Prove d'esame a.a. 2009–2010

Andrea Corli*

1 settembre 2011

Sono qui raccolti i testi delle prove d'esame assegnati nell'a.a. 2009–10, relativi al Corso di Analisi Matematica I (semestrale, 12 crediti), Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, tenuto da me presso l'Università degli Studi di Ferrara.

13/11/2009 - Prima prova parziale

1. Calcolare, se esistono, min, max, sup, inf dell'insieme $E = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\,;\ n = 1, 2, \ldots\right\}$. Dire se l'insieme E è limitato.
2. Calcolare: *(a)*: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 7^n}$, *(b)*: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}{2\arctan(n)\sqrt{n} + \sin(n)}$.
3. Determinare il carattere delle seguenti serie: *(a)*: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2n^2}{n+4}}$, *(b)*: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n + \sin n}$.
4. Calcolare: *(a)*: $\lim_{x\to 0\pm} xe^{-1/x}$, *(b)*: $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt[3]{x^3+2x^2}\right)$.
5. Dire per quali valori di a e b la seguente funzione f è continua in $\mathbf{R}$:
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x^2} + b & \text{se } x \in [0,1] \\ x^2 + bx + a & \text{se } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)\,. \end{cases}$$
6. Siano $f(x) = \log(1 + x^2)$, $g(x) = \log(1 + x^3)$. Dire se sono invertibili o meno, e, in caso affermativo, calcolarne la funzione inversa.
7. È periodica la funzione $f(x) = \sin\left(2\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)$? In caso affermativo, determinarne il periodo.
8. Sia $f(x) = e^{-x}$; disegnare approssimativamente, in un unico piano cartesiano, i grafici delle funzioni: $f(x)$, $f(2x)$, $f(x/2)$. In un altro piano disegnare i grafici di $f(x-1)$, $f(x)-1$. In un ultimo piano i grafici di $f(|x|)$, $f(-x)$, $-f(x)$.

8/1/2010 - Seconda prova parziale

1. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{1 + \ln|x|}$, determinarne il dominio; dire se f può essere estesa per continuità in $x = 0$. Dire infine se tale estensione è di classe C^1.
2. Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$.
3. Determinare massimo e minimo della funzione $f(x) = \dfrac{|x|^3}{3}\sqrt{1-x^2}$ nell'intervallo $[-1, 1]$.
4. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$.

*Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

5. Calcolare la media integrale della funzione $\cos x$ nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Determinare, come nel teorema della media integrale, un valore $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ per il quale $\cos c$ coincide con la media integrale.

6. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

7. Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^2}{2-x^2} dx$.

8. Tracciare un grafico approssimativo di $x^2 e^{-x}$ e calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.

19/1/2010

1. Determinare sup ed inf (max e min), dell'insieme $A = \{n(n-2)(n-5), n = 0, 1, \ldots\}$.

2. Studiare il comportamento della successione $a_n = \sqrt{n^2+2n+1} - \sqrt{n^2+2}$.

3. Studiare la convergenza, semplice e assoluta, della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{2+n^2} - n\right)$.

4. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

5. Determinare $a, b \in \mathbf{R}$ in modo che la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \le 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$ sia di classe C^1 in $\mathbf{R}$. Per tali a, b tracciare poi un grafico approssimativo.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_1^2 x \log(1+x^2) dx$.

7. Dire se il seguente integrale improprio è convergente: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2 + \sqrt{x}} dx$.

8. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\cos x}$.

8/2/2010

1. Determinare sup ed inf (max e min), dell'insieme $A = \left\{\dfrac{x}{x-1};\ x \in (1, +\infty)\right\}$.

2. Trovare un asintotico semplice delle successioni $a_n = \dfrac{n^2-1}{n+1} - n + \dfrac{n-2}{n+2}$, $\quad b_n = n - \sqrt{n^2+n}$.

3. Studiare la convergenza, semplice e assoluta, della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{e^n}$.

4. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+x^2)}{\ln x}$.

5. Determinare tutti gli $a, b \in \mathbf{R}$ in modo che la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \le 0 \\ b\ln(x+1) & x > 0 \end{cases}$ sia di classe C^1 in $\mathbf{R}$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} dx$.

7. Dire se il seguente integrale improprio è convergente: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln(1+x)}}dx$.

8. Studiare il grafico della funzione (lo studio della derivata seconda è facoltativo) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}$.

19/3/2010

1. Determinare max e min dell'insieme $A = \{(n+2)n(n-3), n = 0, 1, 2, \ldots\}$.

2. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$.

