Prove d'esame a.a. 2014–15, 2015–16, 2016–17

Andrea Corli*

6 gennaio 2018

Sono qui raccolti i testi delle prove d'esame assegnati negli a.a. 2014–15, 2015–16, 2016–17, relativi al Corso di Analisi Matematica I (semestrale, 12 crediti), Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, tenuto da me presso l'Università degli Studi di Ferrara.

10/11/2014 - Prima prova parziale

1. Calcolare degli asintotici semplici delle successioni: $a_n = \sqrt[3]{1+\sin\left(\frac{2}{n^2}\right)}-1$, $b_n = \dfrac{(n-1)^{n+1}}{(n+1)^{n-1}}$.
2. Studiare la convergenza (semplice) delle serie: *(a):* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3^n}{n!+2^n}$; *(b):* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. Disegnare i grafici qualitativi delle seguenti funzioni (e i grafici intermedi): $f(x) = 1-\sqrt[3]{|x+2|}$; $g(x) = 1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x-1|}$.
4. Provare che la funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ definita in $[0,\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ è invertibile e disegnare il grafico della sua inversa f^{-1}. Come si puo' esprimere f^{-1} in termini di arctg?
5. Sia f una funzione invertibile. E' vero che i grafici di f e f^{-1} possono intersecarsi solo sui punti della bisettrice $y = x$ del primo e terzo quadrante?
6. Provare, usando la definizione di limite, che $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}\right) = 0$.
7. Calcolare gli asintoti della funzione $f(x) = \dfrac{x+1}{\log|x|}$. Rappresentare graficamente.
8. (Matlab) Sia $\{a_n\}$ la successione definita da $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$ se $n \geq 2$. Calcolare i primi 10 termini della successione e rappresentarli su un grafico.

8/1/2015 - Seconda prova parziale

1. Sia $f_n(x) = x^{-n}$ in $[1,b]$ per $n \in \mathbf{N}$ e $b > 1$. Applicare il Teorema di Lagrange a f_n trovando un punto c_n; dimostrare che è unico. Si calcoli poi c_n nei casi $n = 2$ e $n = 3$. Dire se $c_3 < c_2$ asintoticamente per $b \to +\infty$.
2. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ è invertibile. Calcolare, se possibile, $(f^{-1})'(y)$ nei punti $y = f(1)$ e $y = f(-1)$.
3. Calcolare $\displaystyle\int \sqrt{2x^2+3}\,dx$.
4. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2+2x}{1+|x|}\,dx$.

*Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

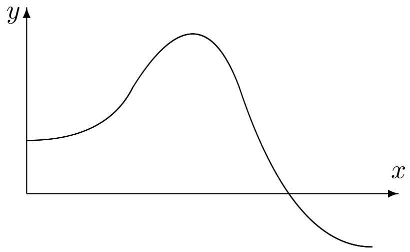
5. Trovare i valori dei parametri $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta \in \mathbf{R}$ tali che l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{|x-1|^\alpha x^\beta}\,dx$ è convergente. Disegnare l'insieme di tali valori in un piano (α, β).
6. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua con $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Provare che esiste il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt$. Provare che tale risultato non vale più togliendo l'ipotesi che $f \geq 0$.
7. (Matlab) Trovare $n \in \mathbf{N}$ tale che $\displaystyle\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx > \sqrt{\pi} - 10^{-3}$; per tale n valutare numericamente l'integrale.
8. Studiare la funzione $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$.

