Prove d'esame a.a. 2010–2011

Andrea Corli*

21 settembre 2011

Sono qui raccolti i testi delle prove d'esame assegnati nell'a.a. 2010–11, relativi al Corso di Analisi Matematica I (semestrale, 12 crediti), Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, tenuto da me presso l'Università degli Studi di Ferrara.

15-11-2010 - Prima prova parziale

1. Sia $A = \left\{ \dfrac{|\sin n|}{n} : n = 1, 2, \ldots \right\}$. Calcolare $\inf A$; è un minimo?
2. Sia $\{a_n\}$ una successione con $a_n \ge 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; è vero allora che $\{a_n\}$ ha massimo?
3. Siano $1 < a < b$ due numeri reali. E' vero che $\log_a(2n) < \log_b n$ definitivamente?
4. Esiste il $\lim_{n\to\infty}(3 + \sin n)^n$? Se sì, calcolarlo con la definizione di limite. Se no, motivare la risposta.
5. Calcolare *(a):* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{3n^2+n+1}}{\sqrt{2n^3+n+1}}$; *(b):* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n+1}} - 2^{\sqrt{n}}}$
6. Studiare il carattere delle seguenti serie: *(a):* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$; *(b):* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-\sqrt{n}+n}$.
7. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$.
8. Disegnare un grafico approssimativo delle funzioni $f(x) = \dfrac{1}{|\log_3 |x||}$; $g(x) = \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\sin x$.
9. Disegnare un grafico approssimativo della funzione $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ in $(0, +\infty)$; provare che è invertibile, calcolare f^{-1} e disegnarne il grafico.
10. Scrivere uno script in MatLab per calcolare le prime 10 somme parziali della serie armonica generalizzata con $\alpha = -1/2$ e rappresentarne i valori in un grafico. Calcolare inoltre il valore massimo di tali somme.

21-1-2011 - Seconda prova parziale

1. Dire se la funzione $f(x) = \log(1 + e^x)$ ha asintoti e, in caso affermativo, calcolarli. Disegnare infine un grafico approssimativo di f.
2. Dire se la funzione $\sqrt{|x|} \cdot \sin(\sqrt{|x|})$ è, rispettivamente, continua, derivabile, di classe C^1.
3. Dire per quale $\alpha \ge 0$ si ha che il $\lim_{x\to 1-} \dfrac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{(1-x)^\alpha}$ esiste finito, e in tali casi calcolarlo.

*Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

4. Calcolare tutte le primitive di $f(x) = x \log(1+x)$.

5. Sia f la funzione definita in $[0,2]$ da $f(x) = x$ se $x \in [0,1]$ e da $f(x) = 2 - x$ se $x \in [1,2]$. Disegnare il grafico di f, calcolare la sua funzione integrale relativa al punto 0, disegnare il grafico di tale funzione integrale.

6. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} x2^{-x}\, dx$. Disegnare un grafico approssimativo della funzione $x2^{-x}$.

7. Scrivere un breve script in MatLab che confronti la derivata "esatta" con la derivata "numerica" di una funzione assegnata. Commentare brevemente.

8. Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}$ e disegnarne il grafico.

1/2/2011

1. Calcolare $\lim_{n\to\infty}(10^n - 9^n)$. Verificare quindi il risultato ottenuto utilizzando la definizione stessa di limite.

2. Studiare il carattere delle serie *(a):* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$; *(b):* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, dove $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$.

3. Calcolare una primitiva della funzione $\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

4. Si consideri la funzione $f(x) = \log_2(\log_4(x+1))$. Stabilirne il campo di esistenza, studiarne gli asintoti, calcolarne la derivata, tracciarne un grafico approssimativo, dire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolare esplicitamente l'inversa.

5. Calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$, per $x \in [0, 2\pi]$. Rappresentare con un disegno tale area.

6. Si consideri la funzione $f(x) = e^{-x} \sin x$, definita per $x \in [0, +\infty)$. Disegnarne un grafico approssimativo. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x$. Dire se f è assolutamente integrabile in $[0, +\infty)$.

7. Scrivere un breve script in MatLab per disegnare il grafico di una funzione *(a):* in un sistema di riferimento con uno solo degli assi in scala logaritmica (specificare quale) e *(b):* con entrambi gli assi in scala logaritmica.

8. Studiare la funzione $f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$ e disegnarne il grafico.

22/2/2011

1. Calcolare $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ giustificando tutti i passaggi.

2. Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{\log n}}$.

3. Dare un esempio di una funzione f, definita in un intervallo non vuoto I, tale che la composizione $(f \circ f)(x)$ non si possa fare per nessun $x \in I$.

4. Trovare un asintotico, sotto forma di funzione razionale, di $\operatorname{tg} x$ per $x \to \frac{\pi}{2}$.

5. Calcolare le derivate delle funzioni *(a):* $\dfrac{1}{\arcsin\sqrt{f(x)}}$, *(b):* $\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{\frac{1}{g(x)}}$.

6. Siano $0 < a < b$ due numeri reali. Applicare il teorema del valor medio di Lagrange alla funzione $f(x) = x^3$ nell'intervallo $[a, b]$ per determinare il punto x_0 (in cui la tangente ha la pendenza della retta per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$). Rappresentare con un disegno e dare una motivazione teorica al fatto che x_0 è unico.

7. Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$.

8. Studiare la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \log^2 x} dx$.

9. Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{|x|}{1 + x^3}$.

7/3/2011

1. Calcolare $\lim_{n\to\infty}(1 + \log n) \log n$. Verificare quindi il risultato usando la definizione di limite.

2. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{\sqrt{n!}}$.