3. Trovare un asintotico semplice della funzione $f(x) = \log(1 + \frac{1}{x})\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right)$ per $x \to +\infty$. Calcolare poi il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4. Sia $f(x) = \sqrt{1-|x|}$. Determinarne il campo di esistenza e studiarne continuità e derivabilità. Tracciarne quindi un grafico approssimativo.

5. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$.

6. Calcolare $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$.

7. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$.

12/4/2010

1. Applicare la definizione di limite per provare che $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-1} = 1$.

2. Stabilire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^a}{n!}$ converge.

3. Calcolare il $\lim_{x\to 0+} x^{\log(1+x)}$.

4. Calcolare formalmente la derivata di $f(x)^{\frac{1}{g(x)}}$.

5. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

6. Si consideri la funzione $f(x) = e^{-x}\sin x$. Se ne tracci un grafico approssimativo e si calcoli quindi $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

7. Si consideri la funzione $f_a(x) = x^3 - 3x + a$, con $a \in \mathbf{R}$. Studiare il grafico di f_a al variare del parametro a, specificando in particolare il numero degli zeri di f_a.

22/6/2010

1. Studiare i limiti delle successioni $a_n = 3^n + (-2)^n$ e $b_n = 2^n + (-3)^n$. (V.O. solo a_n).

2. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+(-2)^n}$.

3. (a) Dare un esempio di una funzione derivabile che abbia $y = x$ come retta tangente al grafico nel punto $(0, 0)$ e $y = 1 - x$ come retta tangente al grafico nel punto $(1, 0)$.

   (b) Dare un esempio (motivandolo) di una funzione limitata che ha un massimo assoluto in un punto di non derivabilità. (V.O. solo (a)).

4. Calcolare il $\lim_{x\to 0+} \ln x \cdot \ln(1+x)$.

5. Calcolare la derivata della funzione $\big(f(x)\cdot g(x)\big)^{h(x)}$.

6. Scrivere la funzione integrale relativa al punto $x_0 \in \mathbf{R}$ della funzione $f(x) = x\sqrt[3]{1-x}$.

7. Calcolare l'integrale generalizzato $\int_1^\infty \frac{1}{(1+x)(2+x)}\, dx$.

8. Studiare la funzione $f(x) = x^3 + \frac{2}{x} - x$.

25/6/2010

1. Calcolare il $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$.

2. Dire per quali $a > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+a^n)}$ converge.

3. Sia $f(x) = x\sqrt[3]{|x|}$. Disegnare un grafico approssimativo di f; dire se f è continua, se è derivabile, se è due volte derivabile.

4. Sia $n \in \mathbf{N}$. Applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = x^n$ nell'intervallo $[1,2]$. Fare un disegno che rappresenti quanto calcolato.

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x)^{\ln g(x)}$.

6. Calcolare $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x-\sqrt{x}}\, dx$.

7. Dire se l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^3}\, dx$ converge.

8. Studiare la funzione $f(x) = x^3 + 7x^2 + 2x + 1$, specificando in particolare quanti zeri ha.

15/7/2010

1. Calcolare il $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1 - 1\cos(e^{1/n} - 1)}$.

2. Studiare la convergenza delle serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$.

3. Sia $f(x) = -x|x|$. Disegnare un grafico approssimativo di f; dire se f è invertibile e, in caso affermativo, calcolarne la funzione inversa.

4. Esistono funzioni continue invertibili non monotone?

5. Si consideri la funzione $f(x) = \sin x + \cos x$ in $[0,\pi]$. Si tracci un grafico approssimativo di f e se ne calcoli la media integrale M. Applicare il teorema della media integrale per trovare un punto $c \in [0,\pi]$ tale che $f(c) = M$.

6. Calcolare l'area della regione di piano, giacente nel primo quadrante, limitata dal semiasse positivo delle x, dalla retta $y = x$ e dal grafico della funzione $f(x) = 1 - x^2$.

7. Dire se l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\, dx$ converge e, in caso affermativo, calcolarne il valore.

8. Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$, con particolare riferimento alla derivabilità e convessità.

16/9/2010

1. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

2. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$.

3. Dire se è continua la funzione $f(x) = \sin(\pi \mathrm{sgn}(x))$.

4. Sia $f(x) = xe^x$. Provare che f è invertibile in un intorno del punto 1 e calcolare $(f^{-1})'(e)$.

5. Siano f e g due funzioni continue definite nell'intervallo $[a,b]$ con $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Usare il teorema degli zeri per provare che esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = g(c)$.

6. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}\,dx$.

7. Studiare la convergenza dei seguenti due integrali generalizzati, senza calcolarli:
$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx,\quad \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-\cos x}\,dx.$$

8. Studiare la funzione $f(x) = e^{1/x}$.