27/1/2015

1. Calcolare estremo superiore, inferiore e, se esistono, massimo e minimo, dell'insieme $E = \left\{e^{(-1)^n n};\ n = 0, 1, 2, \ldots\right\}$.
2. (Matlab) Sia $p(x) = x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 32x + 16$. Numericamente: calcolarne le radici e, usando il comando `polyval`, disegnarne il grafico in coordinate logaritmiche in modo che il grafico sia simile a quello di una retta. Simbolicamente: calcolarne gli zeri e fattorizzarlo.
3. Dire se le successioni $a_n = ne^{-n}$ e $b_n = ne^{-\frac{1}{n}}$ sono (definitivamente) monotone.
4. Siano $f(x) = \log(e^x - 1)$ e $g(x) = e^x \log(e^x - 1)$ due funzioni. Motivare l'esistenza di primitive di f, g e calcolarle (tutte) nel caso in cui esse siano esprimibili tramite combinazione semplici di funzioni elementari.
5. Stabilire per quali numeri reali α e β la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ converge. Disegnare tali coppie (α, β) in un piano.
6. Sia $\alpha \geq 0$. Dire se la funzione $f(x) = \log(1 + |x|)x^\alpha$ è di classe C^1.
7. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^\alpha (1-x)^\beta}\,dx$, con α e β numeri reali.
8. Studiare la funzione $f(x) = \log(1 + e^{-x})$; scrivere l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(0, f(0))$.

17/2/2015

1. Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^\alpha}$, per $q > 0$, $q \neq 1$ e $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.
2. Provare, usando la definizione di limite, che *(a)* $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$ che *(b)* $\lim_{x\to+\infty} x \log x = +\infty$.
3. Si considerino le funzioni sin e cos in $[0, \frac{\pi}{2}]$, $P = (P_1, P_2)$ il punto di intersezione dei loro grafici. *(a)* Stabilire se le tangenti ai loro grafici nel punto P sono perpendicolari. *(b)* Applicare il Teorema di Lagrange alla funzione cos in $[0, \frac{\pi}{2}]$, trovando un punto c; provare che esso e' unico. Dire se è vero che $c < P_1$.
4. Sia $h(x) = (f(x)g'(x))'$; siano poi $p(x) = f(-x)$, $q(x) = g(-x)$, $r(x) = (p(x)q'(x))'$. Che relazione c'è tra h e r?
5. Si consideri l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}\,dx$. Provare che è convergente usando i criteri di convergenza e quindi calcolarne il valore.



6. Si consideri la funzione f il cui grafico è riportato in figura. Si disegnino in un analogo grafico le funzioni $f'(x)$ e $\int_0^x f(y)\,dy$, dando le opportune motivazioni.

7. (Matlab) Si considerino le funzioni $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$, per $n = 1, \ldots, 10$ e $x \in [0, 3]$. Calcolare, in simbolico e col ciclo `for`, le primitive delle f_n e disegnarne i grafici in 10 diverse finestre grafiche. Rappresentare quindi tutte le primitive a command window in una sola riga.

8. Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{\log(\log x)}{\log x}$.

11/6/2015

1. Calcolare il $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(n+1)}{\log(n)}$. Verificare poi il risultato ottenuto tramite la definizione di limite.

2. Studiare la convergenza delle serie *(a)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n\log n}{n^2}$; *(b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$.

3. Sia f una funzione della variabile x. Calcolare una primitiva di *(a)* ff'''; *(b)* $f'\log f$.

4. Si consideri la funzione $f(x) = (1 + x^\alpha e^{-x})^{-\frac{1}{2}}$ definita in $[0, +\infty)$, dove $\alpha \geq 0$. Dire, al variare di α, se f è derivabile in 0 e, in caso affermativo, calcolare $f'(0)$. Disegnare quindi un grafico approssimativo di f vicino a 0.

5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$.

6. Dire per quali $\alpha > 0$ l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{2}{3}})}\,dx$ è convergente.

7. (Matlab) Calcolare il primo numero naturale n tale che $ne^{-n} < 1/100$.

8. Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{e^x}{1-e^{-x}}$.

15/7/2015

1. Dimostrare che la successione $a_n = \left(1 + \dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}\right)^n$ è indeterminata.

2. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n$.

3. Si consideri la funzione f definita da $f(x) = |x|^\alpha \sin\dfrac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione f è continua, per quali è derivabile, per quali è di classe C^1.

4. Provare che $e^x \geq x + 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x + 2\sin x + 1}\,dx$.

6. Studiare la convergenza degli integrali generalizzati $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$.

7. (Matlab) Siano $f(x) = x^2$ e $g(x) = e^{-x}$. Calcolare il punto x_0 in cui $f(x_0) = g(x_0)$; calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico di f, quello di g e l'asse x, per $x \in [0, 1]$; disegnare i grafici di f e g.

