La probabilità condizionata

Nel calcolo delle probabilità, spesso si ha a che fare con situazioni di causa - effetto. Ci domandiamo quindi come si modifichi la probabilità di un evento, se si dispone di qualche informazione "parziale". Supponendo che sia accaduto l'evento B, qual è la probabilità che si verifichi anche l'evento A?
Per rispondere a questa domanda, partiamo dal considerare il seguente esempio.

Consideriamo il lancio di un dado equo e supponiamo di voler trovare la probabilità che esca un numero dispari, sapendo che è uscito un numero primo.
Sia $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ lo spazio campione. Indichiamo con A, B gli eventi:
A: "è uscito un numero dispari" $\Longrightarrow A = \{1, 3, 5\}$
B: "è uscito un numero primo" $\Longrightarrow B = \{2, 3, 5\}$
Per ipotesi sappiamo che si è verificato l'evento $B \subset \Omega$. Lo spazio campione che consideriamo è stato "ristretto" ed è costituito da 3 elementi, anziché 6. Inoltre sono "diminuiti" i casi favorevoli da 3 a 2. Pertanto utilizzando la definizione classica della probabilità, la probabilità di A, sapendo che si è verificato B è

$$\frac{\#\text{ casi favorevoli}}{\#\text{ casi possibili}} = \frac{2}{3}$$

Scriveremo che

$$P(A \mid B) = \frac{2}{3}$$

Si parla in questo caso di <u>probabilità condizionata</u>.

Definizione.
Siano A, B due eventi di uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La probabilità condizionata dell'evento A, dato l'evento B, è

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ con } P(B) > 0$$

Osservazione.
Dalla formula della probabilità condizionata segue la <u>regola del prodotto</u>:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

La regola è utile per calcolare la probabilità delle intersezioni e si generalizza:

- Dati tre eventi A, B, C tali che $P(A \cap B) > 0$

$$P(A \cap B \cap C) = P(C \mid A \cap B) \cdot P(B \mid A) \cdot P(A)$$

  Infatti

$$P(C \mid A \cap B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \mid A) \cdot P(A)}$$

- Dati n eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$ tali che $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) > 0$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Eventi indipendenti

Definizione.

Siano $A, B \in \mathcal{A}$ due eventi di uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, con $P(B) > 0$. Si dice che A e B sono indipendenti se il verificarsi di B non modifica la probabilità di A, ossia

$$P(A \mid B) = P(A)$$

In tal caso

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

La definizione si generalizza ad n eventi, ad esempio nel caso $n = 3$:
$A, B, C \in \mathcal{A}$ sono indipendenti, se lo sono a due a due.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) , P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) , P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

Dunque,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

<u>Differenza tra eventi incompatibili ed eventi indipendenti</u>

I due concetti non sono in relazione tra loro.
Eventi incompatibili: dal punto di vista probabilistico, il verificarsi di uno esclude il verificarsi contemporaneo dell'altro. $P(A \cap B) = 0$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Eventi indipendenti: dal punto di vista probabilistico, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Osservazione.
Incompatibili $\Longrightarrow$ Indipendenti $\Leftrightarrow$ $P(A) \cdot P(B) = 0$ $\Leftrightarrow$ $P(A) = 0 \text{ oppure } P(B) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset \text{ oppure } B = \emptyset$.

Esempi. Consideriamo il lancio di un dado equo

1. Siano $A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 3\}$ due eventi.
   $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow$ eventi incompatibili $\Longrightarrow P(A \cap B) = 0$
   $$P(A) = \frac{1}{2};\ P(B) = \frac{1}{3} \Longrightarrow P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \neq 0$$
   Ossia $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Longrightarrow$ gli eventi non sono indipendenti
   Gli eventi A, B sono incompatibili, ma non indipendenti.
2. Siano $A = \{2, 3, 5\}, B = \{3, 6\}$ due eventi.

   $A \cap B = \{3\} \neq \emptyset \Longrightarrow$ gli eventi non sono incompatibili e $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

   $P(A) = \frac{1}{2};\ P(B) = \frac{1}{3} \Longrightarrow P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} = P(A \cap B) \Longrightarrow$ gli eventi sono indipendenti.

