}$.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma xy\, d\Sigma$$

con $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+4y^2+4z^2 = 8, y-2z \geq 0\}$.

Esercizio 4 [7 punti] Studiare le varie convergenze della seguente serie;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{k}} e^{-t^2} dt \right) x^k.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che definisca per $x \in [-1,1]$ e per $n \in \{10, 20, 50, 100\}$ le funzioni

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{\frac{1}{k}} e^{-t^2} dt \right) x^k$$

e ne tracci i grafici in un'unica finestra.

Soluzione 1 Il Problema di Cauchy viene assegnato con dati iniziali per $y(0)$ e per $y'(0)$; siamo quindi in presenza di una equazione differenziale del secondo ordine. Per convincerci di ciò, deriviamo l'equazione assegnata per trovare

$$-y''(t) = \sqrt{1 + y'(t)^2};$$

questa è una equazione del secondo ordine riconducibile al primo ordine ponendo $v(t) = y'(t)$ con dato iniziale $v(0) = 0$. L'integrale di tale equazione è dato quindi da

$$v(t) = -\sinh(t) = -\frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Integrando si arriva alla soluzione

$$y(t) = \sqrt{2} - \cosh(t) = \sqrt{2} - \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

che è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione 2 Calcoliamo la Jacobiana di f;

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 8y & 8z \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad Df(\sqrt{3}, 1, 1/2) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 8 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo quindi verificare che

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -20.$$

Quindi localmente attorno a $(\sqrt{3}, 1, 1/2)$ possiamo ricavare $y = y(x)$ e $z = z(x)$ ed ottenere una curva $r(x) = (x, y(x), z(x))$. Per calcolare la curvatura usiamo la formula

$$k_r(x) = \frac{\|r'(x) \times r''(x)\|}{\|r'(x)\|^3}$$

che per $x = \sqrt{3}$ diventa

$$k_r(\sqrt{3}) = \frac{\|r'(\sqrt{3}) \times r''(\sqrt{3})\|}{\|r'(\sqrt{3})\|^3};$$

i valori di

$$r'(\sqrt{3}) = (1, y'(\sqrt{3}), z'(\sqrt{3}))$$

e di

$$r''(\sqrt{3}) = (0, y''(\sqrt{3}), z''(\sqrt{3}))$$

li ricaviamo dal sistema

$$\begin{cases} x^2 + 4y(x)^2 + 4z(x)^2 = 8 \\ y(x) = 2z(x). \end{cases}$$

Derivando e sostituendo si ricava che

$$r'(\sqrt{3}) = \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{10}\right), \qquad r''(\sqrt{3}) = \left(0, -\frac{8}{25}, -\frac{4}{25}\right).$$

In definitiva si trova che

$$k_r(\sqrt{3}) = \frac{32}{23\sqrt{23}}.$$

Per la seconda parte dell'esercizio si poteva anche procedere nel modo seguente. L'insieme

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+4y^2+4z^2=8, y=2z\}$$

definisce una ellisse nello spazio parametrizzata da $r:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$

$$r(t)=\left(2\sqrt{2}\cos t, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}\operatorname{sen} t}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\operatorname{sen} t}\right).$$

Tale curva passa per $(\sqrt{3},1,1/2)$ nel punto t_0 per cui

$$\begin{cases} \cos t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \operatorname{sen} t_0 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Per la curvatura si usa ancora la formula

$$k_r(t_0)=\frac{\|r'(t_0)\times r''(t_0)\|}{\|r'(t_0)\|^3},$$

Si arriva pertanto al valore

$$k_r(t_0)=\frac{32}{23\sqrt{23}}.$$

Soluzione 3 Si nota che la funzione integranda è dispari sia rispetto alla variabile x che alla variabile y. Inoltre, se $(x,y,z)\in\Sigma$, allora anche $(-x,y,z)\in\Sigma$, quindi

$$\int_\Sigma xy d\Sigma = 0.$$

Soluzione 4 Se si pone

$$c_k=\int_0^{1/k} e^{-t^2}dt,$$

siccome $e^{-t^2}\to 1$ per $t\to 0$, allora $c_k\sim 1/k$, cioè

$$\lim_{k\to+\infty} kc_k = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{1/k}\int_0^{1/k} e^{-t^2}dt = 1.$$

Possiamo quindi applicare il criterio del rapporto per trovare che

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{c_{k+1}}{c_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)c_{k+1}}{kc_k}\frac{k}{k+1}=1.$$

Il raggio di convergenza della serie di potenze è quindi $r=1$; per $x=1$ si ottiene la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

che è divergente in quanto $c_k\sim 1/k$, mentre per $x=-1$ si ottiene la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k c_k$$

che converge grazie al criterio di Leibnitz notando che la successione c_k è infinitesima e monotona in quanto

$$\int_0^{1/(k+1)} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{1/k} e^{-t^2} dt$$

per la monotonia dell'integrale rispetto all'insieme di integrazione.

In definitiva, la serie di potenze converge puntualmente in $[-1, 1)$, assolutamente in $(-1, 1)$, uniformemente in $[-1, a]$, per ogni $0 \leq a < 1$, uniformemente assolutamente e totalmente in $[-a, a]$ per ogni $0 \leq a < 1$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 4 settembre 2017

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{y(t)}{t^2-1} = \sqrt{t+1} \\ \\ y(0) = 0 : \end{cases}$$

si determini quindi il dominio della soluzione trovata.

Esercizio 2 [6 punti] Si determino e si classifichino i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2+4x+y+1}{\sqrt{xy}}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_E (x^2 - z^2)\, dxdydz$$

con $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 1 \leq z^2 \leq 4\}$.

Esercizio 4 [7 punti] Studiare le varie convergenze della seguente serie;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{2 + \operatorname{sen} k} x^k.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che determini la soluzione del Problema di Cauchy dell'Esercizio 1 e ne tracci il grafico nell'insieme $[-1/2, 1/2]$.

Soluzione 1 L'equazione data è lineare del primo ordine; la soluzione si trova quindi mediante la formula

$$y(t) = e^{-A(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s) ds \right)$$

con

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) ds, \qquad a(s) = \frac{1}{s^2 - 1}, \qquad b(s) = \sqrt{s+1}, \quad t_0 = 0, y_0 = 0.$$

In definitiva si trova che

$$y(t) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \left(1 - (1-t)^{3/2} \right).$$

Soluzione 2 I punti stazionari, cioè i punti che annullano il gradiente, sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 4x - y - 1 = 0, \\ y - x^2 - 4x - 1 = 0; \end{cases}$$

si ottengono quindi i due punti stazionari $(1, 6)$ e $(-1, -2)$. Calcolando la matrice Hessiana in tali punti si trova che

$$A = Hf(1,6) = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{12\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad B = Hf(-1,-2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

la prima matrice è definita positiva e quindi $(1, 6)$ è un punto di minimo locale stretto, la seconda matrice è indefinita e quindi $(-1, -2)$ è un punto di sella.

Soluzione 3 Dato che la funzione integranda troviamo che

$$\int_E (x^2 - z^2)\, dxdydz = 2 \int_{\{x^2+y^2 \le 3\}} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2+1}}^{2} (x^2 - z^2)\, dz = 49\pi.$$

Soluzione 4 La serie data è una serie di potenze con coefficienti

$$c_k = \frac{\ln k}{2 + \operatorname{sen} k}.$$

Dato che per $k > 2$

$$1 < \ln k < k$$

e

$$1 \le 2 + \operatorname{sen} k \le 3,$$

si deduce che

$$\frac{1}{\sqrt[k]{3}} < \sqrt[k]{c_k} < \sqrt[k]{k}.$$

Quindi

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{c_k} = 1,$$

e quindi il raggio di convergenza è $\varrho = 1$. Per $|x| = 1$ si ottengono le due serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{2 + \operatorname{sen} k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{2 + \operatorname{sen} k};$$

dato che

$$\frac{\ln k}{2 + \operatorname{sen} k} \ge \ln k,$$

le due serie non possono convergere dato che il termine generale della serie non è infinitesimo. In definitiva, la serie converge puntualmente in $(-1, 1)$, uniformemente e totalmente in $[-a, a]$ per ogni $0 < a < 1$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 21 settembre 2017

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) = \dfrac{y'(t)^2 + 1}{2y(t)} \\ \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 : \end{cases}$$

della soluzione trovata, si determini il dominio e se ne tracci un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = (x + 3y^2)e^{xz} - 1,$$

dire se localmente attorno al punto $(1, 0, 0)$ l'equazione $f(x, y, z) = 0$ definisce una superficie regolare grafico di una funzione $x = g(y, z)$. Di tale funzione determinare infine il polinomio di Taylor del secondo ordine centrato in $(0, 0)$.

Esercizio 3 [6 punti] Verificare la validità del Teorema di Stokes per la funzione

$$F(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$$

sulla superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y + z = 1\}$ orientata in modo tale che la terza componente della normale sia positiva.

Esercizio 4 [7 punti] Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione 2π–periodica definita in $x \in [-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = x(\pi - |x|);$$

studiare le varie convergenze e determinare le somme delle serie numeriche

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che determini la soluzione del Problema di Cauchy dell'Esercizio 1 e ne tracci il grafico nell'insieme $[-1/2, 1/2]$.

Soluzione 1 L'equazione è di tipo autonomo; si pone quindi $y' = z(y)$ per ottenere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z(y)z'(y) = \frac{z(y)^2+1}{2y} \\ z(1) = 0. \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è data da

$$z(y) = \sqrt{y-1}.$$

Risolviamo infine il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)-1} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

La soluzione finale è quindi data da

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + 1;$$

tale funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione 2 Calcolando il gradiente di f si trova che

$$\nabla f(1,0,0) = (1,0,1);$$

il teorema si può quindi applicare per dedurre che localmente attorno a $(1,0,0)$ l'equazione

$$f(x,y,z) = 0$$

ha come luogo di punti un grafico sia come funzione $x = g(y,z)$ che $z = g(x,y)$. Il polinomio di Taylor si determina tenendo conto che $g(1,0) = 0$ e calcolando $\nabla g(1,0)$ e $Hg(1,0)$ dall'equazione

$$xe^{xg(x,y)} + 3y^2 e^{xg(x,y)} - 1 = 0;$$

si trova che

$$\nabla g(1,0) = (-1,0), \qquad Hg(1,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio di Taylor è quindi dato da

$$\begin{aligned} g(x,y) =& g(1,0) + \nabla g(1,0) \cdot (x-1,y) + \frac{1}{2} Hg(1,0)(x-1,y) \cdot (x-1,y) + o(\|(x-1,y)\|^2) \\ =& -(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 - 3y^2 + o(\|(x-1,y)\|^2). \end{aligned}$$

Soluzione 3 Dobbiamo verificare la seguente formula

$$\int_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot \nu_\Sigma \, d\Sigma = \int_{\partial^+\Sigma} F d\vec{r}.$$

Tenendo presente che

$$\mathrm{rot} F(x,y,z) = (0,0,3x^2+3y^2)$$

e che Σ è il grafico della funzione

$$g(x,y) = 1 - x - y$$

sul dominio $\{x^2+y^2\le 1\}$, da una parte troviamo che

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \mathrm{rot}F\cdot\nu_\Sigma\,d\Sigma=&\int_{B_1}(0,0,3x^2+3y^2)\cdot(1,1,1)\,dxdy\\ =&3\int_{B_1}(x^2+y^2)\,dxdy=\frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

D'altra parte invece possiamo parametrizzare $\partial^+\Sigma$ mediante $r:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$

$$r(t)=(\cos t,\mathrm{sen}\,t,1-\cos t-\mathrm{sen}\,t)$$

e quindi

$$\int_{\partial^+\Sigma}F\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}(-\mathrm{sen}^3t,\cos^3t,-(1-\cos t-\mathrm{sen}\,t)^3)\cdot(-\mathrm{sen}\,t,\cos t,\mathrm{sen}\,t-\cos t)dt=\frac{3}{2}\pi.$$

Soluzione 4 La funzione data è dispari, quindi

$$a_k=0,\qquad \forall k\ge 0.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}b_k=&\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi x-x^2)\mathrm{sen}\,(kx)dx\\ =&\frac{4}{\pi k^3}(\cos(k\pi)-1)=\begin{cases}0 & \text{se } k \text{ pari}\\ \frac{8}{\pi k^3} & \text{se } k \text{ dispari.}\end{cases}\end{aligned}$$

In definitiva si trova che

$$\tilde{f}(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{h=0}^\infty\frac{1}{(2h+1)^3}\mathrm{sen}\,((2h+1)x).$$

La serie converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$, quindi anche puntualmente e uniformemente. Valutando tale serie in $x=\pi/2$, troviamo che

$$\sum_{h=0}^\infty\frac{(-1)^h}{(2h+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

Dalla formula di Parseval si ricava infine che

$$\sum_{h=0}^\infty\frac{1}{(2h+1)^6}=\frac{\pi^6}{960},$$

da cui

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 13 novembre 2017

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) + y(t) = te^t \cos t \\ \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + z^2 - 2y$$

sull'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 4(x^2 + y^2) \leq (z + 1)^2, -1 \leq z \leq \sqrt[4]{x^2 + y^2} \right\}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il volume dell'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 4(x^2 + y^2) \leq (z + 1)^2, -1 \leq z \leq \sqrt[4]{x^2 + y^2} \right\}.$$

Esercizio 4 [7 punti] Si scriva la serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$ associata alla funzione $f(x) = \ln(1 + x)$; si determino in particolare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme e totale. Si calcoli infine la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che disegni in $\mathbb{R}^3$ il bordo ∂E dell'insieme dato al punto 2) e 3).

Soluzione 1 La soluzione dell'equazione omogenea si trova determinando le radici del polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1.$$

Troveremo quindi che la soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(t) = e^{-t/2}\left(c_1 \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c_2 \mathrm{sen}\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

La soluzione particolare va cercata invece nella forma

$$y_p(t) = e^t\left((at+b)\cos t + (ct+d)\mathrm{sen}\, t\right).$$

Imponendo che tale funzione risolva l'equazione data si trova che

$$y_p(t) = e^t\left(\left(\frac{2}{13}t - \frac{7}{52}\right)\cos t + \left(\frac{3}{13}t - \frac{41}{104}\right)\mathrm{sen}\, t\right).$$

La soluzione del Problema di Cauchy infine sarà data da

$$y(t) = e^{-t/2}\left(\frac{7}{52}\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{25\sqrt{3}}{156}\mathrm{sen}\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + e^t\left(\left(\frac{2}{13}t - \frac{7}{52}\right)\cos t + \left(\frac{3}{13}t - \frac{41}{104}\right)\mathrm{sen}\, t\right).$$

Soluzione 2 Cerchiamo anzitutto i punti stazionari interni;

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, -2, 2z).$$

Siccome tale gradiente non sia annulla mai, non avremo punti stazionari interni e quindi massimo e minimo vanno cercati sul bordo di E. Tale bordo è costituito da due vertici, il punto $(0, 0, -1)$ e il punto $(0, 0, 0)$, la superficie laterale del cono

$$\Sigma_1 = \{4(x^2 + y^2) = (z + 1)^2, z > -1\},$$

la superficie

$$\Sigma_2 = \{z = \sqrt[4]{x^2 + y^2}, 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

e la curva

$$\Sigma_3 = \{4(x^2 + y^2) = (z + 1)^2, z > -1, z = \sqrt[4]{x^2 + y^2} = \{z = 1, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Σ_1 può essere visto come il grafico della funzione

$$-1 + 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

con $0 < x^2 + y^2 < 1$; possiamo quindi considerare la funzione

$$g_1(x, y) = f(x, y, -1 + 2\sqrt{x^2 + y^2} = 3x^2 + 2y^2 - 2y - 4\sqrt{x^2 + y^2} + 1.$$

Tale funzione ha come unico punto critico il punto $(0, -1/2)$ che quindi diventa candidato massimo o minimo.

Σ_2 è il grafico della funzione $z = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ con $0 < x^2 + y^2 < 1$; possiamo quindi considerare la funzione

$$g_2(x, y) = f(x, y, \sqrt[4]{x^2 + y^2}) = x^2 + \sqrt{x^2 + y^2} - 2y.$$

Tale funzione non ha punti critici.

Resta infine da considerare Σ_3; tale insieme è una circonferenza di raggio 1 nel piano $z = 1$ che può quindi essere parametrizzata da

$$r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Possiamo quindi considerare la funzione di 1 variabile

$$g_3(t) = f(r(t)) = \cos^2 t + 1 - 2\operatorname{sen} t;$$

tale funzione ha due punti critici per $t = \pi/2$ e $t = 3\pi/2$.

In definitiva per confronto tra i valori si trova che

$$\max_E f = 3, \qquad \text{assunto in } (0, -1, 1),$$

mentre

$$\min_E f = -1, \qquad \text{assunto in } (0, 1, 1).$$

Soluzione 3 Passando alle coordinate cilindriche si nota che l'insieme diventa

$$E' = \{(\varrho, \vartheta, t) : \varrho \le 1, 2\varrho - 1 \le t \le \sqrt{\varrho}\}.$$

Otteniamo quindi che

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_E dxdydz = \int_{E'} \varrho d\varrho d\vartheta dt = 2\pi \int_0^1 d\varrho \int_{2\varrho-1}^{\sqrt{\varrho}} \varrho dt = \frac{7}{15}\pi.$$

Soluzione 4 Tenendo conto che

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k,$$

integrando per serie si ottiene che

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

I passaggi precedenti sono motivati quando c'e' convergenza uniforme; la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

converge puntualmente per $|x| < 1$, totalmente e uniformemente per $|x| \le r < 1$.

L'indentità

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

vale quindi sicuramente per $|x| < 1$. Si nota però poi che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

converge puntualmente per $x \in (-1, 1]$, uniformemente in $[-r, 1]$ con $0 < r < 1$. Quindi le due funzioni

$$f(x) = \ln(1+x), \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

sono continue in $(-1,1]$. Essendo esse coincidenti in $(-1,1)$, si deve necessariamente avere che $f(1)=g(1)$, da cui l'identità

$$\ln 2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 21 dicembre 2017

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + 2\,\mathrm{sen}\, y(t)(\cos y(t))^3 = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

Della soluzione trovata determinare il dominio e tracciarne il grafico.

Esercizio 2 [6 punti] Dire se per la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2, xy + yz - xz)$$

si applica il Teorema della funzione implicita nel punto $(1, -1, 1) \in E_{(1,-3)}(f)$. Dire in particolare se localmente attorno a tale punto si può scrivere $(y, z) = (g(x), h(x))$; determinare quindi i polinomi di Taylor del secondo ordine centrati in $x_0 = 1$ delle funzioni g e h e calcolare la curvatura di $E_{(1,-3)}(f)$ in $(1, -1, 1)$.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare la circuitazione del campo

$$F(x, y, z) = (1, 0, y)$$

lungo la curva $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = x + 3\,\mathrm{sen}\,(x^2 - y^2)\}$.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare, motivando la risposta, il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1/2}^{3/2} (x - x^2)^n dx.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che determini la soluzione del Problema di Cauchy esposto nell'Esercizio 1.

Soluzione 1 Siamo in presenza di una equazione del secondo ordine autonoma; si pone quindi $y'(t) = v(y)$ con la condizione iniziale $v(y(1)) = v(0) = y'(1) = 1$. Si arriva quindi al Problema di Cauchy

$$v(y)v'(y) = -2 \operatorname{sen} y (\cos y)^3$$

$$v(0) = 1,$$

la cui soluzione è data da

$$v(y) = (\cos y)^2.$$

Si tratta ora di risolvere il seguente Problema di Cauchy

$$y'(t) = (\cos y(t))^2$$

$$y(1) = 0;$$

la soluzione di tale problema è data da

$$y(t) = \arctan(t-1),$$

che è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione 2 Si nota immediatamente che $f(1,-1,1) = (1,-3)$. La matrice Jacobiana è data da

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ y-z & x+z & y-x \end{pmatrix}$$

che in $(1-1,1)$ diventa

$$Df(1,-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Siccome

$$\det \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 8$$

si può dedurre che localmente attorno a $(1,-1,1)$ l'insieme $E_{(1,-3)}(f)$ è localmente una curva ed in particolare si può scrivere $(y,z) = (g(x), h(x))$ in modo da parametrizzare mediante una curva $r : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}^3$

$$r(x) = (x, g(x), h(x)).$$

Si ha che $g(1) = -1$ e $h(1) = 1$. Per le derivate, si tratta di derivare nelle equazioni

$$\begin{cases} x^2 + g(x)^2 - h(x)^2 = 1 \\ xg(x) + g(x)h(x) - xh(x) = -3. \end{cases}$$

Si arriva quindi agli sviluppi di Taylor

$$g(x) = -1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{4} + o((x-1)^2)$$

$$h(x) = 1 + \frac{3(x-1)^2}{4} + o((x-1)^2).$$

Per la curvatura usiamo la formula

$$k_r(1) = \frac{\|r'(1) \times r''(1)\|}{\|r'(1)\|^3}$$

con $r(x) = (x, g(x), h(x))$. Si trova quindi che

$$k_r(1) = \frac{\sqrt{38}}{8}.$$

Soluzione 3 Per la determinazione della circuitazione conviene usare il Teorema del rotore; si nota che

$$\text{rot}F(x, y, z) = (1, 0, 0)$$

mentre la curva data è il bordo ad esempio della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = x + 3\,\text{sen}\,(x^2 - y^2)\}.$$

Troviamo quindi che

$$\oint_r F \cdot d\vec{r} = \int_\Sigma \text{rot}F \cdot \hat{\nu}_\Sigma d\Sigma = -\int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} (1 + 6x\cos(x^2 - y^2))dxdy = -\pi.$$

Soluzione 4 Si nota che per $x \in [-1/2, 3/2]$ si ha che $|x - x^2| \leq 3/4$. Quindi

$$|f_n(x)| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-1/2,3/2]} |f_n(x)| = 0,$$

cioè la successione di funzioni converge uniformemente a 0 nell'intervallo considerato. In definitiva

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1/2}^{3/2} f_n(x)dx = 0.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 18 gennaio 2018

Esercizio 1 [6 punti] Determinare tutte le soluzione dell'equazione differenziale

$$y''(t) + y(t) = \frac{1}{\cos t}.$$

Esercizio 2 [6 punti] Dire se le curve $r : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{r} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$,

$$r(t) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right)$$

$$\tilde{r}(s) = \left(\sqrt{1 - s^2}, s \right)$$

sono tra loro equivalenti; si dica in particolare se le due curve hanno la stessa orientazione e si determino spazi e rette tangenti e normali nel punto $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

Esercizio 3 [6 punti] Trovare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y, z) = (3x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 3z)e^{-z};$$

si scrivano quindi i polinomi di Taylor di secondo grado della funzione centrati nei suoi punti stazionari.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il seguente integrale doppio;

$$\int_E \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dxdy,$$

con $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1/4, (x - 1/2)^2 + y^2 \leq 1/4\}$.

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che determini e classifichi i punti stazionari del problema dell'Esercizio 3.

Soluzione 1 L'equazione data è lineare del secondo ordine non omogenea. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata è data da

$$y_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \text{sen } t,$$

mentre per la soluzione particolare applichiamo il metodo della variazione delle costanti. Arriviamo al sistema

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\text{sen } t = 0 \\ -c_1'(t)\text{sen } t + c_2'(t)\cos t = \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

Tale sistema ha soluzioni

$$\begin{cases} c_1'(t) = -\tan t \\ c_2'(t) = 1, \end{cases}$$

da cui si ricava che la soluzione generale dell'equazione data è

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \text{sen } t + t\cos t + \text{sen } t \ln|\cos t|.$$

Soluzione 2 Le curve sono equivalenti se esiste ad esempio $\alpha : [-1,1] \to [-1,1]$ tale che

$$r(t) = \tilde{r}(\alpha(t)),$$

cioè tale che

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) = (\sqrt{1-\alpha(t)^2}, \alpha(t)).$$

Tale funzione se esiste deve essere data da

$$\alpha(t) = \frac{2t}{1+t^2};$$

con questa scelta si verifica subito che

$$\sqrt{1-\alpha(t)^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Quindi la funzione α ha la proprietà che

$$r(t) = \tilde{r}(\alpha(t)).$$

La funzione α così definita è di classe C^1 e

$$\alpha'(t) = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} > 0$$

se $t \in (0,1)$. Quindi α preserva l'orientazione. Per quanto riguarda la seconda parte dell'esercizio, si ha ad esempio che $\tilde{r}(s) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ per $s = \sqrt{3}/2$. Dato che

$$\tilde{r}'(\sqrt{3}/2) = (-\sqrt{3}, 1),$$

troviamo che lo spazio tangente è dato da

$$\langle(-\sqrt{3}, 1)\rangle,$$

lo spazio normale da

$$\langle(1, \sqrt{3})\rangle,$$

mentre la retta tangente è parametrizzata da

$$(1/2, \sqrt{3}/2) + t(-\sqrt{3}, 1)$$

e la retta ortogonale da

$$(1/2, \sqrt{3}/2) + t(-\sqrt{3}, 1).$$

Soluzione 3 Il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = e^{-z}(6x+2y, 2x+2y, -3x^2-2xy-y^2-2z^2+7z-3)$$

che si annulla nei punti $(0,0,1/2)$ e $(0,0,3)$ che sono quindi gli unici due punti stazionari di f. La matrice Hessiana di f è data da

$$Hf(x,y,z) = e^{-z}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -6x-2y \\ 2 & 2 & -2x-2y \\ -6x-2y & -2x-2y & 3x^2+2xy+y^2+2z^2-11z+10 \end{pmatrix}.$$

Nei due punti stazionari si ottiene quindi che

$$A = Hf(0,0,1/2) = e^{-1/2}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

e

$$B = Hf(0,0,3) = e^{-3}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix};$$

la matrice A è definita positiva in quanto i determinanti dei minori principali sono dati da

$$6e^{-1/2} > 0, \quad 8e^{-1/2} > 0, \quad 40e^{-1/2} > 0;$$

il punto $(0,0,1/2)$ è quindi un punto di minimo locale stretto. La matrice B è invece indefinita in quanto i determinanti dei minori principali sono dati da

$$6e^{-3} > 0, \quad 8e^{-3} > 0, \quad -40e^{-3} < 0;$$

il punto $(0,0,3)$ è quindi un punto di sella. Per quanto riguarda i polinomi di Taylor, dato che siamo in presenza di punti stazionari e quindi il gradiente è nullo, sono dati da

$$\begin{aligned} T^{(2)}_{f,(0,0,1/2)}(x,y,z) =& f(0,0,1/2) + \frac{1}{2}Hf(0,0,1/2)(x,y,z-1/2)\cdot(x,y,z-1/2) \\ =& \frac{e^{-1/2}}{2}\left(-1+6x^2+2y^2+4xy+5(z-1/2)^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{(2)}_{f,(0,0,3)}(x,y,z) =& f(0,0,3) + \frac{1}{2}Hf(0,0,3)(x,y,z-3)\cdot(x,y,z-3) \\ =& e^{-3}\left(9+3x^2+y^2+2xy-\frac{5}{2}(z-3)^2\right). \end{aligned}$$

Soluzione 4 Per il calcolo dell'integrale passiamo alle coordinate polari; l'insieme in coordinate polari è determinato dalle condizioni

$$\tilde{E} = \{(\varrho,\vartheta) : \frac{1}{2} \le \varrho \le \cos\vartheta\}$$

Deve quindi anche valere la condizione $1/2 \le \cos\vartheta$, e quindi $\vartheta \in [-\pi/3, \pi/3]$. Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned} \int_E \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy =& \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\vartheta \int_{1/2}^{\cos\vartheta} \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}d\varrho \\ =& \pi\frac{\sqrt{3}}{3} - 1. \end{aligned}$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 23 febbraio 2018

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{y(t)}{t} + \tan \dfrac{y(t)}{t} \\ y(1) = \pi. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Dire se il campo

$$F(x,y,z) = \left(2x\cos(x^2+y^2), 2y\cos(x^2+y^2), 2ze^{-z^2}\right) + \frac{2}{1+x^2+y^2+z^2}(x,y,z)$$

è conservativo o meno. Determinare in caso un potenziale e calcolare l'integrale

$$\int_r F \cdot d\vec{r}$$

con $r : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ data da

$$r(t) = \left(te^{t-1} + 4\ln(1+t^2(e-1), \operatorname{sen}(\pi\ln(1+t^2(e-1)), 1+\cos(\pi t)\right).$$

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il volume dell'insieme

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 + \left(z - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \leq 1\right\}.$$

Esercizio 4 [7 punti] Studiare le varie convergenze della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{-\ln k}.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che disegni nello spazio la superficie $\Sigma = \partial E$, con E l'insieme dato nell'Esercizio 3; si completi l'esercizio calcolando l'area di Σ e il volume di E.

Soluzione 1 L'equazione è di tipo omogeneo e si pone $z(t) = {}^{y(t)}/_{t}$ per arrivare al problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = \frac{1}{t} \tan z(t) \\ z(1) = \pi. \end{cases}$$

Questa è una equazione a variabili separabili e la funzione $z(t) \equiv \pi$ è soluzione stazionaria. La soluzione del problema iniziale è quindi data da

$$y(t) = \pi t.$$

Soluzione 2 Il campo è conservativo in quanto $F(x, y, z) = \nabla U(x, y, z)$ con

$$U(x, y, z) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2) + \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2) - e^{z^2} + c.$$

Quindi avremo che

$$\int_r F \cdot d\vec{r} = U(r(1)) - U(r(0)) = U(5, 0, 0) - U(0, 0, 2) = \operatorname{sen}(25) + \ln \frac{26}{5} + e^4 - 1.$$

Soluzione 3 Il volume di E è dato da

$$\operatorname{Vol}(E) = \int_E dxdydz = 2 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^3 \sqrt{1 - (\varrho - 2)^2} \varrho d\varrho = 4\pi^2.$$

Soluzione 4 Riscrivendo il termine generale della serie si nota che

$$x^{-\ln k} = k^{-\ln x} = \frac{1}{k^{\ln x}}.$$

La serie converge quindi puntualmente per $\ln x > 1$, cioè per $x > e$. Dato che

$$\sup_{x > e} \frac{1}{k^{\ln x}} = \frac{1}{k},$$

la convergenza non sarà totale in $(e, +\infty)$, ma lo sarà in $[a, +\infty)$ per ogni $a > e$. La continuità di ${}^{1}/_{k^{\ln x}}$ implica che la convergenza non può essere uniforme in $(e, +\infty)$; avremo quindi convergenza uniforme in $[a, +\infty)$ per ogni $a > e$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 23 marzo 2018

Esercizio 1 [6 punti] Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'''(t) + y(t) = 2\text{sen}\,(2t)\cos(t).$$

Esercizio 2 [6 punti] Dire se e dove la funzione $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\} \to \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right)$$

definisce un diffeomorfismo locale. Determinare quindi i sottoinsiemi $A, B \subset \mathbb{R}^2$ per cui $F : A \to B$ definisce diffeomorfismo globale, cioè un cambiamento di coordinate.