8. Studiare la funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{1+x^2}$, in particolare la sua convessità e concavità.

11/9/2015

1. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n! - 2e^n}{n! + e^{2n}}$.

2. Sia $N \in \mathbf{N}$ e $a \in \mathbf{R}$. Dire per quali a converge la serie $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} e^{-an}$ e calcolarne la somma.

3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0\pm} \frac{\log\left(1 + e^{-\frac{1}{x}}\right)}{x}$.

4. Si considerino le funzioni $f(x) = |x-1|$, $g(x) = 1/x$ se $x \in (0, 2]$ e $g(0) = 0$, $h(x) = \sqrt{x}$, definite nell'intervalle $[0, 2]$. Disegnarne un grafico approssimativo. Dire a quali di esse si applica il Teorema di Lagrange; in quei casi, applicarlo e calcolare il punto x_0.

5. Calcolare $\displaystyle\int x \log(x+1)\,dx$.

6. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$.

7. Scrivere un breve script che calcola il punto di minimo e il minimo della funzione $f(x) = (x-3)\sin(2x)$ nell'intervallo $[0, 3]$.

8. Studiare la funzione $f(x) = (x^2 - x - 6)e^x$.

11/1/2016 - Seconda prova parziale

1. Dire a quale classe C^n appartiene la funzione $f(x) = |x|\sin x$.

2. Applicare il Teorema del valor medio e il Teorema della media integrale alla funzione $f(x) = x^3$ nell'intervallo $[a, b]$, determinando esplicitamente i relativi punti. Semplificare i calcoli il più possibile e interpretare il risultato ottenuto.

3. Discutere il valore del limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(x^\alpha - \sin x^\alpha)}{(1-\cos x)^3}$, dove $\alpha \geq 0$.

4. Calcolare $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\,dx$.

5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{(1-\sin x)^2}\,dx$.

6. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\log x dx$.

7. (Matlab) Ricordando che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, determinare $n \in \mathbf{N}$ in modo che $\displaystyle\int_{-n}^{n} e^{-x^2}dx < \sqrt{\pi} - 0.001$.

8. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{|x^2 + x - 2|}$. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

19/1/2016

1. Sia $\alpha \geq 0$; calcolare il $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+n^2} - \sqrt{n^3-n^2}}{\sqrt{n^\alpha + n}}$.

2. Dire per quali $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^\beta}} - 1\right)}$ converge; rappresentare tali valori nel piano (α, β).

3. Calcolare il $\lim_{x\to 2+} (x-2)^{1-\cos(2-x)}$.

4. Provare che non sono soddisfatte le ipotesi per applicare il Teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ nell'intervallo $[0,2]$; provare però che la tesi del Teorema di Lagrange vale ancora, calcolando esplicitamente il punto (i punti) relativi. Disegnare un grafico approssimativo della funzione e interpretare graficamente quanto ottenuto.

5. Calcolare *(a)*: $\displaystyle\int e^x \tanh x \, dx$; *(b)*: $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x + 2\,\mathrm{tg}\, x}\, dx$.

6. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^1 \log\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$. Se convergente, calcolarne il valore e interpretare il risultato ottenuto.

7. (Matlab) Calcolare il polinomio di grado 2 passante per i punti $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,3)$ e disegnarne quindi il grafico. Spiegare brevemente il significato dei due comandi più importanti utilizzati.

8. Sia $a > 1$; studiare il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{a^x - 1}$. Mostrare graficamente come variano i grafici al variare di a.

9/2/2016

1. Calcolare, se esiste, il $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2^n + 3^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

2. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \log n}$.

3. Siano $f, g : [0,1] \to [0,1]$ strettamente convesse di classe C^2, con f crescente, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = 0$ e g decrescente, $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, $g'(1) = 0$; disegnare un grafico approssimativo di f e g. Provare che $F(x) = \frac{f(x)}{f(x)+g(x)}$ ha almeno un punto di flesso.

4. Calcolare la media integrale della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x} + 1}$ nell'intervallo $[0,2]$.