3. Sia $\alpha \geq 0$; calcolare un asintotico semplice di $\dfrac{\sin^\alpha x}{1 - \cos^\alpha x}$ per $x \to 0$. Stabilire quindi per quali α si ha che $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^\alpha x}{1 - \cos^\alpha x} = 0$.

4. Calcolare la derivata di $x^{f(x)}$ e di $\dfrac{1}{f\left(\frac{1}{g(x)}\right)}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1}{x} - 1}\, dx$.

6. Sia $f(x) = x(1 - x)$ e r la retta di equazione $y = mx$. Per quali $m \geq 0$ la retta interseca il grafico di f (in punti diversi dall'origine)? Per tali m calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico di f e la retta. Rappresentare con un disegno.

7. Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$.

13/6/2011

1. Scrivere i primi cinque termini della progressione geometrica di primo elemento 3 e ragione $1/2$; indichiamo con $\{a_n\}$ la successione dedotta da tale progressione. Scrivere i primi cinque termini della progressione geometrica di primo elemento $1/3$ e ragione 2; indichiamo con $\{b_n\}$ la successione dedotta da tale progressione. Calcolare il $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}$.

2. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}}$.

3. Dire se $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ e $g(x) = \dfrac{\cos^2(3x) - 1}{x^2}$ sono prolungabili per continuità in 0. In caso affermativo, definirne il prolungamento.

4. Si consideri la funzione $f(x) = x^3$ e la retta r tangente al grafico di f in un punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$, $x_0 > 0$. In quale altro punto Q del grafico la retta r interseca il grafico di f?

5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile con $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m \neq 0$. E' allora vero che f ha un asintoto obliquo a $+\infty$?

6. Calcolare la primitiva F di $f(x) = x \log(x-1)$ che vale 0 nel punto 2.

7. Calcolare $\displaystyle\int_1^{+\infty} (1 - \tanh x)\, dx$.

8. Studiare la funzione $f(x) = (x^2 - 1)^2$, specificandone in particolare la convessità e gli asintoti obliqui. Come sviluppare f in MatLab nella somma di monomi? Scrivere un breve script in MatLab per rappresentare nello stesso grafico f e f' con una opportuna legenda.

11/7/2011

1. Usando la definizione di limite verificare che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n + (-1)^n} = 0$.

2. Dire per quali $\alpha > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha - 1}\right)$ converge.

3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2(\log_3 x)}{\log_3(\log_2 x)}$.

4. Sia f la funzione definita nell'intervallo $[-2,2]$ in questo modo: $f(x) = x^2 + 2x$ se $x \in [-2,-1)$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ se $x \in [-1,1)$, $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)$ se $x \in [1,2]$. Disegnare il grafico di f; discuterne la continuità e la derivabilità.

5. Sia $a \in \mathbf{R}$, $a \geq 1$. Calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = x^{1/a}$ e $g(x) = x^a$, per $x \in [0,1]$. Fissato $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$, determinare a in modo che l'area valga $1/k$.

6. Disegnare un grafico approssimativo di $f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$. Dire se è convergente l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$.

7. In MatLab, creare una function che definisca la funzione $f(t) = e^t - \log t$; creare quindi uno script (il più breve possibile) che ne disegni il grafico e ne calcoli gli eventuali zeri.

8. Studiare la funzione $f(x) = e^{-x^3}$.

5/9/2011

1. Sia $\{a_n\}$ una successione, con $a_n \neq 0$ per ogni n. Dire se le seguenti due affermazioni sono vere o false (motivando):
(a)"$\{a_n\}$ non ha limite $\Rightarrow \{1/a_n\}$ non ha limite"
(b)"$\{a_n\}$ è limitata $\Rightarrow \{1/a_n\}$ è limitata".

2. Trovare un asintotico della successione $a_n = \log(\sin \frac{1}{n})$; studiare quindi la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$.

3. Calcolare il $\lim_{x\to 0} \log(1+x)$ motivando la risposta. Verificare il risultato usando la definizione di limite (dato ϵ trovare δ...).

4. Si consideri la parabola di equazione $y = x^2$. Provare che due rette, tangenti al grafico in punti diversi, si incontrano sempre, calcolando il punto di intersezione. Rappresentare con un disegno.

5. Si consideri la funzione f definita in $\mathbf{R}$ da $\frac{\sin x}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$. Disegnare un grafico approssimativo di f. Dire se f è derivabile in 0; in caso affermativo calcolare $f'(0)$.

6. Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}\, dx$.

7. Calcolare $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \, dx$.

8. Studiare la funzione $f(x) = x(1-x)e^{-x}$.

15/9/2011

1. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\sqrt{n}}$.

2. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-5}{n^2}$.

3. Dare un esempio di una funzione f che ha la retta $y = 1$ come asintoto orizzontale a $+\infty$ e che interseca tale retta infinite volte.

4. Sia $f(x) = \log_{\log x} x$. Calcolare il dominio di f e i punti in cui essa è derivabile. In tali punti calcolarne la derivata.

5. Calcolare $\displaystyle\int \sin\left(\sqrt[3]{x}\right) \, dx$.

6. Dire se è convergente l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$.

7. Scrivere un breve script in Matlab che calcola il polinomio di grado 2 che passa per i punti $(0,0)$, $(1,0)$, $(3,3)$ e ne disegna il grafico.

8. Studiare la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$, specificando in particolare la continuità, la derivabilità, gli eventuali asintoti. Omettere lo studio della derivata seconda.