Esercizio 3 [6 punti] Si determini il volume del solido ottenuto ruotando attorno all'asse y l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, 0 \le y \le e^x\}.$$

Esercizio 4 [7 punti] Studiare le varie convergenze della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}, \qquad x \in [0, 1).$$

Calcolare quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} f_n(x)dx, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^{1} f_n(x)dx.$$

Esercizio 5 [5 punti]

Si scriva del codice Matlab che tracci i grafici dei primi dieci elementi della successione data nell'Esercizio 4 e ne calcoli gli integrali sugli intervalli $[0, 1/2]$ e $[0, 1]$.

Soluzione 1 Siamo in presenza di una equazione differenziale lineare del terzo ordine a coefficienti costanti completa con termine forzante dato da

$$f(t) = 2\text{sen}\,(2t)\cos(t).$$

Grazie al teorema sulla struttura delle soluzioni, si cerca prima la soluzione dell'equazione omogenea

$$y'''(t) + y(t) = 0$$

e poi si cerca la soluzione particolare. Per quanto riguarda la soluzione dell'equazione omogenea, siccome si cercano le soluzioni nella forma $y(t) = e^{\lambda t}$, ci si riconduce al problema della ricerca degli zeri del polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1).$$

Tali radici sono date da

$$\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dato che le funzioni

$$e^{-t}, e^{t/2}\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right), e^{t/2}\text{sen}\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

sono linearmente indipendenti e lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea di un'equazione differenziale del terzo ordine ha dimensione 3, si trova che l'integrale generale dell'equazione omogenea è dato da

$$y_0(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t/2}\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c_3 e^{t/2}\text{sen}\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Per quanto riguarda la soluzione particolare, siccome

$$f(t) = 2\text{sen}\,(2t)\cos(t) = \text{sen}\,(3t) + \text{sen}\,(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

Iniziamo con $f_1(t) = \text{sen}\,(3t)$; la soluzione, dato che $\lambda = 3i$ non è radice del polinomio caratteristico, va cercata nella forma

$$y_1(t) = a\cos(3t) + b\,\text{sen}\,(3t);$$

imponendo l'identità

$$y_1'''(t) + y_1(t) = \text{sen}\,(3t)$$

si deduce che $a = 27/728$ e $b = 1/728$. Per quanto riguarda il termine forzante $f_2(t) = \text{sen}\,(t)$, dato che ancora $\lambda = i$ non è radice del polinomio caratteristico, la soluzione particolare va cercata nella forma

$$y_2(t) = a\cos(t) + b\,\text{sen}\,(t);$$

imponendo che tale funzione sia soluzione dell'equazione differenziale, si trova che $a = b = 1/2$. In definitiva, l'integrale generale dell'equazione di partenza è dato da

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t/2}\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c_3 e^{t/2}\text{sen}\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right). + \frac{27}{728}\cos(3t) + \frac{1}{728}\text{sen}\,(3t) + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\text{sen}\,(t).$$

Soluzione 2 Per vedere se F definisce un diffeomorfismo locale basta vedere se e dove F è di classe C^1 e $\det DF(x,y) \neq 0$. F è definito e di classe C^1 se $x \neq 0$. Inoltre

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix};$$

dato che $\det DF(x,y) = \frac{2y}{x}$, ricaviamo che F è un diffeomorfismo locale per $x, y \neq 0$. Per vedere per quali A, B, $F : A \to B$ è un diffeomorfismo globale e quindi un cambio di variabili, dobbiamo determinare A e B in modo tale che per $(x,y) \in A$ e $(u,v) \in B$ l'equazione (il sistema)

$$(u,v) = F(x,y)$$

ammette unica soluzione (cioè in modo tale che F sia iniettiva e suriettiva da A a B). Vediamo quindi di risolvere il sistema

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Dato che $x, y \neq 0$ si nota subito che si deve avere $u, v \neq 0$. Ricavando dalla seconda equazione $y = uv$, la prima diventa

$$x^2 v = u;$$

si nota quindi che u e v devono avere lo stesso segno e quindi B deve essere contenuto nel primo e terzo quadrante di $\mathbb{R}^2$. Ricavando x si ottiene

$$x = \pm\sqrt{\frac{u}{v}};$$

per togliere l'ambiguità sul segno di x ed avere quindi iniettività di F bisogna decidere il segno di x; A quindi deve essere scelto o con $x > 0$ o con $x < 0$. Per quanto riguarda y avremo poi che

$$y = \pm v\sqrt{\frac{u}{v}}.$$

In definitiva avremo che ad esempio

$$F : \{(x,y) : x > 0\} \to \{(u,v) : uv > 0\}$$

è un diffemorfismo con

$$G(u,v) = F^{-1}(u,v) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, v\sqrt{\frac{u}{v}}\right),$$

così come anche

$$F : \{(x,y) : x < 0\} \to \{(u,v) : uv > 0\}$$

è un diffemorfismo con

$$G(u,v) = F^{-1}(u,v) = \left(-\sqrt{\frac{u}{v}}, -v\sqrt{\frac{u}{v}}\right).$$

Soluzione 3 Per il volume cercato possiamo usare la formula

$$2\pi \int_1^2 x f(x)dx = 2\pi \int_1^2 x e^x dx = 2\pi e^2.$$

Soluzione 4 La successione converge puntualmente a 0; tale convergenza non è uniforme in $[0,1)$ in quanto

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,1)}|f_n(x)| = +\infty,$$

ma è uniforme negli intervalli della forma $[0,a]$ con $0<a<1$; infatti

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,a]}|f_n(x)| = \lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{\sqrt{1-a}} = 0.$$

Da questo deduciamo immediatamente che

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1/2} f_n(x)dx = 0.$$

Per il secondo integrale invece dobbiamo sfruttare il fatto che per $x\to 1$ la funzione $f_n(x)$ è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ e che questa funzione è integrabile in 1. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 0.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 14 giugno 2018

Esercizio 1 [6 punti] Determinare tutte le soluzioni del seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} u'(t) = 4t^2 u(t)^{1/2} + \dfrac{2}{t}u(t) \\ \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Dire se nel punto $(0, 2, 0)$ si può applicare il Teorema della funzione implicita per la funzione

$$f(x, y, z) = (xy + z^5, x \ln y - 3z \cos x + ye^z);$$

scrivere quindi l'equazione della retta tangente e del piano normale ad $E_{(0,2)}$ in $(0, 2, 0)$.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_E \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + z^2}} dxdydz$$

con $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, y^2 + x^2 \leq z^2, z \geq 0\}$.

Esercizio 4 [7 punti] Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan\left(x + \frac{1}{n}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5 [5 punti] Scrivere del codice Matlab che determini la soluzione del Problema di Cauchy dell'Esercizio 1 e tracci il grafico della soluzione trovata.

Soluzione 1 Siamo in presenza di una equazione del primo ordine di tipo Bernoulli; ponendo $v(t) = u(t)^{1/2}$ si trova il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) = \dfrac{1}{t}v(t) + 2t^2 \\ \\ v(1) = 1, \end{cases}$$

la cui soluzione è $v(t) = t^3$. La soluzione del problema originale è data quindi da $u(t) = t^6$.

Soluzione 2 La matrice Jacobiana della funzione in $(0, 2, 0)$ è data da

$$Df(0,2,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \ln 2 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

tale matrice ha rango 2 e quindi il Teorema della funzione implicita si applica attorno al punto $(0, 2, 0)$ per poter dire che, localmente attorno al punto $(0, 2, 0)$, l'insieme di livello $E_{(0,2)}(f)$ è una curva regolare.

Dato che

$$(2, 0, 0) \times (\ln 2, 1, -1) = (0, 2, 2),$$

si ricava che l'equazione parametrica della retta tangente è data da

$$r(t) = (0, 2, 0) + t(0, 2, 2) = (0, 2 + 2t, 2t),$$

che in forma cartesiana diventa

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 2. \end{cases}$$

L'equazione del piano normale è invece dato da

$$y + z = 2.$$

Soluzione 3 Utilizziamo le coordinate cilindriche

$$z = t, \qquad x = \varrho\cos\vartheta, \qquad y = \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

con $0 \le \vartheta \le 2\pi$, $0 \le \varrho \le 1$ e $\varrho \le t \le \sqrt{2-\varrho^2}$. L'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\varrho \int_\varrho^{\sqrt{2-\varrho^2}} \varrho\left(\frac{\varrho^2\mathrm{sen}^2\vartheta}{\varrho}\right) dt = \pi\int_0^1 (\varrho^2\sqrt{2-\varrho^2} - \varrho^3)d\varrho = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}.$$

Soluzione 4 Il limite puntuale della successione data è $\arctan(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$; verifichiamo se tale limite è anche uniforme;

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\arctan\left(x + \frac{1}{n}\right) - \arctan(x)\right|.$$

Un modo per effettuare tale studio è notare che, siccome la derivata della funzione arcotangente è sempre minore o uguale ad 1, allora tale funzione è Lipschitziana con costante di Lipschitz 1; quindi

$$\left|\arctan\left(x + \frac{1}{n}\right) - \arctan(x)\right| \le \frac{1}{n}.$$

da cui la convergenza uniforme su tutto R. In alternativa si può definire

$$g_n(x) = \arctan\left(x + \frac{1}{n}\right) - \arctan(x), \qquad x \in \mathbb{R};$$

si nota che per la monotonia della funzione arcotangente, le g_n sono positive,

$$\lim_{x\to-\infty} g_n(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0.$$

Inoltre

$$g_n'(x) = \frac{1}{1 + (x + \frac{1}{n})^2} - \frac{1}{1 + x^2}$$

che si annulla per $x = \frac{1}{2n}$ dove la funzione vale

$$g_n\left(\frac{1}{2n}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Siccome tale valore tende a 0 per $n \to +\infty$, se ne deduce la convergenza uniforme su $\mathbb{R}$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 13 luglio 2018

Esercizio 1 Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = te^t \\ \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine centrata in $(1,1)$ associata alla funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Determinare e classificare quindi i punti stazionari di f.

Esercizio 3 Verificare la formula di Stokes con

$$F(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$$

e

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

orientata in modo tale che il campo normale sia dato da $\nu_\Sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Esercizio 4 Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione 2–periodica determinata da $f : [0,2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x - x^2.$$

Determinare quindi le somme delle serie numeriche

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Esercizio 5 Scrivere del codice Matlab che determini la soluzione dell'Esercizio 2).

Soluzione 1 Siamo in presenza di una equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Si determina quindi prima la soluzione dell'equazione omogenea associata determinando le radici del polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

La soluzione generale dell'omogenea associata é data quindi da

$$y_0(t) = e^t(c_1 + c_2 t).$$

A questo punto possiamo procedere o con il metodo della variazione delle costanti, oppure usando il metodo per somiglianza. Procediamo con questo secondo metodo; cerhiamo quindi la soluzione particolare nella forma

$$y_p(t) = e^t(at^3 + bt^2).$$

Imponendo che tale funzione sia soluzione dell'equazione differenziale data si trova che $a = 1/6$ e $b = 0$. Imponendo infine le condizioni iniziali, si trova che la soluzione del problema di Cauchy é data da

$$y(t) = \frac{t^3}{6} e^t.$$

Soluzione 2 Scriviamo gradiente ed Hessiana della funzione f:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{4xy^2 + 2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, - \frac{4x^2y + 2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \right),$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-12x^2y^2+4y^4+6y^2-6x^2+2}{(x^2+y^2+1)^3} & \frac{8x^3y-8xy^3}{(x^2+y^2+1)^3} \\ \frac{8x^3y-8xy^3}{(x^2+y^2+1)^3} & \frac{12x^2y^2-4x^4-6x^2+6y^2-2}{(x^2+y^2+1)^3}. \end{pmatrix}$$

Dato che $f(1, 1) = 0$, $\nabla f(1, 1) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ e

$$Hf(1, 1) = \begin{pmatrix} -frac29 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} \end{pmatrix},$$

troviamo che

$$f(x, y) = \frac{2}{3}(x - 1) - \frac{2}{3}(y - 1) - \frac{1}{18}(x - 1)^2 + \frac{1}{18}(y - 1)^2 + o(\|(x - 1, y - 1)\|^2).$$

Infine, esiste un unico punto stazionario dato da $(0, 0)$, in tale punto la matrice Hessiana é data da

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

matrice indefinita, quindi il punto $(0, 0)$ é un punto di sella.

Soluzione 3 Da una parte abbiamo che

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = (0, 0, 3x^2 + 3y^2),$$

e quindi

$$\int_\sigma \operatorname{rot} F \cdot \nu_\Sigma d\Sigma = \int_{\{x^2+y^2 \le 1\}} 3(x^2 + y^2) dxdy = \frac{3}{2}\pi.$$

D'altra parte il bordo di $\partial^+\Sigma$ é parametrizzato da $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1 - \cos t - \operatorname{sen} t);$$

troviamo quindi che

$$\begin{aligned}&\int_{\partial^+\Sigma} F\cdot d\vec{r}\\ &=\int_0^{2\pi}(-\sin^3 t,\cos^3 t,(1-\cos t-\sin t)^3)\cdot(-\sin t,\cos t,\sin t-\cos t)dt=\frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

Soluzione 4 Si nota che l'estensione 2–periodica della funzione data é pari; di conseguenza $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$. Calcoliamo quindi

$$a_0=\int_0^2(2x-x^2)dx=\frac{4}{3},$$

mentre per $k \geq 1$

$$a_k=\int_0^2(2x-x^2)\cos(k\pi x)dx=-\frac{4}{k^2\pi^2}.$$

Troviamo quindi lo sviluppo in Serie di Fourier

$$f(x)=\frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos(k\pi x).$$

Valutando tale espressione in $x = 0$ e $x = 1$ troviamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

mentre

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=-\frac{\pi^2}{12}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 13 settembre 2018

Esercizio 1 [6 punti] Si risolva il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y''(t) = 3y(t)^5 \\ y(2) = y'(2) = -1. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Determinare massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4$$

sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^2 \leq 16\}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma (x^2 - y^2 + y + 3z^2)\, d\Sigma$$

con $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$.

Esercizio 4 [7 punti] Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione 2π–periodica definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = x(\pi - |x|);$$

studiare quindi le varie convergenze della serie e calcolare la somma della serie numerica

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)^3}.$$

Esercizio 5 [5 punti] Si scriva del codice Matlab che determini la soluzione del Problema di Cauchy dell'Esercizio 1; tracciare quindi il grafico della soluzione e della sua derivata nell'intervallo $[2, 5/2]$.

Soluzione 1 L'equazione data è del secondo ordine non lineare autonoma; tale equazione si risolve ponendo $y'(t) = v(y)$. Si arriva quindi alla soluzione

$$y(t) = -\sqrt{5-2t}.$$

Soluzione 2 Cerchiamo prima i punti stazionari interni;

$$\nabla f(x,y,z) = (4x^3, 4y^3, 0)$$

che si annulla nei punti della forma $(0,0,z)$ dove la funzione assume il valore

$$f(0,0,z) = 0.$$

Per i punti di bordo, usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$x^4 + y^4 - \lambda(x^2 + y^4 + z^2 - 16);$$

si tratta quindi di risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - 2\lambda x = 0 \\ 4y^3 - 4\lambda y^3 = 0 \\ -2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^4 + z^2 = 16. \end{cases}$$

Tale sistema ha le seguenti soluzioni:

$$\begin{array}{ll} (0,0,\pm 4) & \text{con } \lambda = 0 \\ (\pm 4, 0, 0) & \text{con } \lambda = 32 \\ (0, \pm 2, 0) & \text{con } \lambda = 1 \\ (1/\sqrt{2}, \sqrt[4]{31/2}, 0) & \text{con } \lambda = 1 \\ (1/\sqrt{2}, -\sqrt[4]{31/2}, 0) & \text{con } \lambda = 1 \\ (-1/\sqrt{2}, \sqrt[4]{31/2}, 0) & \text{con } \lambda = 1 \\ (-1/\sqrt{2}, -\sqrt[4]{31/2}, 0) & \text{con } \lambda = 1. \end{array}$$

Dato che

$$f(0,0,\pm 4) = 0, \quad f(\pm 4, 0, 0) = 256, \quad f(0, \pm 2, 0) = 16,$$

$$f(1/\sqrt{2}, \sqrt[4]{31/2}, 0) = f(1/\sqrt{2}, -\sqrt[4]{31/2}, 0) = f(-1/\sqrt{2}, \sqrt[4]{31/2}, 0) = f(-1/\sqrt{2}, -\sqrt[4]{31/2}, 0) = \frac{63}{4},$$

possiamo concludere che

$$\max_E f = 256 \qquad \text{assunto nei due punti } (4,0,0), (-4,0,0),$$

mentre

$$\min_E f = 0 \qquad \text{assunto nei punti della forma } (0,0,z) \text{ con } |z| \leq 4.$$

Soluzione 3 Se parametrizziamo usando la parametrizzazione

$$(r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\varphi), \vartheta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi],$$

troviamo che

$$\int_\Sigma (x^2 - y^2 + y + 3z^2) d\Sigma = 3r^4 \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \cos^2\varphi \sin\varphi d\vartheta d\varphi = 4\pi r^4.$$

Soluzione 4 La funzione data è dispari e la sua estensione 2π–periodica è continua, mentre la derivata prima è continua a tratti; possiamo quindi dire che la serie di Fourier converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$. La disparità di f implica che $a_k = 0$ per ogni $k \geq 0$, mentre

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \sin(kx) dx = -\frac{4}{\pi k^3}((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2h \\ \frac{8}{\pi(2h+1)^3} & \text{se } k = 2h + 1. \end{cases}$$

Troviamo quindi che

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2h+1)^3} \sin((2h+1)x).$$

Ponendo $x = \pi/2$, si arriva all'identità

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 20 dicembre 2018

Esercizio 1 [6 punti] Si determini l'integrale generale dell'equazione;

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^t;$$

tra le soluzioni trovate determinare quella per cui $y(0) = 0$ e

$$\int_0^1 y(t)dt = 0.$$

Esercizio 2 [6 punti] Dire se sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 12, z = x^2 + y^2 - 1\}$$

si può applicare il Teorema della funzione implicita; in particolare dire se il teorema si applica in $(1, 1, 1)$ ed in tal punto determinare tangente ed ortogonale.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 4 [6 punti] Dato il campo $F(x, y, z) = (x, 0, 0)$, determinare il flusso di F e di $\mathrm{rot}F$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Esercizio 5 [6 punti] Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione 2π–periodica definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\pi, 0] \\ \dfrac{\pi x}{2} & \text{se } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Determinare quindi le somme delle serie numeriche

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Soluzione 1 L'equazione è del secondo ordine lineare a coefficienti costanti completa. Per la soluzione dell'omogenea associata cerchiamo le radici del polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

che sono data da $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. La soluzione generale dell'omogenea associata è quindi data da

$$y_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}.$$

Per la soluzione particolare, usiamo il metodo per somiglianza e la cerchiamo nella forma

$$y_p(t) = ate^t;$$

imponendo che tale funzione risolva l'equazione differenziale troviamo $a = 1/3$. La soluzione generale del nostro problema è quindi data da

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + \frac{t}{3} e^t.$$

Se imponiamo che $y(0) = 0$ troviamo $c_2 = -c_1$, e quindi

$$y(t) = c_1 e^t - c_1 e^{-2t} + \frac{t}{3} e^t.$$

Infine, ponendo che l'integrale sia nullo troviamo che $c_1 = \frac{2e^2}{9e^2 - 3 - 6e^3}$, e quindi la soluzione del nostro problema diventa

$$y(t) = \frac{2e^{t+2}}{9e^2 - 3 - 6e^3} + \frac{2e^{2-2t}}{3 + 6e^3 - 9e^2} + \frac{t}{3} e^t.$$

Soluzione 2 Stiamo considerando l'insieme di livello $(12, 1)$ della funzione

$$f(x, y, z) = (3x^2 + 4y^2 + 5z^2, x^2 + y^2 - z);$$

per vedere se sono soddisfatte le condizioni del Teorema della funzione implicita bisogna vedere quando la matrice Jacobiana di f ha rango 2. Abbiamo che

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 8y & 10z \\ 2x & 2y & -1 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto vettoriale tra le due righe di tale matrice è dato da

$$(-8y - 20yz, 20xz + 6x, -4xy).$$

I punti in cui non si applica il Teorema della funzione implicita sono i punti per cui tale prodotto vettoriale è nullo, cioè

$$\begin{cases} -4y(2 + 5z) = 0 \\ 2x(10z + 3) = 0 \\ -4xy = 0. \end{cases}$$

I punti che soddifano tali condizioni sono dati della forma $(0, 0, z)$, $(0, y, -2/5)$ oppure $(x, 0, -3/10)$. Si nota però che

$$f(0, 0, z) = (5z^2, -z) \neq (12, 1), \qquad \forall z \in \mathbb{R},$$

mentre

$$f\left(0, y, -\frac{2}{5}\right) = \left(4y^2 + \frac{4}{5}, y^2 + \frac{2}{5}\right) \neq (12, 1), \qquad \forall y \in \mathbb{R},$$

ed infine

$$f\left(x,0,-\frac{3}{10}\right)=\left(3x^2+\frac{9}{20},x^2+\frac{3}{10}\right)\neq(12,1),\qquad\forall x\in\mathbb{R}.$$

Quindi il Teorema si applica in tutti i punti dell'insieme $E_{(12,1)}(f)$, ed in particolare in $(1,1,1)$. In tal punto il vettore

$$(-28,26,-4)$$

è tangente e quindi la retta tangente è parametrizzata da

$$(1,1,1)+t(-28,26,-4),$$

mentre per il piano ortogonale usiamo la formula

$$(-28,26,-4)(x-1,y-1,z-1)=0.$$

Soluzione 3 Per i punti interni cerchiamo i punti stazionari liberi ponendo

$$\nabla f(x,y)=(3x^2-3y^2,-6xy)=0,$$

che ha come unica soluzione il punto $(0,0)$ dove $f(0,0)$ vale 0. Per i punti della frontiera, possiamo parametrizzare il vincolo mediante $r(t)=(\cos t,\sin t)$. Otteniamo quindi la funzione di una variabile

$$g(t)=\cos^3 t-3\cos t\sin^2 t;$$

si ottiene che

$$g'(t)=3\sin t(1-4\cos^2 t).$$

Tale derivata si annulla quindi per $\sin t=0$, cioè per $t=0$ e $t=\pi$, e per $\cos^2 t=1/4$, e quindi nei quattro punti $t=\pi/3$, $t=2\pi/3$, $t=4\pi/3$ e $t=5\pi/3$. Abbiamo quindi 6 punti stazionari vincolati che sono $(1,0)$, $(1/2,\sqrt{3}/2)$, $(-1/2,\sqrt{3}/2)$, $(-1,0)$, $(-1/2,-\sqrt{3}/2)$ e $(1/2,-\sqrt{3}/2)$. Per confronto nei valori si trova che

$$\max_E f=1,\qquad\text{assunto in }(1,0)$$

mentre

$$\min_E f=-1,\qquad\text{assunto in }(-1,0).$$

Soluzione 4 Notiamo anzitutto che $\mathrm{rot}F(x,y,z)=0$ e quindi

$$\Phi(\mathrm{rot}F,\Sigma)=0.$$

Per quanto riguarda il flusso di F dobbiamo invece usare la definizione perchè la superficie non è bordo di un insiemi e quindi il Teorema della divergenza non si può usare. Parametrizziamo la superficie usando le coordinate sferiche con asse lungo l'asse x

$$r(t,s)=(2\cos s,2\cos t\sin s,2\sin t\sin s).$$

La condizione $0\leq x\leq 1$ diventa quindi una condizione su s del tipo $s\in[\pi/3,\pi/2]$. Il flusso di F diventa quindi

$$\begin{aligned}\Phi(F,\Sigma)=&\int_\Sigma F\cdot\nu_\Sigma\,d\Sigma\\=&\int_{\pi/3}^{\pi/2}ds\int_0^{2\pi}(2\cos s,0,0)\cdot(\cos s,\cos t\sin s,\sin t\sin s)4\sin s dt\\=&\frac{14}{3}\pi.\end{aligned}$$

Soluzione 5 La funzione data è continua a tratti e regolare a tratti. La serie di Fourier quindi converge puntualmente ovunque alla regolarizzata di f che differisce da f solo nei punti della forma $\pi+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; la convergenza è uniforme negli intervalli $[a,b]$ che non contengono in punti $\pi+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. I coefficienti di Fourier della funzione sono

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi x}{2}dx = \frac{\pi^2}{4},$$

mentre

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi x}{2}\cos(kx)dx = \frac{1}{2k^2}((-1)^k-1) = \begin{cases} 0 & \text{se } k=2h \\ -\frac{1}{(2h+1)^2} & \text{se } k=2h+1 \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi x}{2}\sin(kx)dx = -\frac{\pi(-1)^k}{2k}$$

In definitiva la serie di Fourier è data da

$$f(x) = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x) - \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k}\sin(kx).$$

Valutando la precedente espressione in $x=0$ si ottiene che

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 17 gennaio 2019

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) = ty'(t)^2 \\ \\ y(0) = 1, y'(0) = 2. \end{cases}$$

Della soluzione trovata determinare il dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Studiare la regolarità della curva $r : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = \left(\operatorname{sen} t, \cos t + \ln \tan \frac{t}{2} \right).$$

Si consideri quindi la restrizione $r : [\pi/2, \pi) \to \mathbb{R}^2$; si calcoli il parametro d'arco e si riparametrizzi la curva in lunghezza d'arco.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Dire se l'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z(1 + x^2 + y^2)^\alpha \leq xy\}$$

è misurabile o meno; dire inoltre per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme E ha misura finita.
N.B. Non viene richiesto il valore esplicito della misura di E.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{(n^2 - x^2)^2}{(n^2 - x^2)^2 + 1}.$$

Calcolare quindi, motivando i passaggi,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

Soluzione 1 L'equazione data è del secondo ordine riconducibile a due del primo ordine pomendo $v(t) = y'(t)$. Si ottiene per v il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) = tv(t)^2 \\ v(0) = 2. \end{cases}$$

Tale problema ha come soluzione

$$v(t) = \frac{2}{1 - t^2}.$$

Si tratta quindi ora di integrare

$$y'(t) = \frac{2}{1 - t^2}$$

con $y(0) = 1$. Si arriva in definitiva alla soluzione

$$y(t) = 1 + \ln \frac{1 + t}{1 - t}$$

La soluzione trovata è definita per $t \in (-1, 1)$

Soluzione 2 La funzione data è continua quindi stiamo sicuramente considerando una curva. Per la regolarità si nota che

$$r'(t) = \left(\cos t, \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t}\right);$$

la curva è quindi di classe C^1 per $t \neq \pi/2$ e quindi è regolare a tratti. In $[\pi/2, \pi)$ a curva è regolare e quindi il parametro d'arco si calcola mediante l'integrale

$$s(t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \|r'(\tau)\| d\tau = \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} |\cos \tau| \sqrt{1 + \frac{\cos^\tau}{\operatorname{sen}^2 \tau}} d\tau = -\ln \operatorname{sen} t.$$

Per riparametrizzare in lunghezza d'arco basta ricavare t in funzione di s; tenendo presente che la funzione arcoseno è l'inversa della funzione seno ma solo sull'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, scrivamo

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi - t) = e^{-s},$$

da cui

$$t = \pi - \arcsin e^{-s}$$

e sostituire trovando quindi che la riparametrizzazione in lunghezza d'arco è data da $\tilde{r} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$

$$\tilde{r}(s) = \left(e^{-s}, -\sqrt{1 - e^{-2s}} + \frac{1}{2} \ln \left(2e^{2s} - 1 + 2e^{2s}\sqrt{1 - e^{-2s}}\right)\right).$$

Soluzione 3 I punti stazionari sono le soluzioni del sistema $\nabla f(x, y) = 0$ che è dato da

$$\begin{cases} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(y - x^2 y) = 0 \\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(x - xy^2) = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ha cinque soluzioni che sono date da $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$. Per classificarli calcoliamo la matrice Hessiana che è data da

$$Hf(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} -3xy + x^3 y & 1 - x^2 - y^2 + x^2 y^2 \\ 1 - x^2 - y^2 + x^2 y^2 & -3xy + xy^3 \end{pmatrix}.$$

Nei punti stazionari tale matrice diventa

$$A_1 = Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = Hf(1,1) = Hf(-1,-1) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

e

$$A_3 = Hf(1,-1) = Hf(-1,1) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Dato che $\det A_1 < 0$, necessariamente A_1 ha autovalori non nulli di segno discorde, quindi A_1 è indefinita e $(0,0)$ è quindi un punto di sella. La matrice A_2 è chiaramente definita negativa e quindi $(1,1)$ e $(-1,-1)$ sono punti di massimo locale stretto, mentre A_3 è chiaramente definita positiva e quindi $(1,-1)$ e $(-1,1)$ sono punti di minimo locale stretto.