5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

6. Provare che l'integrale $\displaystyle\int_0^\infty e^{te^{-t}}\, dt$ è divergente; quindi, calcolare il $\lim_{x\to\infty} e^{-x} \displaystyle\int_0^x e^{te^{-t}}\, dt$.

7. (Matlab) Creare uno script che produca due figure; nella prima vengono riportati i grafici delle funzioni x^n per $n = 1, \ldots 5$ e $x \in [0, 100]$; nella seconda, i grafici di e^{nx} per gli stessi n e x. Si scelga una scala opportuna in modo che tutti i grafici siano rette.

8. Studiare la funzione $f(x) = e^x + 2e^{-3|x|}$.

10/6/2016

1. Dire se la successione $a_n = \sqrt[n]{(-1)^n n}$ è convergente, divergente o indeterminata, motivando in dettaglio il perché.
2. Stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n \log |q|^n$ per $q \neq 0$.
3. Disegnare il grafico della funzione $g(x) = \max\{x, x^2\}$. Dire se è continua e se è derivabile.
4. Stabilire il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$. Calcolare i $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. Dire se f ammette asintoti a $\pm\infty$.
5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.
6. Utilizzando il criterio del confronto asintotico provare che l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx$ è convergente. Quindi calcolare il suo valore.
7. (Matlab) Creare uno script che, utilizzando il ciclo `for`, disegni il grafico della funzione $f(x) = \{x\}$ nell'intervallo $[0, 6]$.
8. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^3}$.

12/7/2016 - Prova scritta di Analisi Matematica I - L.T. Ing. Civile e Ambientale

Non è consentita la consultazione di libri, quaderni, macchine calcolatrici. Svolgere i seguenti esercizi, riportando il maggior numero possibile di passaggi e motivazioni: non riportare il solo risultato finale. Consegnare solo questo foglio e non altri di mala copia.

1. Calcolare, se esiste, il $\lim_{n\to\infty} \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)$.
2. Stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{\frac{(-1)^n}{n}})$.
3. Provare che per ogni $x \in [0, \infty)$ esiste un unico $y \in [0, \pi/2)$ tale che $\sin y + e^{-x} = 1$. Questo definisce una funzione $y = y(x)$ definita in $[0, \infty)$; dare una espressione esplicita della funzione y e disegnarne un grafico approssimativo.
4. Esistono due funzioni (distinte) f e g due funzioni definite nell'intervallo $[0, 1]$, con $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$ e $f'(x) \leq g'(x)$ per ogni $x \in [0, 1]$?
5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1 - x}} dx$.
6. Studiare la convergenza degli integrali generalizzati $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\log(1 + x^\alpha)} dx$ e $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\log(1 + x^\alpha)} dx$ per $\alpha > 0$.
7. (Matlab) Creare uno script che, utilizzando il ciclo `for`, disegni il grafico della funzione $f_n(x) = \frac{x}{n}$ nell'intervallo $[0, \frac{1}{n}]$, per $n = 1, \ldots, 10$.
8. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)(x + 2)}$.

8/9/2016

1. Dire se esiste il $\lim_{n\to\infty} n(1+\sin^2 n)$ e quanto vale. In caso affermativo, verificare il risultato ottenuto tramite la definizione di limite.

2. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, per $\alpha > 0$.

3. Trovare il punto $x_0 > 0$ in cui la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ forma un angolo di $\pi/4$ con l'asse delle ascisse.

4. Calcolare il dominio delle seguenti funzioni e dire dove esse sono derivabili: $f(x) = \arcsin\left(\log \frac{x}{a}\right)$ per $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$; $g(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

6. Calcolare i punti di massimo e minimo della funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

7. (Matlab) Sia $\{a_n\}$ la successione definita da $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2}}$. Calcolare e disegnare i primi 20 termini della successione usando un ciclo `for`.

8. Studiare la funzione $f(x) = (x+1)\log^2(x+1)$.

10/11/2016 - Prima prova parziale

1. Calcolare il $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n - (-2)^n}{\cos n + (-2)^n}$.

2. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$ per $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$.

3. Verificare dalla definizione di limite che $\lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty$.

4. Sia $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Calcolare $f \circ g \circ g \circ f$, specificandone il dominio. Disegnarne il grafico.

5. Sia $f : (3\pi/2, 5\pi/2) \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \operatorname{tg} x$. Dire se f è invertibile; in caso affermativo, calcolarne la funzione inversa specificando dominio, immagine e grafico.

6. Discutere gli asintoti della funzione $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-3}$. Rappresentare con un grafico.

7. Sia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x^\alpha(1-\cos x)}{\sin x^\beta}$, per $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Dire per quali (α, β) la funzione f è prolungabile per continuità a 0; disegnare nel piano (α, β) l'insieme di tali coppie e scrivere il prolungamento di f.

8. (Matlab) Sia $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = xe^x$ per $x \in [-2, 0]$ e $f(x) = \sqrt{x}(x-2)$ per $x \in (0, 2]$. Disegnare il grafico di f, calcolarne minimo e punto di minimo.

10/1/2017 - Seconda prova parziale

1. Dire in che sottoinsieme di $\mathbf{R}$ è di classe C^1 la funzione $f(x) = \begin{cases} \log(1+x) & \text{se } x \geq 0, \\ |1+x| - 1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$ e disegnarne un grafico approssimativo.

2. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 3 nel punto 2 della funzione $f(x) = x \log x$.

3. Applicare il Teorema di Lagrange a $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ in $[0, a]$ con $a \in (0, \frac{\pi}{2})$, trovando un punto $c = c(a)$. Spiegare perché le ipotesi di tale teorema sono soddisfatte; rappresentare con un disegno; calcolare $\lim_{a \to \frac{\pi}{2}-} c(a)$.

4. Calcolare $\displaystyle\int e^{2x} \log(1 + e^x)\, dx$.

5. Sia $a > 1$; calcolare la media integrale della funzione $\log\left(\frac{x+1}{x}\right)$ nell'intervallo $[1, a]$. Detto $M(a)$ tale valore, trovare un punto $c \in [1, a]$ in cui $f(c) = M(a)$.

6. Studiare la convergenza degli integrali generalizzati *(a):* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1 + x^2}\, dx$ e *(b):* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2(x-1)^2}\, dx$.

7. (Matlab) Trovare un valore $a > 0$ tale che $\displaystyle\int_a^1 \frac{\sin x}{x^2}\, dx > 10$. Spiegare perché questo è possibile.

8. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \mathrm{arctg}\left|x^2 - 1\right|$.

20/1/2017

1. Calcolare il $\lim_{n \to \infty} (\log_3(n + 1) - \log_2(n))$.

2. Per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ e $a > 0$ converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha 2^n}{(n + 1)^3 a^n}$? Dire quando si riesce a calcolare la somma e, in tal caso, calcolarla.

3. Sia consideri la funzione f definita da $f(x) = x \log x$ per $x > 0$ e $f(0) = 0$. Disegnare un grafico approssimativo di f; dire in quali intervalli f è invertibile; calcolare dominio e immagini delle relative funzioni inverse, disegnarne i grafici; dire se il grafico di una di queste funzioni interseca il grafico di f.

4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x - \log x}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int e^x \tanh(x)\, dx$.

6. Studiare la convergenza degli integrali generalizzati *(a)*: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x - e^{-x}}\, dx$; *(b)*: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x + x^2}\, dx$.

7. (Matlab) Per $n = 1, \ldots, 10$ usare un ciclo `for` per disegnare i grafici delle funzioni $f_n(x) = \frac{\sin x}{x}$ in $[0, n]$ (ognuno in una diversa finestra grafica) e calcolarne l'integrale definito in quell'intervallo.

8. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \log(x + x^2)$.

13/2/2017

1. Dire per quali $\alpha > 0$ la successione $\dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n^\alpha}$ converge a 0.

2. Siano $\alpha > 0$ e $\beta > 0$; studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 1)^\alpha - (n - 1)^\beta}$.

3. Si consideri la funzione $f(x) = \left(2 + \sin(\frac{1}{x})\right)\sqrt{x}$. Dire se esistono, e in caso affermativo calcolarli, i $\lim_{x \to 0+} f(x)$ e $\lim_{x \to 0} f'(x)$; dire se f è derivabile in 0.