Soluzione 4 Per vedere la misurabilità di E, dato che siamo in presenza di un insieme illimitato, possiamo considerare gli insiemi

$$E_h = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq h^2, xy \geq 0, 0 \leq z \leq \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}\right\}.$$

Tali insiemi sono chiaramente misurabili in quanto semplici e

$$E = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} E_h;$$

quindi E è misurabile. La sua misura sarà quindi data da

$$|E| = \lim_{h\to+\infty} |E_h| = \lim_{h\to+\infty} \int_{D_h} \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^\alpha} dxdy,$$

dove abbiamo posto

$$D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq h^2, xy \geq 0\}.$$

Per determinazione del volume degli insiemi E_h possiamo passare alle coordinate polari e trovare che

$$|E_h| = 2\int_0^h \frac{\varrho^3}{(1+\varrho^2)^\alpha} d\varrho.$$

La funzione integranda nell'ultimo integrale è limitata per ϱ limitato mentre per $\varrho \to +\infty$ è asintoticamente equivalente alla funzione $\varrho^{3-2\alpha}$. Tale funzione è integrabile quindi se e solo se $3 - 2\alpha < 1$, cioè se $\alpha > 2$. Nel caso si volesse per $\alpha > 2$ determinare in modo esplicito il volume di E calcoliamo per parti il seguente integrale

$$2\int_0^h \frac{\varrho^3}{(1+\varrho^2)^\alpha} d\varrho = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \frac{h^2}{(1-\alpha)(1+h^2)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)(1+h^2)^{2-\alpha}}.$$

Quindi

$$|E| = \lim_{h\to+\infty} |E_h| = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}.$$

Soluzione 5 Per il limite puntuale si nota che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2-x^2)^2}{(n^2-x^2)^2+1} = 1.$$

Per lo studio della convergenza uniforme dobbiamo calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-1| = \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{(n^2-x^2)^2+1}.$$

Studiamo quindi il grafico della funzione pari

$$g_n(x) = \frac{1}{(n^2-x^2)^2+1};$$

Siccome

$$\lim_{x\to\infty} g_n(x) = 0$$

e $g_n(x) \leq 1$ con $g_n(\pm n) = 1$, se ne deduce che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) = 1 \not\to 0,$$

e quindi non può esserci convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$. Siccome il valor massimo di g_n viene assunto nei punti $\pm n$, proviamo a studiare la convergenza uniforme negli intervalli $[-a, a]$ con $a > 0$. Per $n > a$ si ha che

$$\sup_{x\in[-a,a]} g_n(x) = \frac{1}{(n^2-a^2)^2+1}$$

e questa quantità tende a 0 per $n \to +\infty$. Abbiamo quindi convergenza uniforme in ogni intervallo $[-a, a]$ con $a > 0$; siccome prendendo $a > 1$, $[0, 1] \subset [-a, a]$, per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale troviamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 14 febbraio 2019

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'''(t) - 8y''(t) + 16y'(t) = t \\ \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Dire se sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1, x + y + z = 1\}$$

si può applicare il Teorema della funzione implicita; considerare in particolare il punto $(1, 0, 0)$ e calcolare retta tangente, piano ortogonale e curvatura.

Esercizio 3 [6 punti] Trovare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = xye^{x+y}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Studiare la regolarità della superficie Σ parametrizzata da $r : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t, s) = (t \cos s, t \mathrm{sen}\, s, e^{-t});$$

calcolare quindi il flusso del campo

$$F(x, y, z) = (x, y, 0)$$

attraverso la superficie Σ.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n + 1)!(2n)}.$$

Soluzione 1 Per la soluzione dell'omogena associata si considera il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda = \lambda(\lambda - 4)^2$$

le cui radici sono 0 e 4, quest'ultima con molteplicità 2. Per la soluzione particolare si cerca la soluzione nella forma

$$y_p(t) = at^2 + bt;$$

derivando e sostituendo nell'equazione si trova che $a = b = \frac{1}{32}$. La soluzione generale dell'equazione differenziale è quindi data da

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{4t} + c_3 t e^{4st} + \frac{t^2}{32} + \frac{t}{32}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova che la soluzione è data da

$$y(t) = \frac{3}{256} - \frac{3}{256} e^{4t} + \frac{1}{64} t e^4 + \frac{t^2}{32} + \frac{t}{32}.$$

Soluzione 2 Scriviamo la matrice Jacobiana della funzione $f(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 + 3z^2, x + y + z)$

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 6z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

tale matrice ha rango minore di due solo se $(2x, 4y, 6z) = \lambda(1, 1, 1)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Non si applica quindi il Teorema della funzione implicita nei punti appartenenti alla retta

$$(x, y, z) = \lambda \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \right), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Di tali punti quelli che appartengono ad E devono soddifare le equazioni

$$\begin{cases} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{\lambda}{6}\right)^2 = 1 \\ \\ \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{6} = 1; \end{cases}$$

siccome non esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ che soddisfano il precedente sistema, se ne deduce che in tutti i punti di E il Teorema della funzione implicita si applica.

In particolare, attorno a $(1, 0, 0)$ E è una curva regolare. Siccome la matrice Jacobiana di f in $(1, 0, 0)$ è data da

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

sappiamo che lo spazio ortogonale è generato dai vettori $(2, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$, mentre lo spazio tangente da $(2, 0, 0) \times (1, 1, 1) = (0, -2, 2)$. La retta tangente è quindi parametrizzata da

$$r(t) = (1, 0, 0) + t(0, -2, 2),$$

mentre il piano ortogonale è determinato dall'equazione

$$(0, -2, 2) \cdot (x - 1, y, z) = 0,$$

cioè dall'equazione $y - z = 0$. Per la curvatura di E in $(1, 0, 0)$ usiamo il fatto che, dato che ad esempio il minore costruito selezionando le prime due colonne della matrice Jacobiana di f ha determinante

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

allora localmente attorno a $(1, 0, 0)$ possiamo parametrizzare E con una curva $r : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t) = (g(t), h(t), t).$$

Per la curvatura usiamo poi la formula

$$k_r(0) = \frac{\|r'(0) \times r''(0)\|}{\|r'(0)\|^3}$$

Le derivate di r le ricaviamo dal sistema

$$\begin{cases} g(t)^2 + 2h(t)^2 + 3t^2 = 1 \\ g(t) + h(t) + t = 1. \end{cases}$$

Si trova che $r(0) = (1, 0, 0)$, $r'(0) = (0, -1, 1)$ mentre $r''(0) = (-5, 5, 0)$, da cui il fatto che

$$k_r(0) = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Soluzione 3 Il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x, y) = e^{x+y}((x + 1)y, (y + 1)x)$$

che si annulla in $(0, 0)$ e $(-1, -1)$. La matrice Hessiana è invece data da

$$Hf(x, y) = e^{x+y} \begin{pmatrix} (x + 2)y & (x + 1)(y + 1) \\ (x + 1)(y + 1) & (y + 2)x \end{pmatrix};$$

nei due punti stazionari otteniamo le due matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{e^2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La prima matrice è indefinita in quanto il determinante è negativo, la seconda è definita negativa in quanto i due autovalori sono negativi. Quindi $(0, 0)$ è punto di sella e $(-1, -1)$ è un punto di massimo locale stretto.

Soluzione 4 La funzione r è di classe C^1 e

$$r_t(t, s) \times r_s(t, s) = (te^{-t}\cos s, te^{-t}\operatorname{sen} s, t).$$

Dato che $\|r_t(t, s) \times r_s(t, s)\| = t\sqrt{1 + e^{-2t}}$, ricaviamo a regolarità purchè $t \neq 0$. Per il flusso si tratta di calcolare

$$\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} F(t\cos s, t\operatorname{sen} s, e^{-t}) \cdot (te^{-t}\cos s, te^{-t}\operatorname{sen} s, t)dtds = \frac{2\pi}{e}(2e - 5).$$

Soluzione 5 Possiamo applicare direttamente il criterio del rapporto alla nostra serie di funzioni per ottenere che

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+3)!(2n+2)}\cdot\frac{(2n+1)!(2n)}{(-1)^n x^{2n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2x^2}{(2n+3)(2n+2)^2}\right| = 0, \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Troviamo quindi convergenza assoluta e puntuale per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per studiare le altre convergenze conviene ricondursi ad una serie di potenze in $y = x^2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n y^n}{(2n+1)!(2n)};$$

tale serie, per quanto visto sopra, ha raggio di convergenza $\varrho = +\infty$; la serie converge quindi uniformemente e totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato $[-r, r]$, $r > 0$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 29 marzo 2019

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) + 2e^t y(t) = e^t \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Data la curva

$$r(t) = (\operatorname{sen} t \cos t, \operatorname{sen}^2 t, \cos t), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

determinare la terna di Frenet ad essa associata e la curvatura in $t = \pi/4$.

Esercizio 3 [6 punti] Trovare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y, z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il seguente integrale doppio;

$$\int_E e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$$

dove E é il triangolo nel piano di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Esercizio 5 [6 punti] Scrivere la serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

di tale serie studiare le varie convergenze.
(SUGGERIMENTO: si sfrutti lo sviluppo di Taylor della funzione $\ln(1-x)$).

Soluzione 1 Siamo in presenza di una equazione lineare del primo ordine; usiamo quindi la formula risolutiva

$$y(t) = e^{A(t)}\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s) ds\right)$$

con

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) ds.$$

Troviamo quindi che la soluzione é data da

$$y(t) = \frac{1}{2}\Big(1 - \exp\Big(-2e^t\Big)\Big).$$

Soluzione 2 Se calcoliamo le derivate della curva e le valutiamo in $t = \pi/4$ troviamo che

$$r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(0, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \qquad r''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-2, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Per la curvatura possiamo quindi usare la formula

$$k_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\|r'(\pi/4) \times r''(\pi/4)\|}{\|r'(\pi/4)\|} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{13}{3}}.$$

Il versore normale é dato invece da

$$\hat{\tau}_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Per determinare la normale principale possiamo usare la decomposizione cinematica dell'accelerazione

$$\left(-2, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = r''\left(\frac{\pi}{4}\right) = a\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{\tau}_r\left(\frac{\pi}{4}\right) + k_r\left(\frac{\pi}{4}\right) v\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \hat{n}_r\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

da cui ricaviamo che

$$\hat{n}_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{39}}{39}(6, 1, \sqrt{2}).$$

Per la binormale invece abbiamo che

$$\hat{b}_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \hat{\tau}_r\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \hat{n}_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{13}}{13}(1, -2, -2\sqrt{2}).$$

Soluzione 3 Il gradiente della funzione é dato da

$$\nabla f(x, y, z) = (4yz - 4x^3, 4xz - 4y^3, 4xy - 4z^3).$$

La funzione ha cinque punti stazionari che sono dati da $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ e $(-1, -1, 1)$. Siccome la matrice Hessiana di f é data da

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} -12x^2 & 4z & 4y \\ 4z & -12y^2 & 4x \\ 4y & 4x & -12z^2 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo quindi classificare le matrici

$$Hf(0, 0, 0) = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Hf(1, 1, 1) = A_2 = \begin{pmatrix} -12 & 4 & 4 \\ 4 & -12 & 4 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix},$$

$$Hf(1.-1.-1) = A_3 = \begin{pmatrix} -12 & -4 & -4 \\ -4 & -12 & -4 \\ -4 & -4 & -12 \end{pmatrix},$$

$$Hf(-1,-1,1) = A_4 = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -4 \\ 4 & -12 & -4 \\ -4 & -4 & -12 \end{pmatrix},$$

$$Hf(-1,1,-1) = A_5 = \begin{pmatrix} -12 & -4 & 4 \\ -4 & -12 & -4 \\ 4 & -4 & -12 \end{pmatrix}.$$

Le matrici A_2, A_3, A_4 e A_5 sono definite negative in quanto i determinanti dei minori principali rispettano l'alternanza di segno. I punti $(1,1,1)$, $(1,-1-1)$, $(-1,-1,1)$ e $(-1,1,-1)$ sono quindi punti di massimo locale stretto. La matrice A_1 é invece la matrice nulla quindi il calcolo differenziale non ci fornisce informazioni. Possiamo notare peró che

$$f(x,x,x) = 4x^3 - 3x^4$$

e tale funzione é positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Anche $(0,0,0)$ é quindi un punto di sella.

Soluzione 4 Mediante il cambio di variabili

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$$

e ponendo

$$\tilde{E} = \{(u,v) : 0 \leq v \leq 1, -v \leq u \leq v\},$$

possiamo scrivere che

$$\int_E e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy = \frac{1}{2} \int_{\tilde{E}} e^{\frac{u}{v}} dudv = \frac{e^2 - 1}{4e}.$$

Soluzione 5 Siccome

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k},$$

possiamo ricavare che

$$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Tale serie converge puntualmente in $(-1,1)$, uniformemente e totalmente in $[-a,a]$ per ogni $0 \leq a < 1$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 3 giugno 2019

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -3\dfrac{y(t)}{t} - 2 \\ \\ y(1) = 4. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Dire se e in quali punti dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, z = x^2 + 2y^2 - 2\}$$

si applica il teorema della funzione implicita; si determini in caso una parametrizzazione di E e si calcoli piano ortogonale e retta tangente ad E in $(0, \sqrt{3}/\sqrt{2}, 1)$.

Esercizio 3 [6 punti] Trovare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{3x^2 + y^2 + z^2 + 4}{x + y}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = (xy, xz, y^2)$$

uscente dalla superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

orientata in modo che la normale abbia la terza componente positiva.

Esercizio 5 [6 punti] Scrivere, studiandone le varie convergenze, la serie di Fourier della funzione 2π–periodica dispari definita in $[0, \pi]$ da

$$f(x) = x(\pi - x);$$

calcolare quindi le somme delle serie numeriche

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}.$$

Soluzione 1 Effettuando la sostituzione $v(t) = y(t)/t$, si trova una equazione lineare del primo ordine a variabili separabili la cui soluzione è data $v(t) = {}^{9}/_{2t^4} - {}^{1}/_{2}$. La soluzione del problema originale è quindi data da

$$y(t) = \frac{9}{2t^3} - \frac{t}{2}.$$

Soluzione 2 La matrice Jacobiana della funzione vettoriale

$$f(x, y, z) = (x^2 + z^2, x^2 + 2y^2 - z)$$

è data da

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 2z \\ 2x & 4y & -1 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 2 tranne che nei punti della forma $(0, 0, z)$, $(0, y, 0)$ e $(x, 0, -1/2)$; nessuno di tali punti appartiene all'insieme E e quindi il teorema si applica intorno ad ogni punto di E che quindi è localmente una curva attorno ad ogni suo punto.

E può essere parametrizzato dalle due curve

$$r_1(t) = \left(\cos t, \sqrt{1 + \frac{\sin t}{2} - \frac{\cos^2 t}{2}}, \sin t\right), \qquad r_2(t) = \left(\cos t, -\sqrt{1 + \frac{\sin t}{2} - \frac{\cos^2 t}{2}}, \sin t\right),$$

$t \in [0, 2\pi]$. Infine, i vettori

$$(0, 0, 2) \qquad \left(0, 4\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$$

sono ortogonali ad E in $(0, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$. Quindi il piano ortogonale è parametrizzato da

$$\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) + t(0, 0, 2) + s\left(0, 4\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right).$$

Il vettore

$$(0, 0, 2) \times \left(0, 4\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) = \left(-8\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, 0\right) = -8\sqrt{\frac{3}{2}}(1, 0, 0)$$

è invece tangente. La retta tangente è quindi parametrizzata da

$$\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) + t(1, 0, 0).$$

Soluzione 3 La funzione data ha due punti stazionari in $(1/\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0)$ e$(-1/\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)$. In corrispondenza di tali punti le matrici Hessiane sono date da

$$Hf(1/\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0) = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

$$Hf(-1/\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Il primo punto è quindi un punto di minimo locale stretto, mentre il secondo è un punto di massimo locale stretto.

Soluzione 4 La superficie data è il grafico della funzione

$$g(x,y) = x^2 + y^2;$$

una parametrizzazione di Σ è quindi data da

$$r(u,v) = (u, v, u^2 + v^2), \qquad (u,v) \in \bar{B}_2(0,0).$$

Il flusso è quindi dato da

$$\begin{aligned}\Phi(F,\Sigma) &= \int_{\bar{B}_2(0,0)} F(u,v,g(u,v)) \cdot (-\nabla g(u,v), 1) du dv \\ &= \int_{\bar{B}_2(0,0)} (uv, u^3 + uv^2, v^2) \cdot (-2u, -2v, 1) du dv = 4\pi.\end{aligned}$$

Soluzione 5 Essendo la funzione dispari gli unici coefficienti sono dati da

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin(kx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ \dfrac{8}{\pi k^3} & \text{se } k \text{ dispari.} \end{cases}$$

La funzione, estesa dispari e 2π–periodica, è continua, quindi la serie, data da

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin((2k+1)x)$$

converge puntualmente e uniformemente su tutto $\mathbb{R}$; tale convergenza è in effetti totale. Valutando la precedente espressione in $x = \pi/2$ si trova che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Dalla formula di Parseval si ricava infine che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 20 giugno 2019

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = te^{-t}(y(t)-1)^2 \\ y(0) = 3, \end{cases}$$

specificando su quale intervallo è definita la soluzione trovata.

Esercizio 2 [6 punti] Dire se la funzione $r : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (t^2(1+t), t^2(1-t))$$

definisce una curva e se tale curva è regolare e chiusa. Si calcoli quindi la lunghezza della curva.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare, se esistono, massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$$

sull'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il seguente integrale triplo;

$$\int_E \frac{|y|e^{-z}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz,$$

con $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(kx)^k}{k!}.$$

(Sugg: nella risoluzione dell'esercizio può essere utile ricordare l'approssimazione di Stirling $k! \sim \sqrt{2\pi k}(k/e)^k$)

Soluzione 1 L'equazione è a variabili separabili; la soluzione stazionaria $y(t) = 1$ non risolve la condizione iniziale, quindi la soluzione va cercata fra le non stazionarie. Integrando troviamo quindi che

$$y(t) = \frac{2t + 2 + e^t}{2t + 2 - e^t}.$$

Studiando la funzione

$$g(t) = 2t + 2 - e^t,$$

ci si accorge che $g(0) = 1 > 0$,

$$\lim_{|t|\to\infty} g(t) = -\infty$$

e

$$g'(t) = 2 - e^t$$

che si annulla esclusivamente per $t = \ln 2$. Quindi g ha due zeri, uno negativo $t_1 < 0$ ed uno positivo $t_2 > 0$. La soluzione è quindi definita, se consideriamo $t \geq 0$, nell'intervallo $[0, t_2)$, che può essere estesa a (t_1, t_2).

Soluzione 2 La funzione r è sicuramente di classe C^1 e quindi stiamo sicuramente parametrizzando una curva; per studiare la regolarità scriviamo

$$\|r'(t)\| = |t|\sqrt{8 + 18t^2};$$

la curva è quindi regolare per $t \neq 0$; la curva è quindi regolare a tratti. La curva non è chiusa in quanto $r(-1) = (0, 2)$, mentre $r(1) = (2, 0)$

Per calcolare la lunghezza calcoliamo

$$\ell(r, [-1, 1]) = \int_{-1}^{1} \|r'(t)\|dt = 2\int_{0}^{1} t\sqrt{8 + 18t^2}dt = \frac{2\sqrt{2}}{27}(13\sqrt{13} - 8).$$

Soluzione 3 L'insieme E è chiuso ma non limitato, quindi non necessariamente esistono massimi e minimi. Si noti però che su E, se $|x| \to +\infty$, allora anche $|y| \to +\infty$ e quindi

$$\lim_{\substack{(x,y)\in E \\ \|(x,y)\|\to\infty}} xe^{-x^2-y^2} = 0.$$

Se troviamo quindi punti stazionari vincolati in cui la funzione è strettamente positiva, quelli sono candidati punti di massimo, mentre se la funzione è strettamente negativa siamo in presenza di candidati minimi. Determiniamo quindi i punti stazionari vincolati mediante moltiplicatori di Lagrange:

$$xe^{-x^2-y^2} - \lambda(x^2 - y^2 - 1).$$

Si trova che i punti stazionari vincolati sono $(1, 0)$ con $\lambda = 1/2e$ e $(-1, 0)$ con $\lambda = -1/2e$. Per confronto nei valori si trova che

$$\max_E f = \frac{1}{e}, \qquad \text{assunto in } (1, 0),$$

mentre

$$\min_E f = -\frac{1}{e}, \qquad \text{assunto in } (-1, 0).$$

Soluzione 4 La funzione è pari in y e il dominio è simmetrico rispetto al cambio di variabile $y \to -y$. Possiamo quindi scrivere

$$\int_E \frac{|y|e^-z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz = \int_F \frac{ye^-z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$$

con

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, y \geq 0\}.$$

Possiamo usare le coordinate cilindriche con le condizioni $\vartheta \in [0,\pi]$, $t \in [-R,R]$ e $\varrho \in [0,\sqrt{R^2-t^2}]$. Abbiamo quindi che

$$\int_E \frac{|y|e^{-z}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz = 2\int_0^\pi d\vartheta \int_{-R}^R dt \int_0^{\sqrt{R^2-t^2}} \varrho \operatorname{sen}\vartheta e^{-t} d\varrho = 8\Big(R\cosh(R) - \sinh(R)\Big).$$

Soluzione 5 Siamo in presenza di una serie di potenze con coefficienti

$$c_k = \frac{k^k}{k!}.$$

Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{c_{k+1}}{c_k} = e,$$

troviamo che il raggio di convergenza è $1/e$. Per $x = 1/e$ si trova la serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!e^k};$$

dato che dalla formula di Stirling si trova che

$$\frac{k^k}{k!e^k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}},$$

troviamo che tale serie non converge. Per $x = -1/e$ troviamo la serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^k}{k!e^k};$$

per la convergenza dobbiamo applicare il criterio di Leibniz. La formula di Stirling ci dice che il termine generale è infinitesimo ma dobbiamo verificare la monotonia. La condizione di monotonia è equivalente a richiedere che

$$e \geq \left(1+\frac{1}{k}\right)^k;$$

tale condizione è verificata per come è definito il numero di Nepero e.

In definitiva, abbiamo convergenza puntuale in $P = [-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$, assoluta in $A = (-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$, uniforme in $U = [-1/e, a)$ per ogni $0 \leq a < 1/e$, totale e uniforme assoluta in $T = UA = [-a,a]$ per ogni $0 \leq a < 1/e$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 15 luglio 2019

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{2y(t)^2}{1-t^2} \\ \\ y(0) = 3, \end{cases}$$

specificando su quale intervallo è definita la soluzione trovata.

Esercizio 2 [6 punti] Dire se la funzione $r : D \to \mathbb{R}^3$

$$r(t,s) = (t+3s, t(t+2s)), t+s)$$

con $D = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + s^2 \leq 4\}$ definisce una superficie regolare. Determinare quindi piano tangente e retta ortogonale alla superficie nel punto $(4,3,2)$.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare, se esistono, massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2) + x + 2y$$

sull'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Verificare la validità del Teorema della divergenza per il campo $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ sull'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}.$$

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2} + n - n^2|x| & \text{se } -1 \leq nx \leq 1 \\ \\ x^2 & \text{se } n|x| \geq 1. \end{cases}$$

Dire in particolare se vale l'identità

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

Soluzione 1 L'equazione è a variabili separabili ed integrando si arriva alla soluzione

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{3} - \ln \frac{1+t}{1-t}};$$

tale soluzione è definita in $(-1, 1 - {}^{2}/_{e^{1/3}-1})$.s

Soluzione 2 La parametrizzazione è di classe C^1; per vedere se è regolare vediamo se la Jacobiana ha rango due calcolando

$$r_t(t,s) \times r_s(t,s) = (1, 2t + 2s, 1) \times (3, 2t, 1) = (2s, 2, -4t - 6s).$$

Siccome tale vettore è non nullo, si deduce la regolartià della parametrizzazione. Tale parametrizzazione individua il punto $(4, 3, 2)$ per $(t, s) = (1, 1)$. Avremo quindi che il piano tangente è parametrizzato da

$$(4, 3, 2) + t(1, 4, 1) + s(3, 2, 1),$$

mentre la retta ortogonale da

$$(4, 3, 2) + t(2, 2, -10).$$

Soluzione 3 Il dominio su cui si richiede di cercare massimo e minimo non è compatto, quindi Weierstrass non si applica. In effetti in quanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = -\infty,$$

la funzione non è inferiormente limitata e quindi il minimo non esiste; ha senso quindi cercare solo il massimo di f.

Iniziamo col cercare i punti stazionari interni;

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} + 1, \frac{2y}{x^2 + y^2} + 2\right) = 0$$

in $(-2/5, -4/5)$ dove la funzione vale $\ln 4/5 - 2$.

Nei punti di bordo $x^2 + y^2 = 1$ possiamo considerare la la funzione

$$g(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t) = \cos t + 2\operatorname{sen} t$$

la cui derivata si annulla nei punti per cui $\cos^2 t = 1/5$. Troviamo quindi i due punti stazionari vincolati $(-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ e $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. In tali punti la funzione assume rispettivamente i valori $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$. Quindi il massimo di f è $\sqrt{5}$ assunto in $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

Soluzione 4 Dobbiamo verificare l'identitá

$$\int_E \operatorname{div} F(x, y, z) dxdydz = \int_{\partial E} F \cdot \nu_E d\Sigma.$$

Iniziamo col primo integrale;

$$\int_E \operatorname{div} F(x, y, z) dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (2x + 2y + 2z) dz = \frac{1}{4}.$$

Per l'integrale di bordo possiamo scrivere

$$\partial E = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4,$$

dove

$$\Sigma_1 = \{x = 0, y > 0, z > 0, y + z = 1\}, \qquad \Sigma_2 = \{y = 0, x > 0, z > 0, x + z = 1\},$$

$$\Sigma_3 = \{z = 0, x > 0, y > 0, x + y = 1\}, \qquad \Sigma_4 = \{x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z = 1\}.$$

Per motivi di simmetria

$$\int_{\Sigma_1} F\nu_\Sigma d\Sigma = \int_{\Sigma_2} F\nu_\Sigma d\Sigma = \int_{\Sigma_3} F\nu_\Sigma d\Sigma.$$

Calcoliamo quindi il primo integrale, tenendo conto che la normale Σ_1 è il grafico della funzione $x = 0$ con normale esterna $(-1, 0, 0)$;

$$\int_{\Sigma_1} F\nu_\Sigma d\Sigma == \int_{\{0<y<1,0<z<1-y\}} (0, y^2, z^2) \cdot (-1, 0, 0) dydz = 0.$$

Resta quindi da calcolare l'integrale su Σ_4 che è il grafico della funzione $z = 1 - x - y$ sul dominio $D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}$ e normale esterna data da $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Troviamo in definitiva che

$$\int_{\Sigma_4} F\nu_\Sigma d\Sigma = \int_{\{0<x<1,0<y<1-x\}} (x^2, y^2, (1 - x - y)^2) \cdot (1, 1, 1) dxdy = \frac{1}{4}.$$

Soluzione 5 Le f_n convergono puntualmente a x^2 in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mentre per $x = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = +\infty.$$

Studiamo la convergenza uniforme in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ calcolando

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\neq 0} |f_n(x) - x^2|.$$

Dato che le funzioni sono pari e che $f_n(x) = x^2$ per $|x| \geq 1/n$, abbiamo che

$$\sup_{x\neq 0} |f_n(x) - x^2| = \sup_{0<x\leq 1/n} \left(\frac{1}{n^2} + n - n^2 x\right) = \frac{1}{n^2} + n,$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\neq 0} |f_n(x) - x^2| = +\infty..$$

Non abbiamo quindi convergenza uniforme in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma si ha convergenza in $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ per ogni $a > 0$ perchè su tale insieme $f_n(x) = x^2$ se $n > 1/a$.

Non possiamo quindi usare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale; in tal caso con un calcolo diretto abbiamo che

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

mentre

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)dx &= \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n^2} + n - n^2 x\right) dx + \int_{1/n}^1 x^2 dx \\ &= \frac{2}{3n^3} + \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{5}{6} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 5 settembre 2019

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = t \operatorname{sen} t \\ \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Determinare una parametrizzazione del cerchio osculatore all'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 = 4\}$$

nel punto $(1, 1)$.

Esercizio 3 [6 punti] Trovare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y, z) = x - y - x^2 + y^3 - xy + x^2 y - z^2.$$

Esercizio 4 [6 punti] Dire se l'insieme illimitato

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2 e^{-|z|}\}$$

è misurabile ed in caso determinarne il volume.

Esercizio 5 [6 punti] Si scriva la serie di Fourier associata alla funzione 4–periodica pari definita in $[0, 2]$ da

$$f(x) = (x - 1)^2.$$

Determinare quindi le somme delle seguenti serie numeriche;

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2}, \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h^2}, \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^4}.$$

Soluzione 1 L'equazione data è un'equazione del secondo ordine lineare completa a coefficienti costanti; il polinomio caratteristico è dato da

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

le cui radici sono $-1+2i$ e $-1-2i$. La soluzione generale dell'equazione omogenea è quindi data da

$$y_0(t) = e^{-t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t)).$$

La soluzione particolare va cercata nella forma

$$y_p(t) = (at+b)\operatorname{sen} t + (ct+d)\cos t;$$

impnendo che tale funzioni soddisfi l'equazione data si trova che

$$y_p(t) = \left(\frac{t}{5} - \frac{7}{50}\right)\operatorname{sen} t + \left(\frac{1}{50} - \frac{t}{10}\right)\cos t.$$

La soluzione generale dell'equazione completa é quindi data da

$$y(t) = e^{-t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t)) + \left(\frac{t}{5} - \frac{7}{50}\right)\operatorname{sen} t + \left(\frac{1}{50} - \frac{t}{10}\right)\cos t.$$

Determiniamo le costanti c_1 e c_2 imponendo le condizioni iniziali e troviamo infine quindi che la soluzione del Problema di Cauchy è data da

$$y(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{20}\operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{50}\cos(2t)\right) + \left(\frac{t}{5} - \frac{7}{50}\right)\operatorname{sen} t + \left(\frac{1}{50} - \frac{t}{10}\right)\cos t.$$

Soluzione 2 L'insieme E ùn'ellisse di semiassi 2 e $2/\sqrt{3}$ e quindi può essere parametrizzato mediante

$$r(t) = \left(2\cos t, \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen} t\right), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Tale parametrizzazione passa per il punto $(1,1)$ se $t = \pi/3$. Dato che

$$r'(t) == \left(-2\operatorname{sen} t, \frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\right), \qquad r''(t) == \left(-2\cos t, -\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen} t\right)$$

troviamo che

$$r'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \hat{\tau}_r\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1), \qquad \hat{n}_r\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,-3),$$

mentre

$$k_r\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\|r'\left(\frac{\pi}{3}\right) \times r''\left(\frac{\pi}{3}\right)\|}{\|r'\left(\frac{\pi}{3}\right)\|^3} = \frac{6}{5\sqrt{10}}, \qquad \varrho_r\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{k_r\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{5\sqrt{10}}{6}.$$

Il cerchio osculatore è parametrizzato quindi da

$$\begin{aligned} c_r(t) =& (1,1) + \varrho_r\left(\frac{\pi}{3}\right)\hat{n}_r\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos t\, \varrho_r\left(\frac{\pi}{3}\right)\hat{\tau}_r\left(\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen} t\, \varrho_r\left(\frac{\pi}{3}\right)\hat{n}_r\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ =& \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{2}\cos t - \frac{5}{6}\operatorname{sen} t, -\frac{3}{2} + \frac{5}{6}\cos t - \frac{5}{2}\operatorname{sen} t\right). \end{aligned}$$

Soluzione 3 Il gradiente della funzione data è

$$\nabla f(x,y,z) = (1-2x-y+2xy, -1+3y^2-x+x^2, -2z) = ((1-y)(1-2x), -1+3y^2-x+x^2, -2z).$$

Tale gradiente si annulla nei punti $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}, 0)$ e $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}, 0)$. Le matrici Hessiane di f in tali punti sono date da

$$Hf(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}, 0) = \begin{pmatrix} -2+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$Hf(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}, 0) = \begin{pmatrix} -2-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

la prima matrice è indefinita, mentre la seconda è definita negativa. Quindi $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}, 0)$ è un punto di sella, mentre $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}, 0)$ è un punto di massimo locale stretto.

Soluzione 4 Possiamo certamente scrivere

$$E = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} E_h,$$

dove

$$E_h = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -h \le z \le h, (x,y) \in B_{ze^{-\frac{|z|}{2}}}(0,0)\right\}$$

sono insiemi limitati misurabili in quanto stratificati in direzione z con strati misurabili. Quindi E è misurabile e

$$\begin{aligned} |E| &= \lim_{h\to+\infty} |E_h| = \lim_{h\to+\infty} \int_{E_h} dxdydz = \lim_{h\to+\infty} \int_{-h}^{h} \left|B_{ze^{-\frac{|z|}{2}}}(0,0)\right| dz \\ &= \lim_{h\to+\infty} 2\pi \int_0^h z^2 e^{-z} dz = \lim_{h\to+\infty} 2\pi \left(-h^2e^{-h} - 2he^{-h} - 2e^{-h} + 2\right) = 4\pi. \end{aligned}$$

Soluzione 5 Se estendiamo la funzione data in modo che sia pari e 4–periodica troviamo una funzione continua e con derivata continua a tratti. L'estensione è quindi regolare a tratti e continua, quindi la serie di Fourier converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ all'estensione di f.

Calcoliamo ora i coefficienti di Fourier; dato che l'estensione di f è pari abbiamo che $b_k = 0$ per ogni $k \ge 1$. Inoltre per $k \ge 0$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{f}(x)\cos(k\omega x)dx = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \tilde{f}(x)\cos(k\omega x)dx.$$

Nel nostro caso abbiamo $T = 4$ e quindi $\omega = \frac{\pi}{2}$; troviamo quindiu che

$$a_0 = \int_0^2 (x-1)^2 dx = \frac{2}{3},$$

mentre per $k \ge 1$

$$a_k = \int_0^2 (x-1)^2 \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) dx = \frac{8}{k^2\pi^2}\left((-1)^k + 1\right) = \begin{cases} \dfrac{4}{h^2\pi^2} & \text{se } k = 2h \\ 0 & \text{se } k = 2h+1. \end{cases}$$

Troviamo quindi che

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \cos(h\pi x).$$

Valutando questa espressione in $x = 0$ troviamo che

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

mentre valutandola in $x = 1$ troviamo che

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h^2} = -\frac{\pi^2}{12},$$

Grazie alla formula di Parseval troviamo infine che

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 19 settembre 2019

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) = y(t)y'(t) \\ \\ y(0) = y'(0) = 1; \end{cases}$$

della soluzione trovata determinarne il dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Determinare piano tangente e retta ortogonale a

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

nel punto $(\sqrt{3}/2, -\sqrt{5}/2, -1)$.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y, z) = 4x + y - z$$

sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Verificare la validità del Teorema di Stokes con il campo $F(x, y, z) = (y, -z, 4x)$ e la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della successione di funzioni

$$f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Determinare quindi, motivando la risposta,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Soluzione 1 L'equazione data è del secondo ordine di tipo autonomo; riduciamo il problema a due problemi del primo ordine ponendo $y'(t) = v(y)$. L'equazione diventa quindi

$$v(y)v'(y) + v(y) = yv(y);$$

tale equazione ha sicuramente $v(y) \equiv 0$ come soluzione; tale funzione non soddisfa peró la condizione iniziale $v(y(0)) = v(1) = y'(0) = 1$. Dividiamo quindi per $v(y)$ ed otteniamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'(y) + 1 = y \\ \\ v(1) = 1. \end{cases}$$

Integrando tale equazione troviamo la soluzione

$$v(y) = \frac{y^2}{2} - y + \frac{3}{2} = \frac{y^2 - 2y + 3}{2}.$$

Siamo ora ricondotti a risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \left(\frac{y(t)-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separabili che ha come soluzione

$$y(t) = 1 + \sqrt{2} \tan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right);$$

la soluzione, visto che il dato iniziale è assegnato in $t_0 = 0$, è definita nell'intervallo $(-\pi/\sqrt{2}, \pi/\sqrt{2})$.

Soluzione 2 La superficie data è definita in modo implicito mediante la funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2;$$

il piano tangente sarà quindi definito da

$$\nabla f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}, -1\right) \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}, y + \frac{\sqrt{5}}{2}, z + 1\right) = 0.$$

Dato che $\nabla f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}, -1\right) = (\sqrt{3}, -\sqrt{5}, 2)$, troviamo che il piano tangente è determinato dall'equazione

$$x\sqrt{3} - y\sqrt{5} + 2z = 2.$$

La retta ortogonale è invece parametrizzata da

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}, -1\right) + t(\sqrt{3}, -\sqrt{5}, 2);$$

tale retta in forma Cartesiana diventa

$$\begin{cases} 2x - z\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\ \\ 2y + z\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 0. \end{cases}$$

Soluzione 3 Iniziamo col notare che

$$\nabla f(x, y, z) = (4, 1, -1) \neq 0;$$

f non ha quindi punti stazionari liberi e di conseguenza il massimo e il minimo vanno cercati sulla frontiera di E.

La frontiera di E è composta da tre parti; la prima è determinata dalle condizioni $x^2+y^2-z^2 = 1$ con $x^2 + y^2 + z^2 < 9$; tenendo conto della prima equazione, la seconda condizione diventa $|z| < 2$. Possiamo usare la teoria dei moltiplicatori di Lagrange introducendo la funzione

$$4x + y - z - \lambda(x^2 + y^2 - z^2 - 1);$$

tale funzione ha due punti stazionari; $(1, 1/4, 1/4)$ con $\lambda = 2$ e $(-1, -1/4, -1/4)$ con $\lambda = -2$. Visto che di entrambi i punti la terza coordinata è tale che $|z| = 1/4 < 2$, questi due punti stazionari diventano candidati massimo e minimo con

$$f\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = 4, \qquad f\left(-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) = -4.$$

Una seconda parte della frontiera di E è determinata dalle condizioni $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con $x^2 + y^2 - z^2 < 1$; la seconda condizione grazie alla prima equazione diventa $|z| > 2$. Introduciamo anche in questo caso la funzione Lagrangiana

$$4x + y - z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9);$$

tale funzione ha due punti stazionari in $(2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ con $\lambda = \sqrt{2}/2$ e in $(-2\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ con $\lambda = -\sqrt{2}/2$. La terza coodinata di questi due punti è tale che $|z| = \sqrt{2}/2 < 1$ che non soddisfa la condizione $|z| > 2$. Tali punti non sono quindi candidati massimo o minimo perchè non appartengono alla frontiera di E.

Resta da considerare la parte di frontiera di E determinata dalle condizioni $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; tali condizioni determinano le due circonferenze con $x^2 + y^2 = 5$ e $z = \pm 2$. Possiamo quindi considerare le due parametrizzazioni

$$r_1(t) = (\sqrt{5}\cos t, \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\, t, 2), \qquad r_2(t) = (\sqrt{5}\cos t, \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\, t, -2), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Introdiciamo quindi le due funzioni

$$g_1(t) = f(r_1(t)) = 4\sqrt{5}\cos t + \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\, t - 2, \qquad g_2(t) = f(r_2(t)) = 4\sqrt{5}\cos t + \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\, t + 2;$$

derivando troviamo che la condizione

$$g_1'(t) = g_2'(t) = -4\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\, t + \sqrt{5}\cos t = 0$$

determina quattro punti stazionari vincolati in

$$\left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{17}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}}, 2\right), \left(-\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{17}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}}, 2\right), \left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{17}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}}, -2\right), \left(-\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{17}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}}, -2\right).$$

In tali punti la funzione assume i valori

$$f\left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{17}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}}, 2\right) = \sqrt{85} - 2, \qquad f\left(-\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{17}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}}, 2\right) = -\sqrt{85} - 2,$$

e

$$f\left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{17}},\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}},-2\right)=\sqrt{85}+2,\qquad f\left(-\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{17}},-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}},-2\right)=-\sqrt{85}+2.$$

Dato che $\sqrt{85}+2>11>4$, possiamo concludere che

$$\max_E f=\sqrt{85}+2\qquad \text{assunto in } \left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{17}},\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}},-2\right),$$

mentre

$$\min_E f=-\sqrt{85}-2\qquad \text{assunto in } \left(-\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{17}},-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}},2\right).$$

Soluzione 4 Dobbiamo verificare la formula

$$\int_\Sigma \text{rot}F\cdot\hat{n}_\Sigma d\Sigma=\oint_{\partial^+\Sigma}F\cdot d\vec{r}.$$

La superficie Σ, essendo una superficie di rotazione, può essere parametrizzata mediante

$$r(t,s)=(\sqrt{1+t^2}\cos s,\sqrt{1+t^2}\,\text{sen}\, s,t),\qquad t\in[0,2],s\in[0,2\pi].$$

Con questa parametrizzazione abbiamo che

$$r_t(t,s)\times r_s(t,s)=(-\sqrt{1+t^2}\cos s,-\sqrt{1+t^2}\,\text{sen}\, s,t),$$

$$\hat{n}_\Sigma(t,s)=\frac{1}{\sqrt{1+2t^2}}(-\sqrt{1+t^2}\cos s,-\sqrt{1+t^2}\,\text{sen}\, s,t).$$

Dato che $\text{rot}F(x,y,z)=(1,-4,-1)$, troviamo che

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \text{rot}F\cdot\hat{n}_\Sigma d\Sigma&=\int_0^2 dt\int_0^{2\pi}(1,-4,-1)\cdot(-\sqrt{1+t^2}\cos s,-\sqrt{1+t^2}\,\text{sen}\, s,t)ds\\&=-2\pi\int_0^2 tdt=-4\pi.\end{aligned}$$

Il bordo di Σ è costituito dalle due circonferenze $x^2+y^2=1$ con $z=0$ e $x^2+y^6=5$ con $z=2$; per parametrizzare tali circonferenze tenendo conto che l'orientazione di tale parametrizzazioni sia quella indotta dall'orientazione di Σ determinata da $\hat{n}_\Sigma$ possiamo considerare le due parametrizzazioni

$$r_1(t)=(\cos t,-\text{sen}\, t,0),\qquad r_2(t)=(\sqrt{5}\cos t,\sqrt{5}\ \text{sen}\, t,2),\qquad t\in[0,2\pi].$$

Troviamo quindi che

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+\Sigma}F\dot{d\vec{r}}=&\int_0^{2\pi}(-\text{sen}\, t,0,4\cos t)\cdot(-\text{sen}\, t,-\cos t,0)dt+\\&+\int_0^{2\pi}(\sqrt{5}\ \text{sen}\, t,-2,4\sqrt{5}\cos t)\cdot(-\sqrt{5}\ \text{sen}\, t,\sqrt{5}\cos t,0)dt\\=&\int_0^{2\pi}(\text{sen}^2 t-5\,\text{sen}^2 t-2\sqrt{5}\cos t)dt=-4\int_0^{2\pi}\text{sen}^2 tdt=-4\pi.\end{aligned}$$

Soluzione 5 Per quanto riguarda il limite puntuale si ha che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 x e^{-n^2 x^2} = 0.$$

Per quanto riguarda la convergenza uniforme dobbiamo calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \lim_{n \to +\infty} \sup_{x \geq 0} f_n(x),$$

dove l'ultima uguaglianza tiene conto del fatto che f_n è dispari e positiva per $x > 0$. Dato che $f_n(0) = 0$, $f_n(x) \to 0$ per $x \to +\infty$ e che f_n ammette massimo per $x > 0$ nel punto $x = \frac{1}{n\sqrt{2}}$ con $f_n(\frac{1}{n\sqrt{2}}) = \frac{n}{\sqrt{2e}}$, troviamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = +\infty.$$

Non si ha quindi convergenza uniforme su $\mathbb{R}$; se ci restringiamo però agli intervalli $[a, +\infty)$ con $a > 0$, dato che, se $\frac{1}{n\sqrt{2}} \leq a$

$$\sup_{x \geq a} f_n(x) = f_n(a) = n^2 a e^{-n^2 a^2},$$

se ne deduce che

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \geq a} |f_n(x)| = 0,$$

da cui la convergenza uniforme su $[a, +\infty)$. Per quanto riguarda l'ultimo integrale, dato che in $[0, 1]$ non si ha convergenza uniforme, non possiamo usare il Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale. In effetti in questo caso si ha che

$$\int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n(x) dx = 0,$$

mentre

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-n^2}) = \frac{1}{2}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 20 dicembre 2019

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = (1 + y(t)^2)\cos t \\ \\ y(0) = 0; \end{cases}$$

della soluzione trovata determinarne il dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Dire se la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{xy}$$

è convessa o concava sul suo dominio; determinare quindi tangente e ortogonale al grafico della funzione nel punto $(1, 1, 1)$.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$$

sull'insieme $E = \{(x, y) : 2x^2 + y^2 = 6\}$.

Esercizio 4 [6 punti] Dire se l'insieme illimitato

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, -\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \right\}$$

è misurabile e stabilire se la funzione $f(x, y) = y^3$ è assolutamente integrabile in senso generalizzato su E.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{n}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Determinare quindi, motivando la risposta,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-1}^{2} f_n(x) dx.$$

Soluzione 1 L'equazione è a variabili separabili che integrata ha soluzione in forma implicita

$$\arctan y(t) = \sin t;$$

questa soluzione è definita per ogni t perchè $\sin t \in [-1, 1] \subset (-\pi/2, \pi/2)$ per ogni t. La soluzione in forma esplicita è quindi data da

$$y(t) = \tan \sin t.$$

Soluzione 2 Per studiare convessità o concavità notiamo anzitutto che il dominio di f è determinato dalla condizione $xy \geq 0$; siamo quindi nel piano nel primo e terzo quadrante. Questo dominio non è convesso ma unione di due convessi; quindi ha senso determinare convessità o concavità separatamente nel primo e nel terzo quadrante. La funzione è di classe C^∞ nell'insieme $xy > 0$ e quindi in tale insieme ci calcoiiamo la matrice Hessiana. Otteniamo che

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{2\sqrt{xy}}, \frac{x}{2\sqrt{xy}} \right), \qquad Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{y^2}{4\sqrt{x^3y^3}} & \dfrac{1}{4\sqrt{xy}} \\ \dfrac{1}{4\sqrt{xy}} & -\dfrac{x^2}{4\sqrt{x^3y^3}} \end{pmatrix}.$$

Siccome

$$\mathrm{tr} Hf(x, y) = -\frac{x^2 + y^2}{4\sqrt{x^3y^3}} \leq 0$$

e

$$\det Hf(x, y) = 0,$$

se ne deduce che $Hf(x, y)$ è ovunque semi–definita negativa e quindi f è concava.

Per il grafico di f, si nota che il vettore

$$v = (-\nabla f(1, 1), 1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)$$

è ortogonale, pertanto

$$N_{(1,1,1)}\Gamma(f) = \langle (-1, -1, 2) \rangle,$$

mentre la retta ortogonale è data da

$$(1, 1, 1) + N_{(1,1,1)}\Gamma(f) = (1, 1, 1) + \langle (-1, -1, 2) \rangle,$$

mentre

$$T_{(1,1,1)}\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2z\}$$

e il piano tangente è dato da

$$(1, 1, 1) + T_{(1,1,1)}\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2z\}$$

Soluzione 3 Possiamo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (E non ha parte interna e quindi non ha senso cercare i punti stazionari liberi);

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 3x^2 + 2xy + y^2 - \lambda(2x^2 + y^2 - 6).$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 6x + 2y - 4\lambda x = 0 \\ \\ 2x + 2y - 2\lambda y = 0 \\ \\ 2x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$

Se ricaviamo $y = 2\lambda x - 3x$ dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda troviamo che

$$x(2\lambda^2 - 5\lambda + 2) = 0.$$

Nel caso $x = 0$, la prima equazione diventa $y = 0$, ma allora non viene soddisfatta la terza equazione. Necessariamente si deve quindi avere

$$2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0;$$

abbiamo due soluzioni per tale equazione, $\lambda = 2$ e $\lambda = 1/2$. Se $\lambda = 2$, dalla prima equazione ricaviamo che $y = x$ e quindi la terza equazione diventa $x^2 = 2$; abbiamo quindi trovato i due punti stazionari vincolati $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ con $\lambda = 2$. Nel caso $\lambda = 1/2$, la prima equazione diventa $y = -2x$ e quindi la terza diventa $x^2 = 1$; troviamo quindi altri due punti stazionari vincolati $(\pm 1, \mp 2)$ con $\lambda = 1/2$. Dato che

$$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 12, \qquad f(-1, 2) = f(1, -2) = 0,$$

possiamo concludere che

$$\min_E f = 0, \qquad \text{assunto in } (\pm 1, \mp 2),$$

mentre

$$\max_E f = 12, \qquad \text{assunto in } (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}).$$

Soluzione 4 Come insiemi invadenti consuideriamo gli insiemi semplice e quindi misurabili

$$E_h = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq h, \frac{-1}{x} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \right\};$$

Siccome

$$\int_{E_h} |f(x, y)| dxdy \frac{1}{4} \int_1^h \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4h} - \frac{1}{12h^3} \leq \frac{1}{3},$$

se ne deduce che f è assolutamente integrabile in senso generalizzato. Il suo integrale su E è quindi dato da

$$\int_E y^3 dxdy = \lim_{h\to+\infty} \int_{E_h} y^3 dxdy = \lim_{h\to+\infty} \frac{1}{4} \int_1^h \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) dx = \frac{1}{6}.$$

Soluzione 5 Per quanto riguarda il limite puntuale si ha che per $x = 0$ il limite è 0, per $x > 0$ siccome $n/x \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2},$$

mentre per $x < 0$ siccome $n/x \to -\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = -\frac{\pi}{2},$$

Per quanto riguarda la convergenza uniforme possiamo sfruttare il fatto che la funzione è dispari e l'identità, valida per $t > 0$

$$\arctan t = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{t},$$

per ottenere che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,+\infty)} \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{n}{x} = \sup_{x\in(0,+\infty)} \arctan \frac{x}{n} = \frac{\pi}{2},$$

e quindi non c'è convergenza uniforme su $\mathbb{R}$. Possiamo però considerare $a > 0$ e calcolare

$$\sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[-a,a]} \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{n}{x} = \arctan\frac{a}{n}.$$

Siccome questa quantità tende a 0 per $n \to \infty$ si ottiene la convergenza uniforme su $[-a, a]$. Per il caclolo dell'integrale, sfruttando la disparità delle f_n, si ottiene che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{2} f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{1}^{2} f_n(x)dx = \frac{\pi}{2}$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttata la convergenza uniforme a $\pi/2$ su $[1, 2]$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 16 gennaio 2020

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 2e^t \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1; \end{cases}$$

della soluzione trovata determinarne il dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Data la funzione

$$f(x, y, z) = (xye^{x+y}, x + y - z),$$

dire se localmente attorno ad ogni suo punto l'insieme $E_{(-1,0)}(f)$ è una curva regolare. Determinare in particolare la circonferenza osculatrice a tale insieme nel punto $(1, -1, 0)$.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = xye^{x+y}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Verificare il Teorema di Stokes per la funzione

$$F(x, y, z) = (-y, x, z)$$

con superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 4\right\}$$

orientata in modo che la normale abbia la terza componente positiva.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della serie

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k(k-1)};$$

Determinare quindi, motivando la risposta, la forma analitica della funzione f.

Soluzione 1 L'equazione è del secondo ordine lineare a coefficienti costanti completa; la soluzione dell'omogenea, dato che il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2,$$

è data da

$$y_0(t) = e^t(c_1 + c_2 t).$$

La soluzione particolare, usando il metodo per somiglianza, va cercata nella forma

$$y_p(t) = At^2 e^t;$$

imponendo che tale funzione risolva l'equazione differenziale, si trova $A = 1$. La soluzione completa è quindi data da

$$y(t) = e^t(c_1 + c_2 t + t^2);$$

imponendo le condizioni iniziali si trova che $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$, e quindi la soluzione è data da

$$y(t) = e^t(t + t^2)$$

che è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione 2 La matrice Jacobiana della funzione data è

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{x+y}(xy + y) & e^{x+y}(xy + x) & 0 \\ & & \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 2 eccetto che nei punti della forma $(0, 0, z)$ e $(-1, -1, z)$, $z \in \mathbb{R}$; nessuno di tali punti appartiene a $E_{(-1,1,0)}(f)$, quindi tale insieme è localmente attorno ad ogni suo punto una curva regolare. In particolare lo è attorno al punto $(1, -1, 0)$.

Per determinare la circonferenza osculatrice, notiamo anzitutto che la matrice Jacobiana in $(1, -1, 0)$ è data da

$$Jf(1, -1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ & & \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

dato che

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0,$$

possiamo dire che localmente attorno a $(1, -1, 0)$ si può scrivere

$$(x, y) = g(z) = (g_1(z), g_2(z)),$$

cioè il livello può essere parametrizzato mediante

$$r(z) = (g_1(z), g_2(z), z).$$

Si ha che $g(0) = (1, -1)$ e $r(0) = (1, -1, 0)$. La circonferenza osculatrice è la circonferenza contenuta nel piano $\langle \hat{\tau}_r(0), \hat{n}_r(0) \rangle$ il cui centro è dato da

$$c_r(0) = r(0) + \varrho_r(0)\hat{n}_r(0)$$

e il cui raggio è $\varrho_r(0)$, con $\varrho_r(0) = 1/k_r(0)$ raggio di curvatura, $k_r(0)$ curvatura e $\hat{n}_r(0)$ normale principale. Curvatura e normale si possono ricavare dalla decomposizione cinematica dell'accelerazione

$$r''(0) = a(0)\hat{\tau}_r(0) + v(0)^2 k_r(0)\hat{n}_r(0).$$

Ricaviamo le derivate di r dal sistema

$$\begin{cases} g_1(z)g_2(z)e^{g_1(z)+g_2(z)} = -1 \\ g_1(z)+g_2(z)-z=0. \end{cases}$$

Facendo le derivate derivate seconde e tenendo conto che $g_1(0) = 1$ $g_2(0) = -1$ si trova che

$$(g_1'(0), g_2'(0)) = (0,1), \qquad (g_1''(0), g_2''(0)) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Quindi

$$r'(0) = (g_1'(0), g_2'(0), 1) = (0,1,1), \qquad v(0) = \|r'(0)\| = \sqrt{2},$$

mentre

$$r''(0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right).$$

Infine tenendo presente che

$$a(0) = v'(0) = \frac{1}{v(0)} r'(0) \cdot r''(0) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

e che la curvatura è data da

$$k_r(0) = \frac{\|r'(0) \times r''(0)\|}{\|r'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{6}}{8}$$

troviamo che

$$v(0)^2 k_r(0)\hat{n}_r(0) = 2k_r(0)\hat{n}_r(0) = r''(0) - a(0)\hat{\tau}_r(0) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$\hat{n}_r(0) = \frac{2\sqrt{6}}{3}\left(r''(0) - a(0)\hat{\tau}_r(0)\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1).$$

Il centro della circonferenza osculatrice è quindi dato da

$$c_r(0) = (1,-1,0) + \frac{4}{3}(2,-1,1) = \frac{1}{3}(11,-7,4)$$

e raggio

$$\varrho_r(0) = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

Tale circonferenza è quindi parametrizzata da

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}(11,-7,4) + \frac{4\sqrt{6}}{3}\left(\cos t\, \hat{\tau}_r(0) + \sin t\, \hat{n}_r(0)\right) \\ &= \left(\frac{11}{3} + \frac{8}{3}\sin t, -\frac{7}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos t - \frac{4}{3}\sin t, \frac{4}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos t + \frac{2}{3}\sin t\right). \end{aligned}$$

Soluzione 3 Dato che

$$\nabla f(x,y) = e^{x+y}(xy+y, xy+x),$$

troviamo che f ha due punti stazionari in $(0,0)$ e $(-1,-1)$. In tali punti la matrice Hessiana è data da

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Hf(-1,-1) = e^{-2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

quindi $(0,0)$ è un punto di sella, mentre $(-1,-1)$ è un punto di massimo locale stretto.

Soluzione 4 La superficie Σ è parametrizzata da

$$r(t,s) = (t, s, t^2 + s^2);$$

con tale parametrizzazione si ha che

$$r_t(t,s) \times r_s(t,s) = (-2t, -2s, 1)$$

la cui terza componente è positiva, e quindi l'orientazione data da

$$\hat{n}_\Sigma(t,s) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+4s^2}}(-2t, -2s, 1)$$

è quella richiesta. Il rotore di F è dato da

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = (0,0,2),$$

e quindi il suo flusso attraverso Σ è dato da

$$\Phi(\mathrm{rot}F, \Sigma) = \int_{B_2 \setminus B_1} (0,0,2) \cdot (-2t, -2s, 1) dtds = 2\mathrm{Area}(B_2 \setminus B_1) = 6\pi.$$

Calcoliamo le circuitazioni di F lungo il bordo di Σ; per rispettare l'orientazione indotta da Σ, il bordo è composto da due curve parametrizzate da $r, \tilde{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t) = (-\cos t, \sin t, 1), \qquad \tilde{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4).$$

Avremo quindi che

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+\Sigma} F \cdot d\vec{r} = &\int_0^{2\pi} \Big((-\sin t, -\cos t, 1) \cdot (\sin t, \cos t, 0) + \\ &+ (-2\sin t, 2\cos t, 4) \cdot (-2\sin t, 2\cos t, 0)\Big) dt \\ =&6\pi.\end{aligned}$$

Soluzione 5 La serie data è una serie di potenze con raggio di convergenza 1; per $x = \pm 1$ si ottiene una serie convergente, pertanto si ha conergenza in $[-1, 1]$. In tale intervallo la convergenza è totale e quindi anche uniforme e assoluta uniforme.

Per determinare l'espressione analitica di f si nota che

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} x^{k-2} = \frac{1}{1-x}.$$

Intgrando, cosa lecita per $x \in (-1, 1)$, si ottiene che

$$f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x. \tag{2}$$

L'espressione precedente è stata ottenuta per $x \in (-1, 1)$; la funzione a destra può essere estesa anche per $x = 1$ e definisce una funzione continua in particolare in $[-1, 1]$. La convergenza uniforme della serie in $[-1, 1]$ ha come conseguenza anche il fatto che f è continua in $[-1, 1]$, e quindi l'espressione (2) è valida per ogni $x \in [-1, 1]$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 13 febbraio 2020

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere, al variare del parametro $n \in \mathbb{N}$, il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = ny(t)(1-y(t)), \\ \\ y(0) = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

tracciare quindi un grafico qualitativo, specificandone il dominio, delle soluzioni $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ e studiare le varie convergenze di tale successione.

Esercizio 2 [6 punti] Dire se l'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z=0, x+y+z=1\}$$

è localmente una curva attorno ad ogni suo punto. Determinare quindi una parametrizzazione di E e trovare i punti in cui la curvatura assume massimo e minimo.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = (y^2-x^4)(x^2-y^4).$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il volume dei solidi ottenuti ruotando l'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, (y^2-x^4)(x^2-y^4) \geq 0\}$$

sia attorno all'asse x, che attorno all'asse y.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della serie di Fourier associata alla funzione 4–periodica dispari definita in $[0,2]$ da $f(x) = (x-1)^2$. Infine, tenendo presente che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4},$$

calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

Soluzione 1 L'equazione data è a variabili separabili; le soluzioni stazionarie sono $y(t) \equiv 0$ e $y(t) \equiv 1$ che però non soddisfano la condizione iniziale. Cerchiamo quindi le soluzioni tra le soluzioni non stazionarie

$$n = \frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))} = \left(\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{1-y(t)}\right) y'(t).$$

Integrando e tenendo conto della condizione iniziale si trova quindi che

$$u_n(t) = \frac{e^{nt}}{1+e^{nt}} = \frac{1}{1+e^{-nt}}.$$

Tali funzioni sono definite in tutto $\mathbb{R}$ e convergono puntualmente alla funzone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } t = 0, \\ \\ 1 & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Essendo f discontnua in $t = 0$, la convergenza non può essere uniforme su tutto $\mathbb{R}$. Studiamo la convergenza uniforme in $[a, +\infty)$ con $a > 0$;

$$\sup_{x \geq a} |u_n(t) - f(t)| = \sup_{x \geq 1} \frac{1}{1+e^{nt}} = \frac{1}{1+e^{na}},$$

e quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \geq a} |u_n(t) - f(t)| = 0,$$

cioè la conveegenza uniforma in $[a, +\infty)$. Analogamente si dimostra la convergenza uniforme in $(-\infty, -a]$, $a > 0$.