4. Dire in quali intervalli è convessa la funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\cos t}\, dt$.

5. Calcolare $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$.

6. Primo anno: Calcolare il polinomio di Taylor di grado 1 e centro e della funzione $\log x$; discutere la convergenza dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\log x - 1}\,dx$. Secondo anno: convergenza dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\log x}\,dx$.

7. (Matlab) Dai i punti $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(3,1)$, calcolare e plottare il polinomio di grado 3 passante per quei punti.

8. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}\,e^{\frac{1}{x}}$.

7/6/2017

1. Verificare in base alla definizione che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+7n+6}{n+3} = +\infty$.

2. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}}$.

3. Dire per quali $\alpha \geq 0$ la funzione f definita in $[0,\infty)$ da $f(x) = x^\alpha \sin\frac{1}{x}$ se $x>0$ e $f(0)=0$ è, rispettivamente, continua, derivabile, di classe C^1.

4. Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-3x^2}\,dx$.

6. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}\left(1-e^{-\frac{1}{x^2}}\right)dx$.

7. (Matlab) Disegnare il grafico della funzione f definita da $f(x)=x$ se $x\in[0,1)$, $f(x)=\frac{x-1}{2}$ se $x\in[1,2)$, $f(x)=\frac{x-2}{3}$ se $x\in[2,3]$ usando un ciclo `for`.

8. Studiare il grafico della funzione $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x+1}}$.

10/7/2017

1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti: *(a):* $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n!}$, *(b):* $\lim_{n\to\infty} n!\sin(\frac{1}{n})$, *(c):* $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n!}$.

2. Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n+1)-\log n}{\log(n+1)\log n}$.

3. Dire quali dei seguenti limiti esistono e quali no; in tutti i casi motivare la risposta.
(a): $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}$; *(b):* $\lim_{x\to+\infty}\sin(x^2)$; *(c):* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^3}$.

4. Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$, definita per $x>0$. Dire se f può essere estesa per continuità a $[0,+\infty)$ e, in caso affermativo, se tale funzione è derivabile nel punto 0.

5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

6. Sia $a\in\mathbf{R}$, $a>0$. Si considerino le funzioni $1-ax^2$ e ax^2 nell'intervallo $[0,1]$ e si indichi con $b(a)\in[0,1]$ l'ascissa del punto di intersezione dei grafici. Calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni $1-ax^2$ e ax^2, per $x\in[0,b(a)]$.

7. (Matlab) (Si veda l'esericizio precedente) Si considerino le funzioni $1-ax^2$ e ax^2 nell'intervallo $[0,1]$ e si indichi con $b(a)$ l'ascissa del punto di intersezione dei grafici. Per $a = 1,\ldots,5$, usare un ciclo `for` per disegnare i grafici di queste funzioni nell'intervallo $[0,b(a)]$ e calcolare l'integrale della regione di piano compresa tra i loro grafici, relativa all'intervallo $[0,b(a)]$.

8. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$.

18/9/2017

1. Studiare la convergenza delle serie *(a)*: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sin n}}{n}$, *(b)*: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sin n}}{n^2}$.

2. Disegnare un grafico approssimativo della funzione $f(x) = \mathrm{tg}(\frac{1}{x})$.

3. Dire per quali valori di a,b,c,d la funzione f è continua, per quali di classe C^1, per quali di classe C^2.
$$f(x) = \begin{cases} a+bx+x^3 & \text{se } x<0, \\ c+dx+x^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

4. Si consideri la funzione $f(x) = x^2$ e il punto $P = (1,0)$. Calcolare la retta (non orizzontale) passante per P e tangente al grafico della funzione f.

5. Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\cos x}$.

6. Provare che l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x\, e^{-x}\, dx$ è convergente utilizzando i criteri di convergenza e poi calcolarlo.

7. (Matlab) Usare un ciclo `for` per risolvere l'equazione $\mathrm{tg}(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo $(0,10]$.

8. Studiare il grafico della funzione $f(x) = x^3(x^2-1)$.