Soluzione 2 Si noti che posto $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z, x + y + z)$, siccome

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

il rango di tale matrice non è 2 solo per $(x, y) = (-1/2, -1/2)$. Dato che nessuno dei punti $(-1/2, -1/2, z)$ appartiene ad E, se ne deduce che E è una curva localmente attorno ad ogni suo punto. Per parametrizzare E, ricavando dalla seconda equazione $z = 1 - x - y$ e sostituiendo nella prima si trova che

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

Una parametrizzazione di E è quindi data da $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$r(t) = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \cos t, -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \sin t, 2 - \sqrt{\frac{3}{2}} \cos t - \sqrt{\frac{3}{2}} \sin t\right);$$

con tale parametrizzazione possiamo calcolare la curvatura mediante

$$k_r(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{1}{2(1 - \sin(2t))^{\frac{3}{2}}}.$$

Tale curvatura assume il valore massimo $\sqrt{2}$ per $t = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$, in corrispondenza dei punti

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, 2-\sqrt{3}\right), \qquad \left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}, 2+\sqrt{3}\right),$$

mentre assume il valore minimo $\frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{3}}$ per $t = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$, in corrispondenza dei punti

$$\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, 2\right), \qquad \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}, 2\right).$$

Soluzione 3 Il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x,y) = (2x(y^2 + 2x^2y^4 - 3x^4), 2y(x^2 + 2x^4y^2 - 3y^4))$$

che si annulla nei punti

$$(0,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1),$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Dato che

$$\det Hf(1,1) = \det Hf(-1,-1) = \det \begin{pmatrix} -6 & 20 \\ 20 & -6 \end{pmatrix} < 0,$$

così come

$$\det Hf(1,-1) = \det Hf(-1,1) = \det \begin{pmatrix} -6 & -20 \\ -20 & -6 \end{pmatrix} < 0,$$

troviamo che $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$ sono punti di sella. Invece

$$\det Hf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \det Hf\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \det \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 4 \\ 4 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} > 0$$

e

$$\operatorname{tr} Hf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{tr} Hf\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 4 \\ 4 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} < 0,$$

così come

$$\det Hf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \det Hf\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \det \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -4 \\ -4 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} > 0$$

e

$$\operatorname{tr} Hf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{tr} Hf\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -4 \\ -4 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} < 0,$$

troviamo che $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti di massimo locale stretto. Infine

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

tale matrice è solo semidefinita, quindi il calcolo differenziale non ci può dare informazioni. Notiamo però che $f(0,0) = 0$; studiamo quindi il segno di f. Anzitutto

$$f(x,0) = -x^6 < 0 \qquad \text{se } x \neq 0$$

e per $m \neq 0$

$$f(x,mx) = x^4(m^2 - x^2)(1 - m^2x^2) > 0 \qquad \text{se } 0 < |x| < \min\left\{|m|, \frac{1}{|m|}\right\}.$$

Dato vicino al punto $(0,0)$ f assume sia valori positivi che negativi, se ne deduce che $(0,0)$ è un punto di sella.

Soluzione 4 Notiamo anzitutto che

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\},$$

e quindi il volume del solido E_x ottenuto ruotando E attorno all'asse x è dato da

$$\mathrm{Vol}(E_x) = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3\pi}{10}.$$

Per quanto riguarda il solido E_y ottenuto ruotando E attorno all'asse y avremo invece che

$$\mathrm{Vol}(E_y) = 2\pi \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{3\pi}{10}.$$

Soluzione 5 La funzione è dispari quindi $a_k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Abbiamo $T = 4$ e $\omega = \frac{\pi}{2}$. Quindi

$$b_k = \int_0^2 (x-1)^2 \sin\left(\frac{k\pi}{2} x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2h, \\ \dfrac{4}{\pi(2h+1)} - \dfrac{32}{\pi^3(2h+1)^3} & \text{se } k = 2h+1. \end{cases}$$

Vale quindi l'identità

$$\tilde{f}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(2h+1)} - \frac{32}{\pi^3(2h+1)^3} \right) \sin\left(\frac{(2h+1)\pi}{2} x \right);$$

dato che f è continua a tratti con discontinuità in $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, f' è continua a tratti con discontinuità in $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, ne deduciamo che la serie di Fourier converge puntualmente alla regolarizzata di f su tutto $\mathbb{R}$, con regolarizzata che coincide con f in $\mathbb{R} \setminus 2\mathbb{Z}$ mentre per $x \in 2\mathbb{Z}$ $\tilde{f}(x) = 1$. La convergenza è uniforma negli iintervalli $[a, b] \subset (0, 2)$ e sue repliche 2–periodiche. Valutando la serie di Fourier in $x = 1$ troviamo l'identità

$$0 = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^h}{\pi(2h+1)} - \frac{32(-1)^h}{\pi^3(2h+1)^3} \right),$$

da cui il fatto che

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{\pi^3(2h+1)^3} = \frac{\pi^2}{8} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)} = \frac{\pi^3}{32}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 29 aprile 2020

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente equazione differenziale

$$y'''(t) - \alpha y'(t) = t.$$

In particolare, si risolva il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'''(t) - y'(t) = t, \\ \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Studiare la regolarità della curva definita in coordinate polari da

$$\varrho(\vartheta) = |\sin(3\vartheta)|, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Di tale curva determinare i punti che hanno massima distanza dall'origine; determinare quindi la circonferenza osculatrice alla curva nel punto $(\sqrt{3}/2, 1/2)$.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare i punti di massima e minima distanza dall'origine dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2 \leq 4, (x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2 \leq 4\}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il volume del solido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2 \leq 4, (x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2 \leq 4\}.$$

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della successione di funzioni

$$f_n(x) = e^{-(nx-1)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare, motivando con precisione i vari passaggi, che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0.$$

Soluzione 1 L'equazione data è una equazione del terzo ordine a coefficienti costanti completa; per risolvere l'omogenea si considera il polinomi caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \alpha\lambda.$$

Le sue radici sono date dalle soluzioni dell'equazione

$$\lambda^3 - \alpha\lambda = 0.$$

Si distinguono tre casi:

1. $\alpha = 0$; in tal caso $\lambda = 0$ è una radice con molteplicità 3 e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2;$$

2. $\alpha > 0$; in tal caso abbiamo tre radici distinte reali, $\lambda = 0$, $\lambda = \pm\sqrt{\alpha}$ tutte con molteplicità 1 e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(t) = c_1 + c_2 e^{t\sqrt{\alpha}} + c_3 e^{-t\sqrt{\alpha}};$$

3. $\alpha < 0$; in tal caso oltre alla radice reale $\lambda = 0$ abbiamo le due radici complesse immaginarie pure $\lambda = \pm i\sqrt{|\alpha|}$, tutte radici con molteplicità 1 e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(t) = c_1 + c_2 \cos(t\sqrt{|\alpha|}) + c_3 \sin(t\sqrt{|\alpha|}).$$

Per la soluzione particolare, si distingue il caso $\alpha = 0$ dal caso $\alpha \neq 0$ in quanto la radice $\lambda = 0$ passa da molteplicità 3 a molteplicità 1. Nel caso 1. quindi, con $\alpha = 0$, la soluzione particolare va cercata nella forma

$$y_p(t) = at^4 + bt^3,$$

mentre nel caso 2. e 3. va cercata nella forma

$$y_p(t) = at^2 + bt.$$

Si deve imporre che tali funzioni siano soluzione dell'equazione

$$y_p'''(t) = t$$

e

$$y_p'''(t) - \alpha y_p'(t) = t$$

rispettivamente, e quindi si trovano le soluzioni particolari

$$y_p(t) = \frac{t^4}{24}$$

e

$$y_p(t) = -\frac{t^2}{2\alpha}.$$

rispettivamente. In definitiva le soluzioni generali dell'equazione data sono date da

1. per $\alpha = 0$

$$y(t) = y_0(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \frac{t^4}{24};$$

2. per $\alpha > 0$
$$y(t) = c_1 + c_2 e^{t\sqrt{\alpha}} + c_3 e^{-t\sqrt{\alpha}} - \frac{t^2}{2\alpha};$$

3. per $\alpha < 0$
$$y(t) = c_1 + c_2 \cos(t\sqrt{|\alpha|}) + c_3 \sin(t\sqrt{|\alpha|}). - \frac{t^2}{2\alpha}.$$

Veniamo all'ultima parte; la scelta $\alpha = 1$ ricade nel secondo caso, e quindi dobbiamo cercare tra le funzioni
$$y(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} - \frac{t^2}{2}$$
quella che soddisfa le condizioni iniziali. Si trova quindi il sistema
$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ c + 1 + c_2 + c_3 - 1 = 0. \end{cases}$$

Si trova quindi che la soluzione del Problema di Cauchy è data da
$$y(t) = -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{t^2}{2}.$$

Soluzione 2 Stiamo considerando la curva nel piano $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$$r(t) = \varrho(t)(\cos t, \sin t) = |\sin(3t)|(\cos t, \sin t).$$

Le funzioni
$$r_1(t) = |\sin(3t)| \cos t, \qquad r_1(t) = |\sin(3t)| \sin t$$
sono contnue e derivabili se $\sin(3t) \neq 0$, quindi la curva è regolare a tratti.

Dato che la quantità $\varrho(t) = |\sin(3t)|$ rappresenta esattamente la distanza dall'origine della curva $r(t)$, cioè
$$\|r(t)\| = \varrho(t) = |\sin(3t)|,$$
si avranno i punti di massima distanza se $|\sin(3t)| = 1$, cioè se
$$3t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$
o equivalentemente
$$t = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Di tali punti appartengono a $[0, \pi]$ i sei punti corrispondenti a $t = \pi/6, \pi/2, 5\pi/6, 7\pi/6, 3\pi/2, 11\pi/6$ che determinato i punti
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (0,1), \quad \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad (0,-1), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Il punto $(\sqrt{3}/2, 1/2)$ è quindi uno di tali punti, determinato dal parametro $t = \pi/6$. La circonferenza osculatrice è la ciconverenza con centro
$$r\left(\frac{\pi}{6}\right) + \varrho_r\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{n}_r\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

con $\hat{n}_r$ la normale principale e $\varrho_r = 1/k_r$ il raggio curvatura determinato dalla curvatura k_r se $k_r \neq 0$. Determiniamo quindi $\hat{n}_r(\pi/6)$ e $k_r(\pi/6)$. Abbiamo che per $t \in (0, \pi/2)$

$$r'(t) = 3\cos(3t)(\cos t, \sin t) + \sin(3t)(-\sin t, \cos t),$$

e quindi

$$r'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

che ha la proprietà che $\|r'(\pi/6)\| = 1$. Quindi $r'(\pi/6) = \hat{\tau}_r(\pi/6)$.

Calcoliamo ora la curvatura usando la formula

$$k_r\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\|r''(\pi/6) \times r'(\pi/6)\|}{\|r'(\pi/6)\|},$$

avendo inteso la curva piana come una curva nello spazio aggiungendo come terza coordinata $z = 0$. Siccome per $t \in (0, pi/2)$ si ha che

$$r''(t) = -10\sin(3t)(\cos t, \sin t) + 6\cos(3t)(-\sin t, \cos t),$$

ricaviamo che

$$r''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Troviamo quindi che

$$k_r\left(\frac{\pi}{6}\right) = 10$$

da cui

$$\varrho_r\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{10}.$$

Siccome siamo nel piano, la normale principale si può ottenere dal versore normale mediante rotazione di $\pi/2$ e quindi

$$\hat{n}_r\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

In definitiva la circonferenza osculatrice ha centro

$$c_r\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{10}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{9\sqrt{3}}{20}, \frac{9}{20}\right)$$

e raggio $1/10$. Possiamo quindi usare la forma cartesiana

$$\left(x - \frac{9\sqrt{3}}{20}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{20}\right)^2 = \frac{1}{100},$$

oppure le due forme paramtriche

$$\left(\frac{9\sqrt{3}}{20} + \frac{1}{10}\cos t, \frac{9}{20} + \frac{1}{10}\sin t\right)$$

oppure

$$\begin{aligned}\gamma(t) =& c_r\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{10}\left(\cos t\,\hat{\tau}_r\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin t\,\hat{n}_r\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ =& \left(\frac{9\sqrt{3}}{20} - \frac{1}{20}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{20}\sin t, \frac{9}{20} + \frac{\sqrt{3}}{20}\cos t - \frac{1}{20}\sin t\right).\end{aligned}$$

Soluzione 3 Massimizziamo e minimizziamo il quadrato della distanza dall'origine, che ha migliori prorprietà di differenziabilità rispetto alla funzione distanza:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Cerchiamo prima i punti stazionari liberi:

$$\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z) = 0$$

solo nell'origine, che è quindi l'unico punto stazionario libero che però non appartiene ad E.

Cerchiamo ora i punti stazionari vincolati; ci sono tre parti di frontiera di E; quelli che soddisfano l'identità

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 4$$

con la condizione

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 < 4,$$

poi ci sono i punti che soddisfano l'identità

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 4$$

con la condizione

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 < 4,$$

ed infine i punti che soddisfano le due identità

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 4 \\ (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 4. \end{cases}$$

Nei primi due casi useremo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange tenendo presente nel primo caso che

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 < 4.$$

mentre nel secondo caso

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 < 4.$$

Consideriamo quindi prima di tutto la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda\Big((x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 - 4\Big);$$

la ricerca dei punti stazionari di tale funzione porta al sistema

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda(x - 3) = 0 \\ 2y - 2\lambda(y - 3) = 0 \\ 2z - 2\lambda(z - 3) = 0 \\ (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 4; \end{cases}$$

l'unica soluzione di tale sistema che soddisfa la condizione

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 < 4$$

è data dal punto $(3 - {}^2\!/\!\sqrt{3}, 3 - {}^2\!/\!\sqrt{3}, 3 - {}^2\!/\!\sqrt{3})$ dove il quadrato della distanza vale $31 - 12\sqrt{3}$.

Se ora si prende la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda\Big((x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 - 4\Big);$$

la ricerca dei punti stazionari di tale funzione porta al sistema

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda(x-3) = 0 \\ 2y - 2\lambda(y-3) = 0 \\ 2z - 2\lambda(z-2) = 0 \\ (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 4; \end{cases}$$

l'unica soluzione di tale sistema che soddisfa la condizione

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 < 4$$

è data dal punto $(3 + {}^6\!/\!\sqrt{22}, 3 + {}^6\!/\!\sqrt{22}, 2 + {}^4\!/\!\sqrt{22})$ dove il quadrato della distanza vale $26 + {}^{86}\!/\!\sqrt{22}$.

Nella terza parte di frontiera possiamo considerare equivalentemente la Lagrangiana con due moltiplicatori

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2+y^2+z^2-\lambda\Big((x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2-4\Big)-\mu\Big((x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2-4\Big)$$

oppure tenendo conto che si deve avere

$$4-(z-3)^2 = 4-(z-2)^2,$$

ricavando z si trova che $z = {}^5\!/\!2$ e quindi si deve trovare i punti stazionari della funzione quadrato della distanza sull'insieme

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = \frac{15}{4};$$

essendo questa una circonferenza di raggio ${}^{\sqrt{15}}\!/\!2$ centrata in $(3,3)$, possiamo usare la parametrizzazione del vincolo

$$r(t) = \left(3 + \frac{\sqrt{15}}{2}\cos(t), 3 + \frac{\sqrt{15}}{2}\sin(t), \frac{5}{2}.\right)$$

In ogni caso si trovano due punti stazionari vincolati $(3+{}^{\sqrt{30}}4/, 3+{}^{\sqrt{30}}4/, {}^5\!/\!2)$ e $(3-{}^{\sqrt{30}}4/, 3-{}^{\sqrt{30}}4/, {}^5\!/\!2)$ in cui il quadrato della distanza è dato rispettivamente da $28+3\sqrt{30}$ e $28-3\sqrt{30}$.

Per confronto dei valori troviamo in definitiva che

$$\min_E f = 31 - 12\sqrt{3}, \qquad \text{assunto in } \left(3 - \frac{2}{\sqrt{3}}, 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}, 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right),$$

mentre

$$\max_E f = 26 + \frac{86}{\sqrt{22}}, \qquad \text{assunto in } \left(3 + \frac{6}{\sqrt{22}}, 3 + \frac{6}{\sqrt{22}}, 2 + \frac{4}{\sqrt{22}}\right).$$

Soluzione 4 L'insieme dato può essere riscritto nella forma

$$\begin{aligned} E = &\left\{1 \le z \le \frac{5}{2}, (x-3)^2 + (y-3)^2 \le 4 - (z-3)^2\right\} \cup \\ &\cup \left\{\frac{5}{2} \le z \le 4, (x-3)^2 + (y-3)^2 \le 4 - (z-2)^2\right\}; \end{aligned}$$

riconosciamo quindi che l'insieme E è stratificato in direzione z con strati dati da cerchi; quindi

$$|E| = \int_1^{\frac{5}{2}} \pi(4-(z-3)^2)dz + \int_{\frac{5}{2}}^4 \pi(4-(z-2)^2)dz = \pi\int_1^{\frac{5}{2}}(6z-z^2-5)dz + \pi\int_{\frac{5}{2}}^4 \pi(4z-z^2)dz = \frac{27}{4}\pi.$$

Soluzione 5 La successione di funzioni ha la proprietà che

$$f_n(0) = \frac{1}{e},$$

mentre per $x \neq 0$, siccome $|nx| \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

Quindi la successione di funzioni converge puntualmente alla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e} & \text{se } x = 0 \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La convergenza non potrà essere uniiforme, almeno intorno a 0, perchè le f_n sono continue mentre f è discontinua in 0. In effetti la funzione

$$g_n(x) = f_n(x) - f(x)$$

è discontinua in 0. Notiamo però che, studiando tale funzione, siccome g_n è monotona crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, 1/n)$, mentre è decrescente in $(1/n, +\infty)$ si trova che per ogni $a > 0$ se $1/n < a$, allora

$$\sup_{[a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[a,+\infty)} g_n(x) = e^{-(na-1)^2},$$

mentre

$$\sup_{(-\infty,-a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{(-\infty,-a]} g_n(x) = e^{-(-na-1)^2}.$$

Visto che

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-(na-1)^2} = \lim_{n\to+\infty} e^{-(-na-1)^2} = 0,$$

si deduce che f_n converge uniformemente a 0 sugli intervalli $(-\infty, -a]$ e $[a, +\infty)$ per ogni $a > 0$.

Per calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

non si può applicare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, ma scrivendo

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^a f_n(x)dx + \int_a^1 f_n(x)dx.$$

Per il secondo integrale abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^1 f_n(x)dx = 0$$

perchè su $[a, 1]$ si può usare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale avendosi convergenza uniforme. Su $[0, a]$ possiamo sfruttare il fatto che

$$0 \leq f_n(x) \leq 1,$$

e quindi

$$0 \leq \int_0^a f_n(x)dx \leq a.$$

Troviamo in definitiva che

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \leq a, \qquad \forall a > 0,$$

e quind

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 11 giugno 2020

Esercizio 1 [6 punti] Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 2e^{3t} + \frac{t}{2}.$$

Esercizio 2 [6 punti] Dire in quali punti dell'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0 \right\}$$

si applica il Teorema della funzione implicita; determinare quindi tangente e normale all'insieme nel punto $(4, 3, 4)$.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Dire se il campo

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}, \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}, \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} \right)$$

è conservativo o meno; determinarne in caso il potenziale e calcolare il lavoro del campo F lungo la curva $r : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$

$$r(t) = \Big(2 + \cos(2\pi t), 2 + \sin(2\pi t), (t^2 + 1)(1 + \sin^2(2\pi t)) \Big).$$

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della serie di funzione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)\sqrt{n + 1}} (x - 3)^n.$$

Soluzione 1 L'equazione data è del secondo ordine lineare a coefficienti costanti completa. L'equazione omogenea associata si risolve considerando il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2;$$

siccome tale polinomio ha una radice reale $\lambda = 2$ con molteplicità due, la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è data da

$$y_0(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t}.$$

Per la determinazione della soluzione particolare usiamo il principio di sovrapposizione; dato che

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t), \qquad f_1(t) = 2e^{3t}, \quad f_2(t) = \frac{t}{2},$$

cerchiamo due soluzioni particolari nella forma

$$y_1(t) = ae^{3t}, \qquad y_2(t) = bt + c.$$

Imponendo che

$$y_1''(t) - 4y_1'(t) + 4y_1(t) = 2e^{3t}$$

si trova $a = 2$, mentre imponendo che

$$y_2''(t) - 4y_2'(t) + 4y_2(t) = \frac{t}{2}$$

si trova $b = c = 1/8$. Abbiamo quindi trovato che la soluzione generale dell'equazione è data da

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t} + 2e^{3t} + \frac{t+1}{8}.$$

Soluzione 2 L'insieme dato è lo zero della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8}$$

ed è dato da un cono a sezione ellittica; in quanto cono ci aspettiamo che tale insieme abbia in $(0, 0, 0)$ una singolarità. In effetti abbiamo che

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{x}{8}, \frac{2y}{9}, -\frac{z}{4}\right)$$

che si annulla esclusivamente in $(0, 0, 0)$. Tale punto è quindi l'unico punto in cui non si applica il Teorema della funzione implicita e $(0, 0, 0) \in E$; tale punto è in effetti il vertice del cono.

Per quanto riguarda tangente e normale abbiamo che

$$\nabla f(4, 3, 4) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -1\right);$$

tale vettore è ortogonale ad E e quindi

$$\begin{aligned}\mathrm{Nor}(E, (4, 3, 4)) =& N_{(4,3,4)}E = \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -1\right) \right\rangle \\ =& \langle (3, 4, -6) \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x = 3y, 2x + z = 0\}.\end{aligned}$$

La retta ortogonale è invece data da

$$\begin{aligned} r^{\perp} =&(4,3,4) + \mathrm{Nor}(E,(4,3,4)) = (4,3,4) + N_{(4,3,4)}E = (4,3,4) + \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -1\right) \right\rangle \\ =&(4,3,4) + \langle (3,4,-6) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x = 3y + 7, 2x + z = 12\}. \end{aligned}$$

Lo spazio tangente è invece dato da

$$\begin{aligned} \pi_\tau =&\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (3,4,-6) \cdot (x,y,z) = 0\} \\ =&\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 4y = 6z\} \\ =&\langle (-2,0,1), (-4,3,0) \rangle. \end{aligned}$$

Il piano tangente infine è dato da

$$\begin{aligned} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (3,4,-6) \cdot (x-4, y-3, z-4) = 0\} =&\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 4y = 6z\} \\ =&\langle (-2,0,1), (-4,3,0) \rangle. \end{aligned}$$

Soluzione 3 La funzione è definita sull'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}.$$

Cerchiamo i punti stazionari interni ponendo

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right) = 0;$$

l'unico punto stazionario è quindi $(0,0)$ che è interno ad E; in tale punto la funzione vale

$$f(0,0) = 2.$$

Per quanto riguarda la frontiera di E, abbiamo quattro vertici dove la funzione si annulla, mentre è facile vedere che sui quattro lati di E non ci sono punti stazionari vincolati. In definitiva

$$\min_E f = 0 \qquad \text{assunto in } (1,1), (-1,1), (-1,-1) \text{ e } (1,-1),$$

mentre

$$\max_E f = 2 \qquad \text{assunto in } (0,0).$$

Soluzione 4 Il campo dato è definito e derivabile nello spazio escluso dai tre piano $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, che è l'unione di otto insiemi convessi e quindi semplicemente connessi. È facile verificare che

$$\mathrm{rot} F(x,y,z) = 0,$$

quindi il campo è conservativo. Il potenziale si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{z}{x^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{x}{y^2}, \\[6ex] \dfrac{\partial U}{\partial z} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{z^2}; \end{cases}$$

si trova che

$$U(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + c.$$

Per quanto riguarda il calcolo del lavoro, siccome la curva è una curva regolare con punto iniziale

$$r(0) = (3,2,1)$$

e punto finale

$$r(1) = (3,2,2),$$

avremo che

$$\int_r F \cdot d\vec{r} = U(3,2,2) - U(3,2,1) = \frac{2}{3}.$$

Soluzione 5 La serie data è una serie di potenze centrata in $x_0 = 3$ e con raggio di convergenza

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)\sqrt{n+1}}} = 1.$$

La serie converge pertanto sicuramente in $(2,4)$ e non converge in $(-\infty,2) \cup (4,+\infty)$. Per $x = 2$ abbiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt{n+1}},$$

mentre per $x = 4$ abbiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}};$$

siccome entrambe le serie convergono assolutamente abbiamo convergenza puntuale e puntuale assoluta in $[2,4]$. Siccome poi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in[2,4]} \left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} (x-3)^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt{n+1}} < +\infty,$$

se ne deduce che in $[2,4]$ la convergenza è totale e quindi anche uniforme e uniforme assoluta.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 16 luglio 2020

Esercizio 1 [6 punti] Determinare la soluzione del seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y''(t) = 2y(t)y'(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1; \end{cases}$$

della soluzione trovata determinare dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Determinare la terna di Frenet nel punto $(1,1,1)$ associata alla curva $r : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^3$

$$r(t) = (t, t^2, t^3).$$

Esercizio 3 [6 punti] Determinare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_E z(x^2+y^2)dxdydz$$

con

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, z \geq 0\}.$$

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della serie di Fourier associata alla funzione 6–periodica pari definita in $[0,3]$ da

$$f(x) = \begin{cases} t^2 & t \in [0,1] \\ (t-2)^2 & t \in [1,3]. \end{cases}$$

Determinare quindi le somme delle serie numeriche

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Soluzione 1 L'equazione differenziale è del secondo ordine autonoma; si pone quindi $y'(t) = v(y)$ e nella funzione v si ottiene il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} v(y)v'(y) = 2yv(y) \\ v(0) = 1. \end{cases}$$

Siccome si deve avere $v(y) \neq 0$, la soluzione del precedente Problema di Cauchy è data da

$$v(y) = y^2 + 1.$$

Integrando quindi ulteriormente si arriva alla soluzione $y(t)$ in forma implicita

$$\arctan y(t) = t, \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

da cui

$$y(t) = \tan t.$$

Soluzione 2 Abbiamo che

$$r'(t) = (1, 2t, 3t^2), \qquad v(t) = \|r'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4},$$

da cui

$$r'(1) = (1, 2, 3), \qquad v(1) = \|r'(1)\| = \sqrt{14}$$

e quindi

$$\hat{\tau}_r(1) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3).$$

Per determinare $\hat{n}_r(1)$ usiamo la formula

$$r''(t) = a(t)\hat{\tau}_r(t) + v(t)^2 k_r(t)\hat{n}_r(t).$$

Per usare tale formula calcoliamo quindi

$$r''(t) = (0, 2, 6t), \qquad a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^3}}(8t + 36t^3)$$

da cui

$$r''(1) = (0, 2, 6), \qquad a(1) = \frac{22}{\sqrt{14}}.$$

Per la curvatura usiamo invece la formula

$$k_r(1) = \frac{\|r'(1) \times r''(1)\|}{\|r'(1)\|^3} = \frac{\sqrt{19}}{7\sqrt{7}}.$$

Otteniamo quindi l'identitá

$$(0, 2, 6) = \frac{22}{14}(1, 2, 3) + \frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{14}}\hat{n}_r(1),$$

da cui

$$\hat{n}_r(1) = \frac{1}{\sqrt{266}}(-11, -8, 9).$$

Infine per la binormale usiamo la formula

$$\hat{b}_r(1) = \hat{\tau}_r(1) \times \hat{n}_r(1) = \frac{1}{\sqrt{19}}(3, -3, 1).$$

Soluzione 3 Il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x,y) = \left(x^2y + xy, \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + y\right);$$

i punti in cui tale gradiente si annulla sono tre, $(0,0)$, $(-3/2, 0)$ e $(-1, -1/6)$. Le matrici Hessiane nei tre punti stazionari sono date da;

$$A_1 = Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = Hf\left(-\frac{3}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = Hf\left(-1, -\frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_1 è semidefinita positiva e quindi il calcolo differenziale non da informazioni, A_2 ha determinante minore di zero e quindi è indefinita da cui il fatto che $(-3/2, 0)$ è un punto di sella, mentre A_3 è definita positiva da cui il fatto che $(-1, -1/6)$ è un punto di minimo locale stretto.

Per classificare $(0,0)$ l'unico metodo è lo studio del segno di

$$f(x,y) - f(0,0) = f(x,y);$$

la funzione f si annulla negli insiemi

$$\{y = 0\}, \qquad \{y = -x^2 - \frac{2}{3}x^3\}.$$

Tracciando il grafico di tali insiemi si nota che arbitrariamente vicino a $(0,0)$ ci sono sia punti in cui f è negativa, che punti in cui f è positiva. Pertanto $(0,0)$ è un punto di sella.

Soluzione 4 Il metodo più veloce per il calcolo dell'integrale è probabilmente passare per le coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \varrho \cos\vartheta \\ y = \varrho \sin\vartheta \\ z = t; \end{cases}$$

con questo cambio di variabili ci troviamo a dover integrare sull'insieme

$$\tilde{E} = \{(t, \varrho, \vartheta) : 0 \leq t \leq R, \vartheta \in [0, 2\pi], 0 \leq \varrho \leq \sqrt{R^2 - t^2}\}.$$

Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned} \int_E z(x^2 + y^2 dxdydz = &\int_{\tilde{E}} t\varrho^2 \varrho dt d\varrho d\vartheta = \int_0^R dt \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{R^2-t^2}} t\varrho^3 d\varrho \\ =&\frac{\pi}{2} \int_0^R t(R^2 - t^2)^2 dt = \frac{\pi}{12} R^6. \end{aligned}$$

Soluzione 5 Se si traccia il grafico della funzione estesa per periodicità, si nota che si ottiene una funzione pari, continua e regolare a tratti di periodo in realtà. Queste informazioni ci dicono che la serie di Fourier converge puntualmente e uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ alla funzione f; vedremo che si ha anche convergenza totale.

Calcoliamo ora i coeffcienti di Fourier; avremo che $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$ in quanto la funzione è pari, mentre

$$a_0 = 2 \int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3},$$

e per $k \geq 1$

$$a_k = 2\int_0^1 t^2 \cos(k\pi t)dt = \frac{4}{\pi^2 k^2}(-1)^k.$$

Vale quindi la seguente identità;

$$f(t) = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2}(-1)^k \cos(k\pi t).$$

Valutando tale espressione per $t = 0$ si ottiene che

$$0 = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2}(-1)^k,$$

da cui il fatto che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12};$$

se invece consideriamo $t = 1$ trovamo che

$$1 = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2},$$

da cui l'identità

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Usando infine l'identità di Parseval si trova che

$$\frac{2}{5} = 2\int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3}\Big)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^4 k^4},$$

da cui l'identità

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 20 agosto 2020

Esercizio 1 [6 punti] Determinare la soluzione del seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 3te^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Dire se l'equazione

$$e^{xy} - e^{-2y}\cos(x) - 1 = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ attorno al punto $(\pi/2, 0)$. Determinare quindi il polinomio di Taylor di secondo grado della funzione $g(x)$.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$$

soggetta al vincolo

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il lavoro del campo

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2xz-y}{x^2+y^2}, \frac{2yz+x}{x^2+y^2}, \ln(x^2+y^2)\right)$$

lungo le tre curve

$$(\cos(t), \sin(t), 0), (1, \sin(t), \cos(t)), (2+\cos(t), \sin(t), e^t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k(1-x)^k;$$

dire in particolare se f è definita e continua in $[0,1]$ e calcolare quindi

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx.$$

Soluzione 1 L'equazione differenziale è del secondo ordine lineare a coefficienti costanti completa. La soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Per la soluzione particolare usiamo il metodo di somiglianza e cerchiamo la soluzione nella forma

$$y_p(t) = e^t(at^2 + bt);$$

derivando e inserendo tale funzione nell'equazione si trova che $a = -3/2$ e $b = -3$. Imponendo quindi le condizioni iniziali si trova che $c_1 = -3$ e $c_2 = 3$. Quindi la soluzione del Problema di Cauchy è data da

$$y(t) = 3e^{2t} - e^t\left(\frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\right).$$

Soluzione 2 Posto

$$f(x, y) = e^{xy} - e^{-2y}\cos(x) - 1,$$

notiamo che

$$f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0$$

e

$$\nabla f(x, y) = (ye^{xy} + e^{-2y}\sin(x), xe^{xy} + 2e^{-2y}\cos(x)), \qquad \nabla f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right);$$

pertanto possiamo dire che attorno a $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ il livello $E_0(f)$ è localmente grafico $y = g(x)$ con $g(\pi/2) = 0$. Per calcolare le derivate di g deriviamo nell'equazione

$$e^{xg(x)} - e^{-2g(x)}\cos(x) - 1 = 0;$$

troviamo ad esempio che

$$\Big(g(x) + xg'(x)\Big)e^{xg(x)} + 2g'(x)e^{-2g(x)}\cos(x) + e^{-2g(x)}\sin(x) = 0,$$

da cui il fatto che

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}.$$

Derivando ancora troviamo poi che

$$\begin{aligned} 0 =& \Big(2g'(x) + xg''(x)\Big)e^{xg(x)} + \Big(g(x) + xg'(x)\Big)^2 e^{xg(x)} + 2g''(x)e^{-2g(x)}\cos(x) + \\ &- 4g'(x)^2 e^{-2g(x)}\cos(x) - 4g'(x)e^{-2g(x)}\sin(x) + e^{-2g(x)}\cos(x), \end{aligned}$$

da cui

$$g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2\pi + 8}{\pi^2}.$$

Abbiamo quindi che il polinomio di Taylor di secondo grado è dato da

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) + g'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}g''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = -\frac{2}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi + 4}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Soluzione 3 Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xe^{-x^2-y^2} - \lambda(x^2 - y^2 - 1);$$

i punti stazionari liberi di tale funzione si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} e^{-x^2-y^2}(1-2x^2)-2\lambda x=0, \\ -2xye^{-x^2-y^2}+2\lambda y=0, \\ x^2-y^2=1. \end{cases}$$

Tale sistema ha come uniche soluzioni i punti $(1,0)$ e $(-1,0)$ con moltiplicatori rispettivamente $\lambda=-1/2e$ e $\lambda=1/2e$ e valore di f pari rispettivamente a $-1/e$ e $1/e$. Per poter dire cha tali punti sono di minimo e massimo dobbiamo premettere alcune cosiderazioni.

L'insieme

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^2=1\}$$

è chiuso ma non limitato (E è composto da due rami di iperbole). Quindi, nonostante f sia continua, il Teorema di Weierstrass non si applica. Notiamo però che nella parte illimitata di E si ha che, grazie al fatto che per $(x,y)\in E$ si ha $x^2=1+y^2$ e $y^2=1+x^2$,

$$\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2x^2+1}=\sqrt{2y^2+1}\to+\infty$$

se e solo se contemporaneamente $|x|\to+\infty$ e $|y|\to+\infty$. Tenuto presente quindi che

$$\lim_{|x|\to+\infty} xe^{-x^2}=0, \qquad \lim_{|y|\to+\infty} e^{-y^2}=0,$$

ne deduciamo che

$$\lim_{\substack{(x,y)\in E,\\ \|(x,y)\|\to+\infty}} xe^{-x^2-y^2}=0.$$

Abbiamo quindi che $(-1,0)$ è un punto di minimo con minimo pari a $-1/e$ e $(1,0)$ è un punto di massimo con massimo pari a $1/e$.

Soluzione 4 Il campo è irrotazionale ma non è conservativo; si noti che il suo dominio è in effetti

$$\mathbb{R}^3\setminus\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)=(0,0)\}$$

che consiste dello spazio privato dell'asse z. Tale insieme non è semplicemente connesso. In effetti la circuitazione di F lungo la curva chiusa

$$r_1(t)=(\cos(t),\sin(t),0), \qquad t\in[0,2\pi]$$

è data da

$$\begin{aligned}\oint_{r_1} F\cdot d\vec{r}_1 &= \int_0^{2\pi} F(\cos(t),\sin(t),0)\cdot(-\sin(t),\cos(t),0)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin(t),\cos(t),0)\cdot(-\sin(t),\cos(t),0)dt=2\pi.\end{aligned}$$

Il campo F ammette però potenziali locali; sono due potenziali per F le due funzioni

$$z\ln(x^2+y^2)-\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+c, \qquad z\ln(x^2+y^2)+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+c,$$

il primo definito per $y\neq0$ e il secondo per $x\neq0$. Quindi il campo F è conservativo nel semispazio

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x>0\}$$

con potenziale

$$U(x, y, z) = z \ln(x^2 + y^2) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c;$$

le due curve

$$r_2(t) = (1, \sin(t), \cos(t)), r_3(t) = (2 + \cos(t), \sin(t), e^t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

sono contenute in tale semispazio. Pertanto, dato che r_2 è chiusa, allora

$$\oint_{r_2} F \cdot d\vec{r}_2 = 0,$$

mentre per r_3 possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}\oint_{r_3} F \cdot d\vec{r}_3 =& U(r_3(2\pi)) - U(r_3(0)) = U(3, 0, 1) - U(3, 0, e^{2\pi}) \\ =& 2(e^{2\pi} - 1) \ln 3.\end{aligned}$$

Soluzione 5 Se poniamo $y = x(1 - x)$, vediamo che

$$f(x) = \sum_{k=0} x^k (1 - x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} y^k$$

che è una serie di potenze in y (serie geometrica di ragione y) la cui somma è data da

$$\frac{1}{1 - y}. \tag{3}$$

Si ha convergenza puntuale e puntuale assoluta per $y \in (-1, 1)$, uniformemente e totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $(-1, 1)$. Passando alla varibile x, si ottiene convergenza puntuale e puntuale assoluta per $|x(x - 1)| < 1$, cioè per

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

con convergenza uniforme e totale in ogni intervallo $[a, b]$ con $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < a \leq b < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Abbiamo quindi convergenza totale e uniforme in $[0, 1]$ ed in tale intervallo pertanto f è continua. D'altro canto, se in (3) poniamo $y = x(1 - x)$ troviamo che per $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vale l'identità

$$f(x) = \frac{1}{1 - x + x^2}.$$

La continuità di f implica la sua integrabilità in $[1/2, 1]$ con integrale pari a

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{1 - x + x^2} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 10 settembre 2020

Esercizio 1 [6 punti] Determinare, al variare del parametro $a > 0$, le soluzioni del seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y(t)y'(t) = 1 - y(t)^2, \\ \\ y(0) = a. \end{cases}$$

Indicare in particolare il dominio delle soluzioni trovate e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Dire se il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ xy + yz - xz + 3 = 0 \end{cases}$$

definisce implicitamente attorno al punto $(1, -1, 1)$ una curva e determinare quindi la curvatura della curva in tale punto.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare e classificare i punti stazioni della funzione

$$f(x, y) = e^{x+y}\Big(x^2 + xy + 2y^2\Big).$$

Esercizio 4 [6 punti] Determinare il volume dell'insieme

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq z \leq 3 - x - y\right\}.$$

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare, giustificando i vari passaggi, il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln\left(1 + \sin\left(\frac{x^2}{n^2}\right)\right) dx.$$

Soluzione 1 Si noti che si deve avere $y(t) \neq 0$; riscrivendo l'equazione nella forma

$$\left\{ \; y'(t) = \tfrac{1-y(t)^2}{y(t)} \right.$$

riconosciamo una equazione a variabili separabili con

$$a(t) = 1, \qquad b(y) = \frac{1-y^2}{y}.$$

Le soluzioni stazionarie sono $y_0 = \pm 1$; quindi se il dato iniziale è $a = 1$, la funzione $y(t) \equiv 1$ è la soluzione del Problema di Cauchy.

Per determinare le soluzioni non stazionarie si riscrive l'equazione nella forma

$$\frac{y(t)}{1-y(t)^2} y'(t) = 1$$

che integrata fornisce la soluzione

$$y(t) = \sqrt{1-(1-a^2)e^{-2t}};$$

tali soluzioni sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$ se $a > 1$, mentre sono definite per $t \geq \ln \sqrt{1-a^2}$ se $0 < a < 1$.

Soluzione 2 Stiamo cosiderando l'insieme $E_{(1-,3)}(f)$ della funzione

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2-z^2, xy+yz-xz);$$

la sua matrice Jacobiana è data da

$$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ y-z & x+z & y-z \end{pmatrix}$$

che nel punto $(1,-1,1)$ diventa

$$Jf(1,-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 2, pertanto il Teorema si applica; dato poi che

$$\det J_{\langle e_2,e_3\rangle} f(1,-1,1) == \det \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 8 \neq 0,$$

possiamo dire che $(y,z) = g(x) = (g_1(x), g_2(x))$. Le funzioni g_1 e g_2 sono quindi definite implicitamente dal sistema

$$\begin{cases} x^2 + g_1(x)^2 - g_2(x)^2 = 1 \\ xg_1(x) + g_1(x)g_2(x) - xg_2(x) + 3 = 0. \end{cases}$$

La curva che quindi localmente parametrizza l'insieme $E_{(1,-3)}(f)$ è data da $r : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}^3$

$$r(x) = (x, g_1(x), g_2(x)).$$

Anzitutto notiamo che $g_1(1) = -1$ e $g_2(1) = 1$; derivando nel sistema troviamo che

$$\begin{cases} 2x + 2g_1(x)g_1'(x) - 2g_2(x)g_2'(x) = 0 \\ g_1(x) + xg_1'(x) + g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x) - g_2(x) - xg_2'(x) = 0, \end{cases}$$

che per $x = 1$ fornisce i valori $g_1'(1) = 1$ e $g_2'(1) = 0$. Derivando ulteriormente arriviamo al sistema

$$\begin{cases} 2 + 2g_1'(x)^2 + 2g_1(x)g_1''(x) - 2g_2'(x)^2 - 2g_2(x)g_2''(x) = 0 \\ 2g_1'(x) + xg_1''(x) + g_1''(x)g_2(x) + 2g_1'(x)g_2'(x) + g_1(x)g_2''(x) - 2g_2'(x) - xg_2''(x) = 0, \end{cases}$$

che per $x = 1$ fornisce i valori $g_1''(1) = 1/2$ e $g_2''(1) = 3/2$. Pertanto

$$r'(1) = (1, 1, 0), \qquad r''(1) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

La curvatura è quindi data da

$$k_r(1) = \frac{\|r'(1) \times r''(1)\|}{\|r'(1)\|^3} = \frac{\sqrt{19}}{4\sqrt{2}}.$$

Soluzione 3 Il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x, y) = (e^{x+y}(x^2 + xy + 2y^2 + 2x + y), e^{x+y}(x^2 + xy + 2y^2 + x + 4y));$$

l'equazione $\nabla f(x, y) = 0$ porta al sistema

$$\begin{cases} 2x + y = x + 4y \\ x^2 + xy + 2y^2 + x + 4y = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $(0, 0)$ e $(-3/2, -1/2)$ che sono quindi gli unici due punti stazionari. Per classificarli calcoliamo la matrice Hessiana di f;

$$Hf(x, y) = e^{x+y} \begin{pmatrix} x^2 + xy + 2y^2 + 4x + 2y + 2 & x^2 + xy + 2y^2 + 3x + 5y + 1 \\ x^2 + xy + 2y^2 + 3x + 5y + 1 & x^2 + xy + 2y^2 + 2x + 8y + 4 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo quindi le due matrici

$$A = Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = Hf\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-2}}{2} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siccome $A^{(1)} = 2 > 0$ e $\det A = 7 > 0$ ne deduciamo che A è definita positiva e che quindi $(0, 0)$ è un punto di minimo locale stretto, mentre $B^{(1)} = -3e^{-2}/2 < 0$ e $\det B = -4e^{-4}$ ne deduciamo che B è indefinita e quindi $(--3/2, -1/2)$ è un punto di sella.

Soluzione 4 L'insieme di integrazione è semplice in direzione z, pertanto

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_E dxdydz = \int_D dxdy \int_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}^{3-x-y} dz = \int_D \left(3 - x - y - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right) dxdy.$$

Il dominio D è determinato dalla condizione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 3 - x - y$$

che può essere riscritta nella forma

$$\frac{x^2 + 4x}{4} + \frac{y^2 + 9y}{9} \leq 3;$$

completando a quadrato e semplificando, l'espressione precedente può essere riscritta nella forma

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{4(y+9/2)^2}{225} \leq 1.$$

Riconosciamo quindi una ellisse di semiassi 5 e $15/2$ centrata in $(-2, -9/2)$. Passiamo quindi alle coordinate ellittiche

$$(x, y) = F(\varrho, \vartheta) = \left(-2 + 5\varrho\cos\vartheta, -\frac{9}{2} + \frac{15}{2}\varrho\sin\vartheta\right).$$

Il determinante Jacobiano di tale cambiamento di variabili è dato da

$$\det JF(\varrho, \vartheta) = \frac{75}{2}\varrho;$$

l'integrale diventa quindi

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(E) =& \int_D \left(3 - x - y - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right) dxdy = \frac{25}{4}\int_D \left(1 - \frac{(x+2)^2}{25} - \frac{4(y+9/2)^2}{225}\right) dxdy \\ =& \frac{25}{4}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (1-\varrho^2)\frac{75}{2}\varrho d\varrho = \frac{625}{8}\pi.\end{aligned}$$

Soluzione 5 Abbiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^2}{n^2} = 0.$$

Quindi per la continuità delle funzioni seno e logaritmo

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \sin\left(\frac{x^2}{n^2}\right)\right) = 0.$$

Per calcolare il limite dell'integrale studiamo la convergenza uniforma per $x \in [0, 1]$. Ma in tale insieme abbiamo che

$$0 \leq \ln\left(1 + \sin\left(\frac{x^2}{n^2}\right)\right) \leq \sin\left(\frac{x^2}{n^2}\right) \leq \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Pertanto

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|\ln\left(1 + \sin\left(\frac{x^2}{n^2}\right)\right)\right|$$

e quindi la successione di funzioni

$$\ln\left(1 + \sin\left(\frac{x^2}{n^2}\right)\right)$$

converge uniformemente a 0 in $[0, 1]$. In definitiva

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln\left(1 + \sin\left(\frac{x^2}{n^2}\right)\right) dx = 0.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 22 dicembre 2020

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} y(t) + (t+t^3)\sin(t) \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Dire, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, se e dove sull'insieme

$$E_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1, x^3 + y^3 + z^3 = a\}$$

sono verificate le condizioni del Teorema della funzione implicita. In particolare, determinare a per cui $(1, -1, -1) \in E_a$ e dire se si può scrivere intorno a tale punto $(x, y) = (g(z), h(z))$, determinando quindi la curvatura di E_a in $(1, -1, -1)$.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma (x^2y^2 + y^3 + 2z^2) d\Sigma$$

con $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

Esercizio 4 [6 punti] Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{-|x^2 + 4y^2 - 2|} + xy \ln(x^2 + 4y^2)$$

e su tale dominio determinare massimo e minimo di f.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della successione di funzioni $f_n : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = (1 - x)x^{-n}.$$

Soluzione 1 L'equazione é lineare del primo ordine; pertanto, posto

$$A(t) = \int_0^t \frac{2s}{1+s^2}ds = \ln(1+t^2),$$

troviamo la soluzione

$$u(t) = (1+t^2)\int_0^t \frac{s+s^3}{1+s^2}\sin(s)ds = (1+t^2)\Big(-t\cos(t) + \int_0^t \cos(s)ds\Big) = (1+t^2)(\sin(t) - t\cos(t)).$$

Soluzione 2 La matrice Jacobiana della funzione

$$f(x,y,z) = (xyz, x^3+y^3+z^3)$$

è data da

$$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix};$$

Il Teorema della funzione implicita si applica nei punti in cui tale matrice ha rango 2; cerchiamo pertanto tutti i punti in cui il rango non è 2 che sono dati dai punti per cui

$$(yz, xz, xy) \times (3x^2, 3y^2, 3z^2) = (3x(z^3-y^3), 3y(x^3-z^3), 3z(y^3-x^3)) = 0;$$

otteniamo pertanto il sistema

$$\begin{cases} x(z^3-y^3) = 0 \\ y(x^3-z^3) = 0 \\ z(y^3-x^3) = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ha per soluzione i punti della forma $(x,0,0)$, $(0,y,0)$, $(0,0,z)$ e (x,x,x). Nessuno dei punti $(x,0,0)$, $(0,y,0)$ e $(0,0,z)$ appartengono ad E_a, mentre i punti della forma (x,x,x) vi appartengono se e solo se $a=3$ e $x=1$.

Per quanto riguarda $(1,-1,-1)$, tale punto appartiene a E_1 ed in tale punto il Teorema si applica; in particolare, visto che la matrice Jacobiana di f in tale punto è data da

$$Jf(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

e visto che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 6 \neq 0,$$

allora possiamo dire che $(x,y) = (g(z), h(z))$ con $(1,-1) = (g(-1), h(-1))$. Per determinare la curvatura di E_1 in $(1,-1,-1)$ si usa la parametrizzazione

$$r(z) = (g(z), h(z), z)$$

e per la curvatura di E_1 in $(1,-1,-1)$ si usa la formula

$$k_r(-1) = \frac{\|r'(-1) \times r''(-1)\|}{\|r'(-1)\|^3}.$$

Per determinare le derivate di r, e quindi di g e h, si usano le identità

$$\begin{cases} g(z)h(z)z = 1 \\ g(z)^3 + h(z)^3 + z^3 = 1. \end{cases}$$

Derivando due volte si ottengono le identità

$$r'(-1) = (0, -1, 1), \qquad r''(-1) = (3, 1, 0),$$

da cui

$$k_r(-1) = \frac{\|(-1, 3, 3)\|}{\|(0, -1, 1)\|^3} = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{2}}.$$

Soluzione 3 Anzitutto notiamo che per motivi di simmetria si può semplificare l'integrale e dire che

$$\int_\Sigma (x^2y^2 + y^3 + 2z^2) d\Sigma 2 \int_\Sigma (x^2y^2 + 2z^2) d\Sigma.$$

A questo punto possiamo parametrizzare Σ mediante

$$r(t, s) = (R\cos(s)\sin(t), R\sin(s)\sin(t), R\cos(t)), \qquad s \in [0, 2\pi], t \in [0, \pi].$$

Tenuto conto che

$$\|r_t(t, s) \times r_s(t, s)\| = R^2 \sin(t),$$

possiamo concludere che

$$\begin{aligned}\int_\Sigma (x^2y^2 + 2z^2) d\Sigma = &\int_0^{2\pi} ds \int_0^\pi (R^4 \cos(s)^2 \sin(s)^2 \sin(t)^4 + 2R^2 \cos(t)^2) R^2 \sin(t) dt \\ =&R^6 \int_0^{2\pi} \cos(s)^2 \sin(s)^2 ds \int_0^\pi \sin(t)^5 dt + 4\pi R^4 \int_0^\pi \cos(t)^2 \sin(t) dt \\ =&\frac{4}{15}\pi R^6 + \frac{8}{3}\pi R^4.\end{aligned}$$

Soluzione 4 Il logaritmo è definito per $x^2 + 4y^2 > 0$ e cioè per $(x, y) \neq (0, 0)$, mentre la radice è definita per

$$-|x^2 + 4y^2 - 2| \geq 0,$$

condizione che è soddisfatta se e solo se

$$x^2 + 4y^2 - 2 = 0,$$

cioè se

$$\frac{x^2}{2} + 2y^2 = 1.$$

Il dominio della funzione f è quindi dato dall'ellisse centrata nell'origine di semiassi $\sqrt{2}$ e $1/\sqrt{2}$ che può essere parametrizzata mediante

$$r(t) = \left(\sqrt{2}\cos(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t)\right), \qquad t \in [0, 2\pi];$$

ristretta a tale curva la funzione diventa

$$g(t) = f(r(t)) = \cos(t)\sin(t)\ln 2 = \frac{\ln 2}{2}\sin(2t).$$

Derivando troviamo che

$$g'(t) = \ln 2 \cos(2t) = 0$$

per $2t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ che per t in $[0, 2\pi]$ fornisce le soluzioni

$$t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

che determinano i punti $(1, \frac{1}{2})$, $(-1, \frac{1}{2})$, $(-1, -\frac{1}{2})$ e $(1, -\frac{1}{2})$. In corrispondenza di $(1, \frac{1}{2})$ e $(-1, -\frac{1}{2})$ la funzione vale $\frac{\ln 2}{2}$, mentre in corrispondenza di $(-1, \frac{1}{2})$ e $(1, -\frac{1}{2})$ la funzione vale $-\frac{\ln 2}{2}$. Quindi

$$\max_{D(f)} f = \frac{\ln 2}{2}, \qquad \text{assunto nei punti } \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(-1, -\frac{1}{2}\right),$$

mentre

$$\max_{D(f)} f = -\frac{\ln 2}{2}, \qquad \text{assunto nei punti } \left(-1, \frac{1}{2}\right), \left(1, -\frac{1}{2}\right).$$

Soluzione 5 Notiamo anzitutto che $f_n(1) = 0$ e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 0.$$

Per $x > 1$ possiamo invece scrivere

$$f_n(x) = x^{-n} - x^{-n+1} = \frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^{n-1}} \to 0$$

in quanto $x^n \to +\infty$. La successione di funzioni converge quindi puntualmente a 0. Studiamo ora la convergenza uniforme, cioè vediamo se

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 1} (x-1)x^{-n}.$$

La funzione

$$\frac{1-c}{x^n}$$

è negativa per $x \geq 1$, nulla in 1 e tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{x^n} = 0 \qquad (n \geq 2).$$

Determiniamo il massimo di tale funzione mediante derivata nulla;

$$\frac{(1-n)x+n}{x^{n+1}} = 0 \qquad \text{per } x_n = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Abbiamo pertanto che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 1} (x-1)x^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x_n}{x_n^n} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n-1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = 0$$

grazie al limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e.$$

Ne deduciamo la convegenza uniforme in $[1, +\infty)$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 7 gennaio 2021

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) = y'(t)^2 - 2y'(t)e^{-y(t)}, \\ y(1) = 0. \\ y'(1) = 2; \end{cases}$$

della soluzione trovata determinare dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Data la parametrizzazione dell'ellisse

$$r(t) = (3\cos(t), \sin(t)), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

determinare la circonferenza osculatrice per $t = {}^{\pi}/_{6}$.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_E x^2 z dx dy dz$$

con

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 4, y \geq 0, z \geq 0 \right\}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Dire se la funzione $f : B_1(0,0) \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$$

è concava o convessa; dire inoltre, ed in caso determinarli, se esistono massimo e minimo di f su $B_1(0,0)$.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x^2)^k$$

e determinare esplicitamente la funzione f, cioè la somma della serie come funzione di x.

Soluzione 1 L'equazione data è del secondo ordine autonoma; si pone quindi $y'(t) = v(y)$ e tenendo presente che $2 = y'(1) = v(y(1)) = v(0)$, si arriva al Problema di Cauchy

$$\begin{cases} v(y)v'(y) = v(y)^2 - 2v(y)e^{-y}, \\ v(0) = 2. \end{cases}$$

Siccome $v(y) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione ma non soddisfa la condizione iniziale, dividendo per $v(y)$ si arriva al Problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'(y) = v(y) - 2e^{-y}, \\ v(0) = 2. \end{cases}$$

L'equazione data è del primo ordine lineare la cui soluzione è data da

$$v(y) = e^y + e^{-y}.$$

Tenendo presente che $v(y) = y'(t)$, siamo ora ricondotti al Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(y) = e^{y(t)} + e^{-y(t)}, \\ y(1) = 0; \end{cases}$$

tale equazione è a variabili separabili la cui soluzione va cercata fra le soluzioni non stazionarie da determinare dall'identità

$$\frac{y'(t)}{e^{y(t)} + e^{-y(t)}} = 1.$$

Integrando, troviamo che la soluzione in forma implicita è data da

$$\arctan(e^{y(t)}) = t - 1 + \frac{\pi}{4};$$

dato che $e^{y(t)} > 0$, tale soluzione è ben definita fintanto che

$$0 < t - 1 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

In definitiva si trova che la soluzione del Problema di Cauchy originario in forma esplicita è data da

$$y(t) = \ln\tan\left(t - 1 + \frac{\pi}{4}\right), \qquad t \in \left(1 - \frac{\pi}{4}, 1 + \frac{\pi}{4}\right).$$

Soluzione 2 Per la circonferenza osculatrice usiamo la formula

$$\gamma_r(t) = c_r\left(\frac{\pi}{6}\right) + \varrho_r\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos(t)\hat{\tau}_r\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin(t)\hat{n}_r\left(\frac{\pi}{6}\right)\right),$$

con centro

$$c_r\left(\frac{\pi}{6}\right) = r\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{n}_r\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Dalle identità

$$r'(t) = (-3\sin(t), \cos(t)), \qquad \|r'(t)\| = \sqrt{9\sin(t)^2 + \cos(t)^2},$$
$$r''(t) = (-3\cos(t), -\sin(t)), \qquad k_r(t) = \frac{3}{(9\sin(t)^2 + \cos(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ricaviamo che

$$r\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\qquad \hat{\tau}_r\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\qquad k_r\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad \varrho_r\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}.$$

Per il calcolo della normale principale possiamo usare l'identità

$$r''(t)=a(t)\hat{\tau}_r(t)+v(t)^2k_r(t)\hat{n}_r(t);$$

tenendo presente che

$$a(t)=v'(t)=\frac{8\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{9\sin(t)^2+\cos(t)^2}},\qquad a\left(\frac{\pi}{6}\right)=2,$$

troviamo che

$$\hat{n}_r\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Il centro della circonferenza osculatrice è quindi dato da

$$c_r\left(\frac{\pi}{6}\right)=r\left(\frac{\pi}{6}\right)+\varrho_r\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{n}_r\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

da cui la parametrizzazione della circonferenza data da

$$\gamma_r(t)=\left(\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t)-\frac{3}{2}\sin(t),\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\cos(t)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t)\right).$$

Soluzione 3 Possiamo riscrivere l'insieme E nella forma

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{4}\leq 1,y\geq 0,z\geq 0;\right\}$$

riconosciamo quindi un ellissoide con semiassi 4, 6 e 2 contenuto nella regione $y\geq 0$ e $z\geq 0$. Per calcolare l'integrale passiamo pertanto alle coordinate ellittiche

$$(x,y,z)=F(\varrho,\vartheta,\varphi)=(4\varrho\cos(\vartheta)\sin(\varphi),6\varrho\sin(\vartheta)\sin(\varphi),2\varrho\cos(\varphi)).$$

Dato che

$$\det JF(\varrho,\vartheta,\varphi)=-48\varrho^2\sin(\varphi)$$

e che in coordinate ellittiche l'insieme E diventa

$$\tilde{E}=[0,1]\times[0,\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

l'integrale diventa

$$\begin{aligned}\int_E x^2z\,dxdydz=&\int_{[0,1]\times[0,\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}16\varrho^2\cos(\vartheta)^2\sin(\varphi)^2 2\varrho\cos(\varphi)48\varrho^2\sin(\varphi)d\varrho d\vartheta d\varphi\\ =&48\cdot 32\int_0^1\varrho^5d\varrho\int_0^{\pi}\cos(\vartheta)^2d\vartheta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\varphi)\sin(\vartheta)^3d\varphi=32\pi.\end{aligned}$$

Soluzione 4 Essendo la funzione di classe C^2, studiamo la concavità e la convessità mediante la sua matrice Hessiana. Possiamo notare che la funzione data è radiale nella forma

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x^2-y^2} = g(\|(x,y)\|), \qquad g(t) = \frac{1}{1-t^2}, \quad t \in [0,1).$$

Se ne deduce che la funzione è convessa se e solo se $g' \geq 0$ e $g'' \geq 0$; siccome

$$g'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \geq 0, \qquad g''(t) = \frac{6t^2+2}{(1-t^2)^3} \geq 0,$$

ne concludiamo che f è convessa, strettamente convessa in quanto la derivata prima si annulla solo per $t = 0$ e la derivata seconda è strettamente positiva.

Per la seconda parte dell'esercizio notiamo che

$$\lim_{\|(x,y)\| \to 1^-} \frac{1}{1-x^2-y^2} = +\infty;$$

questo implica che

$$\sup_{(x,y) \in B_1(0,0)} f(x,y) = +\infty,$$

cioè f non è superiormente limitata in $B_1(0,0)$ e quindi non ammette massimo. Siccome poi

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{(1-x^2-y^2)^2}, \frac{2y}{(1-x^2-y^2)^2} \right) = (0,0)$$

se e solo se $(x,y) = (0,0)$, abbiamo che f ha un unico punto stazionario in $(0,0)$. La stretta convessità di f implica quindi che $(0,0)$ è punto di minimo assoluto su $B_1(0,0)$ con $f(0,0) = 1$

Soluzione 5 La serie data è riconducibile ad una serie di potenze ponendo

$$y = x - x^2;$$

con tale sostituzione troviamo infatti la serie

$$g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k$$

che è una serie geometrica di ragione y. Tale serie converge puntualmente e assolutamente per $y \in (-1,1)$, totalmente, uniformemente e uniformemente assolutamente negli intervalli chiusi e limitati contenuti in $(-1,1)$. Essendo una serie geometrica vale pure l'identità

$$g(y) = \frac{1}{1-y}.$$

Tornando alla variabile x, la condizione $-1 < x^2 - x < 1$ diventa $x \in (1/2 - \sqrt{5}/2, 1/2 + \sqrt{5}/2)$; in tale invervallo abbiamo convergenza puntuale e puntuale assoluta, mentre si ha convergenza totale, uniforme e uniforme assoluta in $[a,b]$ per ogni

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < a \leq b < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2};$$

otteniamo infine l'identità

$$f(x) = \frac{1}{1-x+x^2}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 28 gennaio 2021

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + 9y'(t) = \sin(t) + e^{2t}, \\ y(0) = 0. \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri l'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, 16x^2 + 16y^2 + z^2 = 4\};$$

si calcoli quindi tangente, ortogonale e curvatura di E in $(1/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, -2/\sqrt{5})$ motivando le risposte e i teoremi usati.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando attorno all'asse x l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, |x| \geq y^2\}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^4} + \sqrt{1 - x^2 - y^2};$$

determinare quindi massimo e minimo di f.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = n(x - 1)x^{-n}$$

e calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_2^3 f_n(x)dx.$$

Soluzione 1 La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(t) = c_1 + c_2 e^{-9t}.$$

Per la soluzione particolare usiamo il principio di sovrapposizione; cerchiamo la prima soluzione $y_1(t)$ nella forma

$$y_1(t) = a\cos(t) + b\sin(t);$$

imponendo l'identità

$$y''(t) + 9y'(t) = \sin(t)$$

troviamo che

$$y_1(t) = -\frac{9}{82}\cos(t) - \frac{1}{82}\sin(t).$$

Per quanto riguarda il secondo termine forzante cerchiamo la soluzione nella forma

$$y_2(t) = ae^{2t};$$

imponendo l'identità

$$y''(t) + 9y'(t) = e^{2t}$$

troviamo che

$$y_2(t) = \frac{1}{22}e^{2t}.$$

In definitiva la soluzione è data da

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-9t} - \frac{9}{82}\cos(t) - \frac{1}{82}\sin(t) + \frac{1}{22}e^{2t};$$

quella che soddisfa le condizioni iniziali è determinata da $c_1 = {}^1\!/_{18}$ e $c_2 = -{}^{71}\!/_{8118}$, quindi

$$y(t) = \frac{41}{738} + \frac{71}{8118}e^{-9t} - \frac{9}{82}\cos(t) - \frac{1}{82}\sin(t) + \frac{1}{22}e^{2t};$$

Soluzione 2 Per fare questo esercizio si può procedere in due modi, o mediante il teorema della funzione implicita o riscrivendo l'insieme nella forma

$$E = \{5x^2 + 5y^2 = 1, 5z^2 = 4\};$$

riconosciamo quindi due circonferenze di raggio ${}^1\!/\!\sqrt{5}$ nei piani $z = \pm {}^2\!/\!\sqrt{5}$. Di queste quella che contiene il punto assegnato può essere parametrizzata da $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\cos(t), \sin(t), -2)$$

che passa per il punto dato quando $t = {}^\pi\!/_4$. Siccome tale circonferenza ha curvatura costante pari a $\sqrt{5}$, questa sarà la curvatura di E nel punto dato, mentre il vettore

$$r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 1, 0)$$

è tangente da cui

$$T_{(1/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, -2/\sqrt{5})}E = \langle(-1, 1, 0)\rangle$$

mentre

$$N_{(1/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, -2/\sqrt{5})}E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x\}.$$

Soluzione 3 Possiamo applicare la formula per il volume del solido di rotazione e ottenere che

$$\mathrm{Vol}(E) = \pi \int_{-1}^{1} ((\sqrt{|x|})^2 - x^4)dx = \frac{3\pi}{5},$$

Soluzione 4 Il dominio di f è individuato dalle due disequazioni

$$y^2 - x^4 \geq 0, \qquad 1 - x^2 - y^2;$$

otteniamo pertanto l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \geq x^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

che è dato dalla parte del piano contenuto nel cerchio unitario e compreso dalle due parabole $\pm x^2$. Tale insieme ha una parte interna

$$(E)^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > x^2, x^2 + y^2 < 1\},$$

e una frontiera costituita dai due archi di parabola $y = x^2$ e $y = -x^2$ contenuti nel cerchio unitario, due porzioni di circonferenza tagliate dalle parabole e i cinque punti $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \pm\frac{\sqrt{5}-1}{2})$. Notiamo preliminarmente che

$$f(0, 0) = 1, \qquad f\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \pm\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 0.$$

Si nota anche che f è di classe C^1 in $(E)^\circ$ con

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{2x^3}{\sqrt{y^2 - x^4}} - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^4}} - \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right)$$

che si annulla in $(0, \pm 1/\sqrt{2})$ dove la funzione vale 1.

Lungo le parabole $y = \pm x^2$ la funzione diventa

$$f(x, \pm x^2) = \sqrt{1 - x^2 - x^4}$$

che viene massimizzata quando si massimizza $1 - x^2 - x^4$, cioè in corrispondenza di $x = 0$ dove f già sapevamo che vale 1, Restano gli archi di circonferenza $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ lungo i quali f diventa

$$f(x, \pm x^2) = \sqrt{1 - x^2 - x^4};$$

otteniamo altri due punti candidati massimi in corrispondenza di $x = 0$ dove f vale 1.

Siccome non ci sono altri candidati ad essere massimo o minimo se ne conclude che

$$\max_E f = \sqrt{2}, \qquad \text{assunto in } (0, \pm 1/\sqrt{2}),$$

mentre

$$\min_E f = 0, \qquad \text{assunto in } \left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \pm\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Soluzione 5 Si nota che $f_n(1) = 0$, per $|x| > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} n(x-1)x^{-n} = 0$$

per $|x| < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(x)| = +\infty$$

ed infine $f_n(-1) = -2n(-1)^n$. Pertanto f_n converge in $(-\infty,-1)\cup[1+\infty)$ a $f(x) = 0$. Studiamo la convergenza uniforme; consideriamo separatamente $(-\infty,-1)$ e $[1,+\infty)$.

Per quanto riguarda $[1,+\infty)$ per calcolare

$$\sup_{x\geq 1}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 1} f_n(x)$$

notiamo che

$$f_n(1) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

Inoltre $f_n(x) \geq 0$ e

$$f_n'(x) = nx^{-n-1}(x(1-n)+n)$$

che si annulla in

$$x_n = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} > 1.$$

Si nota che

$$f_n(x_n) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}.$$

In conclusione

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\geq 1}|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e},$$

e quindi non c'è convergenza uniforme in $[1+\infty)$. Però se $a > 1$, allora $x > n < a$ se $n > {}^{a}/_{(a-1)}$ e quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\geq a}|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} f_n(a) = 0$$

da cui la convergenza uniforme in $[a,+\infty)$ per ogni $a > 1$.

Per quanto riguarda $(-\infty,1)$ abbiamo invece che

$$\sup_{x<1}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x<1}|f_n(x)| = \lim_{x\to 1^-}|f_n(x)| = 2n$$

e quindi

$$\lim_{n+\infty}\sup_{x<1}|f_n(x) - f(x)| = +\infty$$

da cui la non convergenza uniforme in $(-\infty,1)$. Ancora si nota che se $a > 1$ allora

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x<-a}|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty}|f_n(-a)| = 0.$$

In definitiva abbiamo convergenza uniforme a zero in $(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$ per ogni $a > 1$ e quindi per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale

$$\lim_{n\to+\infty}\int_2^3 f_n(x)dx = 0.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 18 febbraio 2021

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{3}y(t) - 2e^t y(t)^4, \\ \\ y(0) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Della soluzione trovata determinare dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Dire se su $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 = 3, x + 2y + z = 0\}$ sono soddisfatte le condizioni del Teorema della Funzione Implicita; determinare quindi tangente e normale in $(1, -1, 1)$.

Esercizio 3 [6 punti] Scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine centrato in $(0, 0)$ della funzione $f(x, y) = \sin(e^x - \cos(y)) - x$ e calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(e^x - \cos(y)) - x}{x^2 + y^2}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Parametrizzare l'insieme $\{x^2 + 2y^2 = 3, x + 2y + z = 0\}$ e calcolare la circuitazione di $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ lungo tale insieme; data poi $r : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare con $r(0) = 0$ e $r(1) = (1, -1, 1)$ calcolare l'integrale di F lungo r.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della serie di Fourier associata alla funzione 2π–periodica pari definita in $[0, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare quindi le somme delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(k)}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)\cos(2k)}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)^2}{k^2}.$$

Soluzione 1 L'equazione è del primo ordine di tipo Bernoulli; siccome la funzione nulla non è soluzione del Problema di Cauchy, dividiamo l'equazione per $y(t)^4$ ed otteniamo per $v(t) = y(t)^{-3}$ il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) = -v(t) + 6e^t, \\ \\ v(0) = -8. \end{cases}$$

Si ottiene in definitiva la soluzione

$$y(y) = (3e^t - 11e^{-t})^{-1/3};$$

tale soluzione è definita per $t \neq \ln\sqrt{11/3}$ e quindi nell'intervallo $(-\infty, \ln\sqrt{11/3})$.

Soluzione 2 Andiamo a calcolare la Jacobiana della funzione

$$g(x,y,z) = (x^2 + 2y^2, x + 2y + z)$$

che è data da

$$Jg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice non ha rango 2 solo nei punti della forma $(0,0,z)$, ma nessuno di questi punti appartiene al nostro insieme. Per quanto riguarda tangente e normale in $(1,-1,1)$ abbiamo che

$$Jg(1, y-1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

e quindi gli spazi tangente e normale sono dati

$$\begin{aligned} T_{(1,-1,1)}E =& \langle (2,-4,0) \times (1,2,1) \rangle = \langle (-4,-2,8) \rangle = \langle (-2,-1,4) \rangle \\ =& \{(-2t, -t, 4t) : t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y, x + 2y + z = 0\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} N_{(1,-1,1)}E =& \langle (1,-2,0), (1,2,1) \rangle \\ =& \{(t+s, -2t+2s, s) : t,s \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2x - y + 4z = 0\}. \end{aligned}$$

La retta tangente e il piano ortogonale invece sono dati da

$$\begin{aligned} (1,-1,1) + T_{(1,-1,1)}E =& \{(1-2t, -1-t, 1+4t) : t \in \mathbb{R}\} \\ =& \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y + 3, x + 2y + z = 0\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (1,-1,1) + N_{(1,-1,1)}E =& \{(1+t+s, -1-2t+2s, 1+s) : t,s \in \mathbb{R}\} \\ =& \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2x - y + 4z = 1\}. \end{aligned}$$

Soluzione 3 Notiamo anzitutto che $f(0,0) = 0$ e

$$\nabla f(x,y) = (\cos(e^x - \cos(y))e^x - 1, \cos(e^x - \cos(y))\sin(y)), \qquad \nabla f(0,0) = (0,0),$$

mentre per la matrice Hessiana in un punto generico (x,y) si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin(e^x - \cos(y))e^{2x} + \cos(e^x - \cos(y))e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\sin(e^x - \cos(y))e^x \sin(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\sin(e^x - \cos(y))\sin(y)^2 + \cos(e^x - \cos(y))\cos(y)$$

e quindi la matrice Hessiana in $(0,0)$ diventa

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$f(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}Hf(0,0)(x,y)\cdot(x,y) + o(x^2+y^2) = \frac{x^2+y^2}{2} + o(x^2+y^2).$$

Avremo quindi che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}.$$

Soluzione 4 L'equazione

$$x^2 + 2y^2 = 3$$

definisce nel piano xy una ellisse di semiassi $\sqrt{3}$, $\sqrt{3/2}$. Ricavando $z = -x - 2y$ possiamo parametrizzare il nostro insieme mediante $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$r(t) = \left(\sqrt{3}\cos(t), \sqrt{\frac{3}{2}}\sin(t), -\sqrt{3}\cos(t) - \sqrt{6}\sin(t)\right).$$

Non usiamo tale parametrizzazione per calcolare la circuitazione in quanto F è irrotazionale

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = (0,0,0)$$

e il suo dominio è $D(F) = \mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso. Quindi F è conservativo e la sua circuitazione è nulla. Notiamo inoltre che un potenziale per F è dato da

$$U(x,y,z) = \frac{x^3+y^3+z^3}{3};$$

quindi il secondo integrale è dato da

$$\int_r F\cdot d\vec{r} = U(1,-1,1) - U(0,0,0) = \frac{1}{3}.$$

Soluzione 5 La funzione è continua a tratti con discontinuità in $\pm 1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e derivabile a tratti. La serie di Fourier converge quindi puntualmente alla funzione regolarizzata che differisce da f solo nei punti $\pm 1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ dove vale $1/2$. La convergenza è uniforme negli insiemi compatti che non toccano i punti $\pm 1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

La funzione è pari quindi $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$, mentre

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{\pi},$$

mentre

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(kx)dx = \frac{2}{k\pi}\sin(k).$$

Otteniamo quindi l'identità

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k} \cos(kx).$$

Se si valuta tale espressione in $x = 0$ si ottiene l'identità

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2},$$

mentre se si considera $x = 1$ si ottiene l'identà

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)\cos(k)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k)}{2k} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

infine per $x = \pi$ si ottiene l'identità

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k)}{k} = -\frac{1}{2}.$$

Dalla formula di Parseval si ottiene infine l'identità

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)^2}{k^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 15 aprile 2021

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) = \sqrt{1 + y'(t)^2} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$

Della soluzione trovata determinare dominio e tracciare un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Determinare curvatura e terna di Frenet nel punto $(1, 1, 0)$ relativi alla curva $r : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$r(t) = (t^2, t^3, \ln t).$$

Esercizio 3 [6 punti] Determinare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = \frac{6}{5}x^5 + \frac{5}{4}x^4 + \frac{2\sqrt{2}}{3}y^3 + x^2y^2.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della serie di Fourier associata alla funzione 2π–periodica pari definita in $[0, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare quindi le somme delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(k)}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)\cos(2k)}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)^2}{k^2}.$$

Soluzione 1 Siamo in presenza di una equazione differenziabile del secondo ordine riconducibile ad equazioni del primo ordine mediante la sostituzione $v(t) = y'(t)$. Per v si ottiene il problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) = \sqrt{1 + v(t)^2} \\ \\ v(0) = -1. \end{cases}$$

Tale equazione è del primo ordine a variabili separabili e la soluzione è data da

$$v(t) = \sinh(t + c);$$

tenendo conto del dato iniziale si ottiene che

$$v(t) = \sinh(t + \ln(\sqrt{2} - 1)).$$

Integrando tale soluzione si giunge quindi a

$$y(t) = \cosh(t + \ln(\sqrt{2} - 1)) + c;$$

per determinare c usiamo la condizione iniziale ottenendo quindi la soluzione del nostro problema

$$y(t) = \cosh(t + \ln(\sqrt{2} - 1)) + 1 - \sqrt{2}.$$

Soluzione 2 Per la curvatura usiamo la formula

$$k_r(1) = \frac{\|r'(1) \times r''(1)\|}{\|r'(1)\|^3}.$$

Sapendo quindi che

$$r'(t) = \left(2t, 3t^2, \frac{1}{t}\right), \qquad r'(1) = (2, 3, 1)$$

mentre

$$r''(t) = \left(2, 6t, -\frac{1}{t^2}\right), \qquad r''(1) = (2, 6, -1)$$

troviamo quindi che

$$k_r(1) = \frac{\sqrt{19}}{14\sqrt{2}}.$$

Per la terna di Frenet abbiamo che

$$\hat{\tau}_r(1) = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 3, 1),$$

mentre per la normale principale $\hat{n}_r(1)$ sfruttiamo l'identità

$$r''(1) = a(1)\hat{\tau}_r(1) + v(1)^2 k_r(1)\hat{n}_r(1)$$

dove $v(t) = \sqrt{4t^2 + 9t^4 + {}^1/_{t^2}}$ e

$$a(t) = v'(t) = \frac{d}{dt}\|r'(t)\| = \frac{4t + 18t^3 - {}^1/_{t^3}}{\sqrt{4t^2 + 9t^4 + {}^1/_{t^2}}}, \qquad a(1) = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}}.$$

Se ne ricava che

$$\hat{n}_r(1) = \frac{1}{\sqrt{38}}(-2, 3, -5);$$

per la binormale infine abbiamo che

$$\hat{b}_r(1) = \hat{\tau}_r(1) \times \hat{n}_r(1) = \frac{1}{\sqrt{133}}(-9, 4, 6).$$

Soluzione 3 Il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x,y) = (6x^4 + 5x^3 + 2xy^2, 2\sqrt{2}y^2 + 2x^2y)$$

che si annulla nei quattro punti $(0,0)$, $(-5/6, 0)$, $(-1, -1/\sqrt{2})$ e $(-5, -25/\sqrt{2})$. Per classificare tali punti consideriamo le matrici Hessiane che sono date da

$$A_1 = Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = Hf(-5/6, 0) = \begin{pmatrix} -125/6 & 0 \\ 0 & 25/18 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = Hf(-1, -1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = Hf(-5, -25/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -2000 & 250\sqrt{2} \\ 250\sqrt{2} & -50 \end{pmatrix};$$

i determinanti delle matrici A_2 e A_4 sono non nulli e negativi, quindi hanno due autovalori non nulli di segno opposto. Tali matrici sono quindi indefinite e quindi $(-5/6, 0)$ e $(-5, -25/\sqrt{2})$ sono punti di sella. La matrice A_3 invece ha determinante positivo e traccia nulla, quindi i suoi autovalori sono non nulli ed entrambi negatici. Pertanto A_3 è definita negativa e $(-1, -1/\sqrt{2})$ risulta essere punto di massimo locale stretto. La matrice A_1 è invece nulla quindi il calcolo differenziale non da alcuna informazione. Per capire la natura di $(0,0)$ come punto critico consideriamo le restrizioni di f ai punti del tipo $(0, y)$ per ottenere

$$f(0,y) = \frac{2\sqrt{2}}{3}y^3,$$

che è nulla per $y = 0$, positiva per $y > 0$ e negativa per $y < 0$. Se ne deduce che $(0,0)$ è un punto di sella.

Soluzione 4 La superficie Σ è il grafico della funzione

$$z = g(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

con $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Per il calcolo dell'area usiamo quindi la formula

$$\begin{aligned}\text{Area}(\Sigma) = &\int_{\{(x-1)^2+y^2\leq 1\}} \sqrt{1 + \|\nabla g(x,y)\|^2}dxdy = 2\int_{\{(x-1)^2+y^2\leq 1\}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy \\ =&2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2\cos\vartheta} \frac{\varrho}{\sqrt{4-\varrho^2}}d\varrho = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin\vartheta|)d\vartheta = 4(\pi - 2).\end{aligned}$$

Soluzione 5 La funzione è continua a tratti con discontinuità in $\pm 1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e derivabile a tratti. La serie di Fourier converge quindi puntualmente alla funzione regolarizzata che differisce da f solo nei punti $\pm 1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ dove vale $1/2$. La convergenza è uniforme negli insiemi compatti che non toccano i punti $\pm 1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

La funzione è pari quindi $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$, mentre

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{\pi},$$

mentre

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(kx)dx = \frac{2}{k\pi}\sin(k).$$

Otteniamo quindi l'identità

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k} \cos(kx).$$

Se si valuta tale espressione in $x = 0$ si ottiene l'identità

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2},$$

mentre se si considera $x = 1$ si ottiene l'identà

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)\cos(k)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k)}{2k} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

infine per $x = \pi$ si ottiene l'identità

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k)}{k} = -\frac{1}{2}.$$

Dalla formula di Parseval si ottiene infine l'identità

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)^2}{k^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 14 maggio 2021

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t+1}{t} y(t) + t(1-t), \\ \\ y(1) = e, \end{cases}$$

determinando il dominio della soluzione trovata e tracciando un grafico qualitativo della soluzione.

Esercizio 2 [6 punti] Dire se per l'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = 3\sin(\sqrt{x}), y^2 + z^2 = 3y\}$$

si applica il Teorema della funzione impicita nel punto $(\pi^2/4, 0, 3/2)$. Determinare quindi in tale punto tangente e normale.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2}$$

sul suo dominio di definizione.

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq \sqrt[3]{|x|}\}$$

attorno all'asse x.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k2^k} x^k.$$

Soluzione 1 L'equazione è lineare del primo ordine; per la soluzione calcoliamo

$$A(t) = \int_1^t a(s)ds = \int_1^t \frac{s+1}{s} ds = t - 1 + \in t;$$

si noti che nell'ultimo passaggio abbiamo considerato $\ln t$ e non $\ln |t|$ per il semplice fatto che il dato iniziale è assegnato per $t_0 = 1 > 0$ e che l'equazione è definita per $t \neq 0$, pertanto si deve considerare $t > 0$.

La soluzione del nostro problema è pertanto data da

$$y(t) = e^{A(t)} \left(e + \int_1^t e^{-A(s)} b(s) ds \right) = te^{t-1} \left(e + \int_1^t (1-s) e^{1-s} ds \right) = te^t + t^2 - te^{t-1}.$$

Tale funzione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ ma va considerata come soluzione dell'equazione solo per $t > 0$

Soluzione 2 Stiamo considerando la funzione

$$f(x,y,z) = (2z - 3\sin(\sqrt{x}), y^2 + z^2 - 3y)$$

e il livello $E_{(0,9/4)}(f)$ in quanto

$$f\left(\frac{\pi^2}{4}, 0, \frac{3}{2}\right) = \left(0, \frac{9}{4}\right).$$

Per vedere se il Teorema della funzione implicita si applica basta calcolare il rango della matrice Jacobiana di f nel punto $(\pi^2/4, 0, 3/2)$; siccome

$$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2\sqrt{x}} \cos\sqrt{x} & 0 & 2 \\ \\ 0 & 2y-3 & 2z \end{pmatrix}, \qquad Jf\left(\frac{\pi^2}{4}, 0, \frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

e quest'ultima matrice ha rango due con

$$(0,0,2) \times (0,-3,3) = (6,0,0) \neq 0.$$

Il tangente è lo spazio

$$\langle (6,0,0) \rangle = \langle (1,0,0) \rangle = \{(t,0,0) : t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = 0\}$$

mentre l'ortogonale è lo spazio

$$\langle (0,0,2), (0,-3,3) \rangle = \langle (0,0,1), (0,-1,1) \rangle = \{(0,-s,t+s) : t, s \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}.$$

Soluzione 3 Il dominio della funzione è determinato dalla condizione

$$1 - (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 \geq 0,$$

che equivale a richiedere che

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 9;$$

abbiamo quindi che

$$D(f) = \bar{B}_3(0,0) \setminus B_1(0,0);$$

tale insieme è chiuso e limitato e f è continua. Quindi grazie al Teorema di Weierstrass, f ammette sia massimo che minimo. Notiamo che $f \geq 0$ e $f = 0$ se e solo se

$$1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 0,$$

cioè per $x^2 + y^2 = 1$ o $x^2 + y^2 = 9$. I punti delle circonferenze di raggio 1 e raggio 3 sono quindi tutti punti di minimo. Per determinare il massimo, semplifichiamo il problema notando che f è una funzione radiale, cioè

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}), \qquad g(t) = \sqrt{1 - (t-2)^2}, t \in [1, 3].$$

Cerchiamo quindi di massimizzare g, notando che questo equivale a massimizzare

$$h(t) = 1 - (t - 2)^2, \quad t \in [1, 3].$$

Tale funzione è nulla in 1 e 3, positiva e derivabile in $[1, 3]$. Siccome

$$h'(t) = -2(t - 2) = 0$$

per $t = 2$, si avrà un massimo in tale punto con $h(2) = 1$. In conclusione il massimo di f sarà 1 assunto in tutti i punti della circonferenza di raggio 2.

Soluzione 4 Stiamo considerando il solido di rotazione

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [-1, 1], x^2 \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq \sqrt[3]{|x|}\};$$

la condizione $x \in [-1, 1]$ si ricava ponendo

$$x^2 \leq \sqrt[3]{|x|}.$$

Usando la formula che fornisce il volume del solido di rotazione

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], 0 \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$$

che è data da

$$\mathrm{Vol}(A) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx,$$

troviamo che

$$\mathrm{Vol}(F) = \pi \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{|x|} - x^2) dx = 2 \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^2) dx = \frac{5}{6}\pi.$$

Soluzione 5 Siamo in presenza di una serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

con $x_0 = 0$ e

$$c_k = \frac{\ln k}{k 2^k}.$$

Tenendo presente che

$$1 \leq \ln k \leq k, \qquad \text{per } k \geq 1,$$

e che quindi

$$1 \leq \sqrt[k]{\ln k} \leq \sqrt[k]{k} \to 1,$$

usando il criterio della radice troviamo che

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{\ln k}{k2^k}} = \frac{1}{2}.$$

Quindi la serie ha raggio di convergenza $\varrho = 2$; per $x = 2$ troviamo la serie numerica

$$\sum_{k=1^\infty} \frac{\ln k}{k}$$

che diverge in quanto

$$\frac{\ln k}{k} \geq \frac{1}{k},$$

mentre per $x = -2$ troviamo la serie numerica

$$\sum_{k=1^\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$$

che converge grazie al criterio di Leibniz. In definita si ha convergenza puntiuale in $[-2, 2)$, convergenza assoluta in $(-2, 2)$, mentre la covergenza sarà uniforme in $[-2, a]$ per ogni $0 \leq a < 1$ e totale e uniforme assoluta in $[-a, a]$ per ogni $0 \leq a < 1$.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 17 giugno 2021

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \dfrac{1}{\sin(t)}, \\ \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

determinando il dominio della soluzione trovata.

Esercizio 2 [6 punti] Dire se in tutti i punti dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 - 2z = 0, x^2 + y^2 - 6z = 1\}$$

si applica il Teorema della funzione impicita; considerare in particolare il punto $(3, 2, 2)$ e determinare in tale punto tangente ed ortogonale ad E.

Esercizio 3 [6 punti] Dire se la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y}$$

è convessa per $y > 0$ ed in tale insieme dire, determinandoli, se f ammette massimo e minimo.

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il volume del solido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 \leq z \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 3k^4}.$$

Soluzione 1 La soluzione dell'omogenea associata è data da

$$y_0(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t);$$

per determinare la soluzione particolare usiamo il metodo della variazione delle costanti. Arriviamo al sistema

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos(t) + c_2'(t)\sin(t) = 0 \\ \\ -c_1'(t)\sin(t) + c_2'(t)\cos(t) = \frac{1}{\sin(t)}. \end{cases}$$

Tale sistema ha come soluzioni

$$\begin{cases} c_1'(t) = -1 \\ \\ c_2'(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}. \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione data è quindi

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) - t\cos(t) + \sin(t)\ln|\sin(t)|.$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova che la soluzione del Problema di Cauchy dato è

$$y(t) = \frac{\pi}{2}\cos(t) - t\cos(t) + \sin(t)\ln|\sin(t)|.$$

La precedente funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, ma l'equazione differenziale è definita per $\sin(t) \neq 0$; in definitiva la soluzione trovata è definita in $(0, \pi)$.

Soluzione 2 Per vedere se sono soddistatte le condizioni del Teorema della funzione implicita calcoliamo la matrice Jacobiana della funzione

$$f(x, y, z) = (y^2 - 2z, x^2 + y^2 - 6z)$$

che è data da

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & -2 \\ 2x & 2y & -6 \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$(0, 2y, -2) \times (2x, 2y, -6) = (-8y, -4x - 4xy),$$

se ne deduce che la matrice non ha rango due se e solo se $x = y = 0$; siccome i punti della forma $(0, 0, z)$ non appartengono mai ad E, se ne conclude che il teorema si applica in tutti i punti di E, ed in particolare in $(3, 2, 2)$. Il tangente in tale punto è dato da

$$\begin{aligned} \langle(-16, -12, -24)\rangle =& \langle(-4, -3, -6)\rangle\langle(4, 3, 6)\rangle = \{(4t, 3t, 6t) : t \in \mathbb{R}\} \\ =& \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4y = 3x, 2z = 3x\}. \end{aligned}$$

Infine il normale è dato da

$$\begin{aligned} \langle(0, 4, -2), (6, 4, -6)\rangle =& \langle(0, 2, -1), (3, 2, -3)\rangle = \{(3s, 2t + 2s, -t - 3s) : t, s \in \mathbb{R}\} \\ =& \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x + 3y + 6z = 0\}. \end{aligned}$$

Soluzione 3 La funzione è di classe C^∞ per $y \neq 0$; studiamo la convessità di f quindi scrivendo la matrice Hessiana di f;

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x}{y}, -\frac{x^2}{y^2}\right), \qquad Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha determinante

$$\frac{8x^2}{y^4}$$

e traccia

$$\frac{2}{y} + \frac{2x^2}{y^3}.$$

Il determinante è positivo, strettamente positivo per $x \neq 0$, mentre la traccia è strettamente positiva per $y > 0$. Pertanto la matrice Hessiana per $y > 0$ è strettamente definita positiva per $x \neq 0$, semidefinita positiva per ogni x . Quindi f è convessa per $y > 0$, strettamente convessa se in più $x \neq 0$.

Per quanto riguarda i massimi e minimi, si può notare che $f(x, y) \geq 0$ se $y > 0$ con $f(x, y) = 0$ se e solo se $x = 0$. Quindi i punti della forma $(0, y)$, $y > 0$ sono tutti punti di minimo, che tra l'altro sono tutti punti stazionari per f. Il massimo non esiste perchè f non è superiormente limitata.

Soluzione 4 Per calcolare il volume di E effettuiamo prima una integrazione per fili e poi passiamo alle coordinate polari nel piano per ottenere

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(E) &= \int_E dxdydz = \int_{\{x^2+y^2\leq 9, x\geq 0, y\geq 0\}} dxdy \int_{x^2+y^2}^{9} dz \\
&= \int_{\{x^2+y^2\leq 9, x\geq 0, y\geq 0\}} (9 - x^2 - y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^3 (9 - \varrho^2)\varrho d\varrho = \frac{81}{8}\pi.
\end{aligned}$$

Soluzione 5 Posto

$$u_k(x) = \frac{x}{x^4 + 3k^4},$$

per $x = 0$ abbiamo che $u_k(0) = 0$ mentre per $x \neq 0$

$$|u_k(x)| \sim \frac{|x|}{3k^4};$$

pertanto si ha che la serie converge assolutamente e quindi puntualmente su tutto $\mathbb{R}$. Studiamo ora la convergenza totale calcolando

$$M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_k(x)|;$$

siccome

$$\lim_{|x|\to\infty} |u_k(x)| = 0$$

mentre

$$u_k'(x) = \frac{3(k^4 - x^4)}{(x^4 + 3k^4)^2}$$

che si annulla per $x = \pm k$ dove $u_k(k) = \pm 1/4k^3$. Quindi $M_k = 1/4k^3$ che forma una serie convergente. Si ha pertanto convergenza totale su tutto $\mathbb{R}$ e quindi anche convergenza uniforme.

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 8 luglio 2021

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) = \sqrt{1 - y'(t)^2}, \\ \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, \end{cases}$$

determinare quindi il dominio della soluzione trovata e tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Data la curva $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$r(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4t),$$

determinare la circonferenza osculatrice in $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pi)$.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^2 y^3 (6 - x - y).$$

Esercizio 4 [6 punti] Verificare il teorema della divergenza con

$$F(x, y, z) = (2x, -y, z)$$

e $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$.

Esercizio 5 [6 punti] Scrivere la serie di Fourier della funzione π-periodica definita in $[-\pi/2, \pi/2]$ da

$$f(x) = |\sin x|.$$

Determinare infine le somme delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}, \quad \sum_{k-1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}, \quad \sum_{k-1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}.$$

Soluzione 1 L'equazione è del secondo ordine riconducibile a due del primo ordine; poniamo $v(t) = y'(t)$ ed otteniamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) = \sqrt{1 - v(t)^2}, \\ \\ v(0) = 0; \end{cases}$$

tale problema è a variabili separabili con soluzione non stazionaria determinata da

$$\frac{v'(t)}{\sqrt{1 - v(t)^2}} = 1.$$

Integrando, tenendo presente che si deve avere $v(t) \neq 1$, si ottiene la soluzione in forma implicita

$$\arcsin(v(t)) = t, \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Esplicitando ed integrando ulteriormente si ottiene che la soluzione del Problema di Cauchy originario è data da

$$y(t) = 2 - \cos(t), \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Soluzione 2 Per la parametrizzazione della circonferenza osculatrice usiamo la formula

$$\gamma_r(t) = c_r(t_0) + \varrho_r(t_0) \cos t \hat{\tau}_r(t_0) + \varrho_r(t_0) \sin t \hat{n}_r(t_0).$$

Nel nostro caso $t_0 = \frac{\pi}{4}$; ricaviamo gli altri parametri. Siccome

$$r'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 4), \qquad \|r'(t)\| = 2\sqrt{5}, r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4),$$

ne deduciamo che

$$\hat{\tau}_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Curvatura e normale principale la possiamo ricavare dall'identità

$$r''(t_0) = a(t_0)\hat{\tau}_r(t_0) + v(t_0)^2 k_r(t_0)\hat{n}_r(t_0);$$

tenendo conto che $a(t) = 0$ e che $r''(t) = (-2 \cos t, -2 \sin t, 0)$, ne deduciamo che

$$k_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \varrho_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{5}, \qquad \hat{n}_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

In definitiva ricaviamo che la circonferenza osculatrice è parametrizzata da

$$\gamma_r(t) = \left(\frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t - \sqrt{\frac{5}{2}} \sin t, \frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t - \sqrt{\frac{5}{2}} \sin t, \pi + 2 \cos t\right).$$

Soluzione 3 Il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x, y) = (xy^3(12 - 3x - 2y), x^2y^2(18 - 3x - 4y))$$

che si annulla in $(2, 3)$ e nei punti della forma $(x, 0)$ e $(0, y)$, che sono quindi tutti punti stazionari. Per la loro classificazione usiamo la matrice Hessiana. Siccome

$$Hf(2, 3) = \begin{pmatrix} -168 & -108 \\ -108 & -432 \end{pmatrix},$$

che ha traccia negativa e determinante positivo, ne deduciamo che è definita negativa e quindi $(2,3)$ è un punto di massimo locale stretto. Per quanto riguarda gli altri punti, otteniamo che

$$Hf(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Hf(0,y) = \begin{pmatrix} 2y(6y^2-1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

tali matrici sono solo semidefinite quindi il calcolo differenziale non ci da informazioni. Per determinare la natura di tali punti notiamo che $f(x,0) = f(0,y) = 0$, pertanto possiamo studiare il segno di f per classificare tali punti stazionari. Se ne deduce che i punti della forma $(x,0)$ sono tutti punti di sella, mentre i punti della forma $(0,y)$ sono massimi locali per $y < 0$ e $y > 6$, minimi locali per $0 < y < 6$ mentre i punti $(0,0)$ e $(0,6)$ sono punti di sella.

Soluzione 4 Da una parte notiamo che $\operatorname{div} F(x,y,z) = 2$ e quindi

$$\int_E \operatorname{div} F(x,y,z)dxdydz = 2\mathrm{Vol}(E) = 36\pi.$$

D'altra parte $\partial E = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ con

$$\Sigma_1 = \{x^2+y^2+z^2 = 9, z > 0\}, \qquad \Sigma_2 = \{x^2+y^2 \leq 9, z = 0\};$$

le normali a tali superfici che sono normali esterne ad E sono rispettivamente

$$\hat{n}_{\Sigma_1}(x,y,z) = \frac{1}{3}(x,y,z), \qquad \hat{n}_{\Sigma_2}(x,y,z0) = (0,0,-1).$$

Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}\Phi(F,\Sigma_1) =& \int_{\Sigma_1} (2x,-y,z) \cdot \frac{1}{3}(x,y,z)d\Sigma = \frac{1}{3}\int_{\Sigma_1} (2x^2 - y^2 + z^2)d\Sigma \\ =& \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (18\cos^2\vartheta \sin^2\varphi - 9\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + 9\cos^2\varphi)9\sin\varphi d\varphi = 36\pi,\end{aligned}$$

mentre

$$\Phi(F,\Sigma_2) = \int_{\Sigma_2} (2x,-y,0)\cdot(0,0,-1)d\Sigma = 0.$$

Soluzione 5 La funzione è pari e π–periodica con frequenza $\omega = 2$; pertanto

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos(2kx)dx = -\frac{4}{\pi(4k^2-1)}$$

e

$$b_k = 0.$$

La serie di Fourier quindi è data da

$$\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}\cos(2kx).$$

Tale serie converge totalmente su $\mathbb{R}$ all'estensione π–periodica di $|\sin x|$ (che è continua), e quindi anche puntualmente e uniformemente.

Se valutiamo la predente espressione in $x = 0$ otteniamo che

$$\sum_{k-1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2},$$

mentre se la valutiamo in $x = \frac{\pi}{2}$ otteniamo che

$$\sum_{k-1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} = \frac{2 - \pi}{4},$$

mentre su usiamo la formula di Parseval otteniamo che

$$\sum_{k-1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 19 agosto 2021

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{t^2}y(t) + t^2 e^{-\frac{1}{t}}, \\ \\ y(1) = \dfrac{1}{3e}; \end{cases}$$

determinare quindi il dominio della soluzione trovata e tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri la curva cartesiana nel piano

$$y = |x|^{\frac{3}{2}}, \qquad x \in [-1, 1];$$

determinare parametro d'arco e lunghezza e riparametrizzare la curva mediante il parametro d'arco.

Esercizio 3 [6 punti] Fissati $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $y \neq 0$, dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \|x + ty\|^2$$

è strettamente convessa. Mostrare quindi che la funzione non è superiormente limitata ma ammette minimo; determinarlo e dire quando tale minimo coincide con $\|x\|^2$.

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_E (x^2 - y)\,dxdy,$$

con $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|\}$.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare, al variare di $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, le varie convergenze della successione di funzioni

$$f_n(x) = 1 + x^p e^{-nx}, \qquad x \in [0, 1].$$

Calcolare quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Soluzione 1 L'equazione è lineare del primo ordine con

$$a(t) = \frac{1}{t^2}, \qquad b(t) = t^2 e^{-\frac{1}{t}}.$$

Il dato iniziale è assegnato per $t = 1$ e le funzioni date son definite per $t \neq 0$, quindi la soluzione va cercata per $t > 0$. Troviamo che

$$A(t) = \int_1^t a(s)ds = 1 - \frac{1}{t}$$

e quindi

$$y(t) = e^{1-\frac{1}{t}} \left(\frac{1}{3e} + \int_1^t e^{\frac{1}{s}-1} s^2 e^{-\frac{1}{s}} ds \right) = \frac{t^3}{3} e^{-\frac{1}{t}};$$

tale soluzione è definita per $t > 0$.

Soluzione 2 Stiamo considerando la curva

$$r(t) = (t, |t|^{\frac{3}{2}}), \qquad t \in [-1, 1].$$

Siccome

$$r'(t) = \left(1, \frac{3}{2}|t|^{\frac{1}{2}} \frac{t}{|t|}\right), \qquad t \in (-1, 1), t \neq 0$$

può essere estesa continua in $t = 0$, abbiamo che r è una curva regolare. Per il parametro d'arco dobbiamo calcolare

$$s(t) = \int_{-1}^t \sqrt{1 + \frac{9}{4}|\tau|} d\tau;$$

a causa del valore assoluto distinguiamo due casi. Per $t \in [-1, 0]$ abbiamo che

$$s(t) = \int_{-1}^t \sqrt{1 - \frac{9}{4}\tau} d\tau = \frac{13\sqrt{13} - (4 - 9t)^{\frac{3}{2}}}{27}, \tag{4}$$

mentre per $t \in [0, 1]$ abbiamo che

$$s(t) = s(0) + \int_0^t \sqrt{1 + \frac{9}{4}\tau} d\tau = \frac{13\sqrt{13} - 16 + (4 + 9t)^{\frac{3}{2}}}{27}. \tag{5}$$

La lunghezza della curva è data quindi da

$$\ell(r, [-1, 1]) = s(1) = \frac{26\sqrt{13} - 16}{27}.$$

La funzione parametro d'arco è quindi definita in $s : [-1, 1] \to [0, {}^{(26\sqrt{13}-16)}\!/27]$; per riparametrizzare in lunghezza d'arco dobbiamo invertire tale funzione. Distinguiamo ancora due casi; per $s \in [0, {}^{(13\sqrt{13}-8)}\!/_{27}]$ ricavando t in funzione di s dall'espressione (4) avremo che

$$t = \frac{4 - (13\sqrt{13} - 27s)^{\frac{2}{3}}}{9}$$

da cui

$$\tilde{r}(s) = \left(\frac{4 - (13\sqrt{13} - 27s)^{\frac{2}{3}}}{9}, \left(\frac{4 - (13\sqrt{13} - 27s)^{\frac{2}{3}}}{9}\right)^{\frac{3}{2}} \right),$$

mentre per per $s \in [{}^{(13\sqrt{13}-8)}/_{27}, {}^{(26\sqrt{13}-16)}/_{27}]$ ricavando t in funzione di s dall'espressione (5) avremo che

$$t = \frac{(27s - 13\sqrt{13} + 16)^{\frac{2}{3}} - 4}{9}$$

da cui

$$\tilde{r}(s) = \left(\frac{(27s - 13\sqrt{13} + 16)^{\frac{2}{3}} - 4}{9}, \left(\frac{(27s - 13\sqrt{13} + 16)^{\frac{2}{3}} - 4}{9} \right)^{\frac{3}{2}} \right),$$

Soluzione 3 La funzione f è continua con

$$f'(t) = 2(x + ty) \cdot y, \qquad f''(t) = 2\|y\|^2.$$

Quindi f è di classe C^2 con derivata seconda strettamente positiva in quanto $y \neq 0$; se ne deduce che f è strettamente convessa. Notiamo poi che

$$\lim_{t \to \pm\infty} \|x + ty\|^2 = +\infty$$

e quindi f non è superiormente limitata e cioè non ammette massimo. La funzione è non negativa quindi ammette minimo non negativo; per determinarlo cerchiamo i punti stazionari di f, che sarà uno solo e sarà il minimo assoluto di f grazie alla stretta convessità. Abbiamo che $f'(t) = 0$ se e solo se

$$t = -\frac{x \cdot y}{\|y\|^2}.$$

In corrispondenza di tale punto abbiamo che

$$f\left(-\frac{x \cdot y}{\|y\|^2} \right) = \left\| x - \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} y \right\|^2 = \|x\|^2 - \frac{(x \cdot y)^2}{\|y\|^2};$$

tale valore coincide con $\|x\|^2$ se e solo se $x \cdot y = 0$, altrimenti è sempre inferiore.

Soluzione 4 Per calcolare l'integrale conviene passare alle coordinate polari; si ottiene infatti che

$$\int_E (x^2 - y)dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\vartheta \int_1^2 (\varrho^2 \cos^2 \vartheta - \varrho \sin \vartheta)\varrho d\varrho = \frac{15}{16}\pi - \frac{15}{8} - \frac{7\sqrt{2}}{3}.$$

Soluzione 5 Per la convergenza puntuale abbiamo che per ogni $x \in [0, 1]$

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + x^p e^{-nx}) = 1.$$

Studiamo quindi la covergenza uniforme studiando la funzione

$$g_n(x) = f_n(x) - 1 = x^p e^{-nx};$$

abbiamo che $g_n(0) = 0$, $g_n(1) = e^{-n}$ mentre

$$g_n'(x) = x^{p-1}(p - nx)e^{-nx};$$

tale derivata si annulla per $x \in (-1, 1)$ in $x = {}^{p}/_{n}$ dove la funzione vale

$$g_n\left(\frac{p}{n}\right) = \left(\frac{p}{n}\right)^p e^{-p}.$$

Dato che

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{p}{n}\right)^p e^{-p} = 0,$$

se ne conclude che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 1| = 0,$$

cioè la successione converge uniformemente ad 1 in $[0, 1]$. Per il teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale ricaviamo quindi che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 9 settembre 2021

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{y(t)}{t} = e^{2t}, \\ \\ y(1) = 0; \end{cases}$$

determinare quindi il dominio della soluzione trovata e tracciarne un grafico qualitativo. Dire infine se esiste $y_0 \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione del Problema di Cauchy con $y(1) = y_0$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 [6 punti] Dire se e dove l'equazione

$$(x^2 + y^2)(x-2)^2 - x^2 = 0$$

definisce implicitamente una curva regolare; calcolarne quindi la curvatura in $(3, 0)$.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^2 - z^2 + 3)$$

sull'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_E z(x^2 + 2y^2)\, dxdydz,$$

con $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+1}, \qquad x \in [0, 1].$$

e calcolare quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Soluzione 1 L'equazione data è lineare del primo ordine con

$$a(t) = -\frac{1}{t}, \qquad A(t) = \int_1^t a(s)ds = -\ln t$$

e

$$b(t) = e^{2t}.$$

La soluzione del Problema di Cauchy è quindi data da

$$y(t) = e^{A(t)} \int_1^t e^{-A(s)} b(s)ds = \frac{1}{t}\int_1^t se^{2s}ds = \frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}+e^2}{4t}.$$

Tale funzione è definita per $t > 0$. Per quanto riguarda la soluzione con $y(1) = y_0$, essa è data da

$$y(t) = \frac{e^{2t}}{2} + \frac{4y_0 - e^{2t} - e^2}{4t};$$

tale soluzione per essere definita per $t = 0$ deve presentare nella seconda frazione una forma indeterminata e quindi si deve avere che

$$\left(4y_0 - e^{2t} - e^2\right)_{t=0} = 0.$$

Questo determina univocamente che $y_0 = {}^{(1+e^2)}/_4$ e che la soluzione è data da

$$y(t) = \frac{e^{2t}}{2} + \frac{1-e^{2t}}{4t};$$

tale soluzione in effetti è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $y(0) = 0$.

Soluzione 2 Stiamo considerando l'insieme $E_0(f)$, cioè il livello 0 della funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)(x - 2)^2 - x^2;$$

per vedere se tale livello è una curva regolare attorno ad ogni suo punto basta verificare che il gradiente sia non nullo. Abbiamo che

$$\nabla f(x, y) = (2x(x - 2)^2 + 2(x^2 + y^2)(x - 2) - 2x.2y(x - 2)^2)$$

e tale gradiente si annulla nei tre punti $(0, 0)$ e $((3 \pm \sqrt{3})/2, 0)$; di questi solo il punto $(0, 0)$ appratiene a $E_0(f)$. In effetti attorno a tale punto tale insieme non è una curva regolare (è un punto isolato), mentre negli altri punti è localmente una curva regoalre.

In particolare, $(3, 0) \in E_0(f)$ e intorno a tale punto l'insieme di livello è una curva regolare. Siccome poi

$$\nabla f(3, 0) = (20, 0), \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(3, 0) \neq 0,$$

ne deduciamo che attorno a $(3, 0)$ l'insieme di livello è una curva cartesiana della forma $x = g(y)$, cioè parametrizzata da $r(y) = (g(y), y)$, y in un intorno di 0. Per determinare la curvatura ci serve calcolare

$$r'(0) = (g'(0), 1), \qquad r''(0) = (g''(0), 0);$$

tali valori li ricaviamo, derivando rispetto ad y, dall'equazione

$$(g(y)^2 + y^2)(g(y) - 2)^2 - g(y)^2 = 0$$

e partendo dall'informazione $g(0) = 3$. Otteniamo che

$$g'(0) = 0, \qquad g''(0) = -\frac{1}{9}.$$

Per quanto riguarda il calcolo della curvatura, se vediamo la curva come una curva nello spazio $r(y) = (g(y), y, 0)$, possiamo utilizzare la formula

$$k_r(0) = \frac{\|r'(0) \times r''(0)\|}{\|r'(0)\|^3} = \frac{\|(0,1,0) \times (-1/9, 0, 0)\|}{\|(0,1,0)\|^3} = \frac{1}{9}.$$

Soluzione 3 Notiamo anzitutto che il dominio della funzione è dato da

$$D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 - z^2 + 3 > 0\};$$

tale insieme contiene E in quanto se $z^2 \leq 1 - x^2 - y^2$, dato che l'espressione

$$1 - x^2 - y^2 < x^2 + 2y^2 + 3$$

è equivalente all'espressione sempre verificata senza limitazioni

$$-2 < 2x^2 + 3y^2,$$

allora sicuramente

$$z^2 < x^2 + 2y^2 + 3.$$

Notiamo inoltre che la funzione logaritmo è monotona crescente; pertanto per deternimare il massimo e il minimo richiesto possiamo semplificare e considerare massimo e minimo della funzione

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 3$$

con vincolo E. Cerchiamo i punti stazionari interni ponendo

$$\nabla g(x, y) = (2x, 4y, -2z) = 0;$$

troviamo quindi un unico punto stazionario in $(0, 0, 0)$ con $g(0, 0, 0) = 3$. Cerchiamo quindi i punti stazionari vincolati; usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$\mathcal{L}(, x, y, z, \lambda) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 3 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1);$$

dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ 4y - 2\lambda y = 0 \\ -2z - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Tale sistema ha come soluzioni $(\pm 1, 0, 0)$ con $\lambda = 1$, $(0, \pm 1, 0)$ con $\lambda = 2$ e $(0, 0, \pm 1)$ con $\lambda = -1$. In corrispondenza di tali punti la funzione g vale rispettivamente 4, 5 e 2. In definitiva, per il problema originale, abbiamo che

$$\max_E f = \ln 5, \qquad \text{assunto nei due punti } (0, \pm 1, 0),$$

mentre

$$\min_E f = \ln 2, \qquad \text{assunto nei due punti } (0, 0, \pm 1).$$

Soluzione 4 Per come è fatto l'insieme, conviene passare alle coordinate cilindriche; tenuto conto che l'insieme di integrazione diventa

$$\begin{aligned}\tilde{E} =&\{(\varrho, \vartheta, t) : t \geq \varrho, \varrho^2 + t^2 \leq 4, \vartheta \in [0, 2\pi]\}\\ =&\{(\varrho, \vartheta, t) : \varrho \in [0, \sqrt{2}], \varrho \leq t \leq \sqrt{4-\varrho^2}, \vartheta \in [0, 2\pi]\},\end{aligned}$$

l'integrale diventa

$$\begin{aligned}\int_E z(x^2 + 2y^2)dxdydz &= \int_{\tilde{E}} t(\varrho^2 \cos^2 \vartheta + 2\varrho^2 \sin^2 \vartheta)\varrho d\varrho d\vartheta dt\\ &= \int_{\tilde{E}} t\varrho^3(\cos^2 \vartheta + 2 \sin^2 \vartheta)d\varrho d\vartheta dt\\ &= \int_0^{\sqrt{2}} d\varrho \int_\varrho^{\sqrt{4-\varrho^2}} dt \int_0^{2\pi} t\varrho^3(\cos^2 \vartheta + 2 \sin^2 \vartheta)d\vartheta = 2\pi.\end{aligned}$$

Soluzione 5 Per la convergenza puntuale notiamo che per ogni x

$$\frac{ne^{-x} + x^2}{n+1} \sim \frac{ne^{-x}}{n} = e^{-x}.$$

Pertanto f_n converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = e^{-x}.$$

Proviamo a vedere se c'è convergenza uniforme calcolando

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{ne^{-x} + x^2}{n+1} - e^{-x} \right|.$$

Introduciamo quindi la funzione

$$g_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+1} - e^{-x} = \frac{x^2 - e^{-x}}{n+1}$$

e tracciamone un grafico su $[0, 1]$. Abbiamo che

$$g_n(0) = -\frac{1}{n+1}, \qquad g_n(1) = \frac{e-1}{e(n+1)},$$

mentre

$$g_n'(x) = \frac{2x + e^{-x}}{n+1}$$

che non si annulla mai in $[0, 1]$. Quindi g_n è strettamente monotona crescente e quindi

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{ne^{-x} + x^2}{n+1} - e^{-x} \right| &= \max_{x\in[0,1]} |g_n(x)| = \max\{|g_n(0)|, |g_n(1)|\|\\ &= \max \left\{ \frac{1}{n+1}, \frac{e-1}{e(n+1)} \right\} = \frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

da cui il fatto che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{ne^{-x} + x^2}{n+1} - e^{-x} \right| = 0.$$

Per il calcolo dell'integrale possiamo quindi usare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale ed otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}.$$

CdL Ingegneria Civile ed Ambientale

Esame scritto di Analisi Matematica II

Ferrara, 22 dicembre 2021

Esercizio 1 [6 punti] Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{2t+1}{y(t)}, \\ \\ y(0) = -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

determinare quindi il dominio della soluzione trovata e tracciarne un grafico qualitativo. Dire infine se esiste $y_0 \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione del Problema di Cauchy con $y(0) = y_0$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 [6 punti] Dire se l'equazione

$$\sqrt[3]{x^2 - y} - 2x + y = 0$$

definisce attorno al punto $(2, 3)$ implicitamente una funzione $y = g(x)$. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di g centrato in $x_0 = 2$.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{3} + x^2 y - 3xy + y^2.$$

Esercizio 4 [6 punti] Dire se il campo

$$F(x, y, z) = (1, ze^{yz}, ye^{yz})$$

è conservativo o meno e determinarne eventualmente il potenziale. Determinare quindi il flusso di F e di rot$F$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x, y \in [0, 2]\}.$$

Esercizio 5 [6 punti] Studiare le varie convergenze della serie di Fourier associata alla funzione 2π–periodica definita per $x \in [-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \pi^2 - x^2;$$

ricavare quindi le somme delle serie numeriche

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{`1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Soluzione 1 L'equazione è a variabili separabili senza soluzioni stazionarie; ricaviamo direttamente la soluzione con dato iniziale $y(0) = y_0$ e troviamo che, integrando

$$\frac{y(t)^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = t^2 + t,$$

da cui

$$y(t)^2 = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + y_0^2 - \frac{1}{2}.$$

Questa identità è valida per ogni $t \in \mathbb{R}$ se

$$y_0^2 - \frac{1}{2} \geq 0,$$

cioè se $|y_0| \geq \sqrt{2}/2$, mentre è definita per

$$2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + y_0^2 - \frac{1}{2} \geq 0,$$

cioè per

$$\left|t + \frac{1}{2}\right| \geq \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{y_0^2}{2}},$$

e quindi dato che il dato iniziale viene assegnato per $t_0 = 0$, la soluzione è definita per

$$t \geq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{y_0^2}{2}}.$$

Nel caso particolare $y_0 = -\frac{1}{2}$ troviamo che la soluzione è data da

$$u(t) = -\sqrt{2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}.$$

definita per $t \in [-\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, +\infty)$.

Soluzione 2 Stiamo considerando la funzione

$$f(x, y) = (x^2 - y)^{\frac{1}{3}} - 2x + y$$

il cui gradiente è dato da

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x}{3}(x^2 - y)^{-\frac{2}{3}} - 2, -\frac{1}{3}(x^2 - y)^{-\frac{2}{3}} + 1\right).$$

Siccome tale gradiente in $(2, 3)$ vale

$$\nabla f(2, 3) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

ne deduciamo che il teorema della funzione implicita si applica in ambo le direzioni, ed in particolare possiamo dire che il livello 0 di f è localmente attorno a $(2, 3)$ grafico di una funzione $y = g(x)$. Per determinare il polinomio di Taylor di g, sapendo che $g(2) = 3$, ricaviamo le sue derivate dall'identità

$$(x^2 - g(x))^{\frac{1}{3}} - 2x + g(x) = 0.$$

Al primo ordine abbiamo che

$$\frac{1}{3}(x^2 - g(x))^{-\frac{2}{3}}(2x - g'(x)) - 2 + g'(x) = 0,$$

da cui $g'(2) = 1$. Al secondo ordine troviamo invece che

$$-\frac{2}{9}(x^2 - g(x))^{-\frac{5}{3}}(2x - g'(x))^2 + \frac{1}{3}(x^2 - g(x))^{\frac{-2}{3}}(2 - g''(x)) + g''(x) = 0,$$

da cui $g''(2) = 2$. Abbiamo quindi che

$$g(x) = 3 + (x - 2) + (x - 2)^2 + o((x - 2)^2).$$

Soluzione 3 Calcoliamo il gradiente di f:

$$\nabla f(x, y) = \left(x^2 y + 2xy - 3y, \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 2y\right);$$

tale gradiente si annulla in cinque punti, $(0, 0)$, $\left(-\frac{3\pm3\sqrt{5}}{2}, 0\right)$, $(1, \frac{5}{6})$ e $(-3, -\frac{9}{2})$. La matrice Hessiana è data da

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy + 2y & x^2 + 2x - 3 \\ x^2 + 2x - 3 & 2 \end{pmatrix};$$

nei punti stazionari tale matrice diventa

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

che è indefinita avendo determinante negativo,

$$Hf\left(-\frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{15}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{5} \\ \frac{15}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

che è indefinita avendo determinante negativo,

$$Hf\left(1, \frac{5}{6}\right) = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva,

$$Hf\left(-3, -\frac{9}{2}\right) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva. Se ne conclude quindi che $(0, 0)$ e $(-\frac{3\pm3\sqrt{5}}{2}, 0)$ sono punti di sella, mentre $(1, 2/3)$ e $(-3, -9/2)$ sono punti di minimo locale stretto.

Soluzione 4 Notiamo anzitutto che

$$\text{rot}F(x, y, z) = 0;$$

dato che $D(F) = \mathbb{R}^3$ che è convesso e quindi semplicemente connesso, se ne deduce che F è conservativo e che

$$\Phi(\text{rot}\, F, \Sigma) = 0.$$

Il potenziale di F si determina imponendo che $F = \nabla U$ e si trova che

$$U(x, y, z) = x + e^{yz} + c.$$

Infine per calcolare l'ultimo flusso richiesto, usiamo la definizione ed orientiamo Σ mediante la normale $(0,0,1)$; si trova che

$$\Phi(F,\Sigma) = \int_{[0,2]^2} F(x,y,0)\cdot(0,0,1)\,dxdy = \int_{[0,2]^2} (1,0,y)\cdot(0,0,1)\,dxdy = \int_{[0,2]^2} ydxdy = 4.$$

Soluzione 5 La funzione data è pari, continua se estesa 2π–periodica su $\mathbb{R}$ e con derivata continua a tratti. La serie di Fourier converge quindi puntualmente ed uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ alla funzione f. Essendo la funzione pari, i coefficienti b_k sono tutti nulli mentre

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - x^2)\cos(kx)dx = -\frac{4}{k^2}(-1)^k.$$

Otteniamo quindi l'identità

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx),$$

che per $x \in [-\pi,\pi]$ diventa

$$\pi^2 - x^2 = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx);$$

valutando questa espressione per $x = 0$ e per $x = \pi$ si trova che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

mentre usando la formula di Parseval si trova che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$