   Gli eventi A, B sono indipendenti, ma non incompatibili.

Teorema delle probabilità totali

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità. Siano $B_1, B_2, \dots, B_n$ eventi tali che

i. $P(B_i) > 0,\ \forall i = 1, \dots, n$
ii. $B_1, B_2, \dots, B_n$ a due a due incompatibili, cioè $B_i \cap B_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$
iii. $B_1 \cup B_2 \cup \ \dots \cup B_n = \Omega$, ossia i B_i costituiscono una partizione di Ω .

Allora $\forall A \in \mathcal{A},\ P(A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A \mid B_n) \cdot P(B_n)$.

Dimostrazione.

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\big(A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ \dots \cup B_n)\big) =$$
$$P\big((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)\big) = (B_i \text{ incompatibili})$$
$$= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots P(A \cap B_n) = (\text{regola del prodotto})$$
$$= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

Corollario (legge delle alternative).

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità, sia $B \in \mathcal{A}$ un evento tale che $0 < P(B) < 1$. Allora,

$$\forall A \in \mathcal{A}, \qquad P(A) = P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid \Omega \backslash B) \cdot P(\Omega \backslash B)$$

Esempio.

È assegnata un'urna contenente 5 palline verdi e 2 palline rosse. Si estraggono due palline senza reimbussolamento. Consideriamo i seguenti eventi:

B_1 : "la prima pallina è rossa" $\Longrightarrow\ P(B_1) = \frac{2}{7}$

B_2 : "la prima pallina è verde" $\Longrightarrow\ P(B_2) = \frac{5}{7}$

A : "estrarre una pallina rossa come seconda"

Valutiamo $P(A)$ con la legge delle alternative

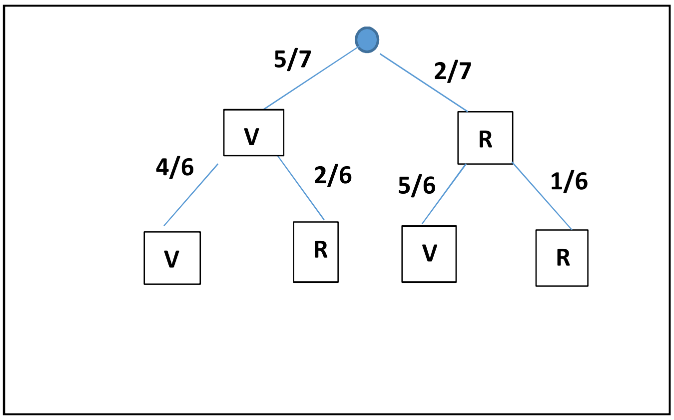
$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} \cdot P(B_1) + \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)} \cdot P(B_2)$$
$$= \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

Grafi

La legge delle alternative fornisce un metodo di calcolo che si può illustrare con un <u>grafo ad albero</u>. Tale strumento si usa per contare il numero di eventi di una sequenza di azioni. Ogni livello dell'albero corrisponde all'esecuzione di un'azione (i livelli sono successivi in senso temporale). Ogni <u>nodo</u> dell'albero corrisponde ad una alternativa, ogni <u>foglia</u> ad un esito dell'esperimento.
Sui rami si scrive la probabilità che essi siano percorsi. La probabilità di un evento si ottiene risalendo tutti i rami dell'albero che conducono ad esiti favorevoli dell'evento.

Esempio.
Rivediamo l'esempio precedente, applicando lo schema del grafo ad albero. È assegnata un'urna contenente 5 palline verdi e 2 palline rosse. Si estraggono due palline senza reimbussolamento. Calcolare la probabilità di estrarre una pallina rossa come seconda.

$P(A) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{7}$



Osservazione.
Un'urna contiene k palline bianche e $n-k$ palline nere. Si estraggono $n = 2, 3, 4, \ldots$ palline con o senza reimbussolamento. La probabilità che l' $n-$ sima sia bianca è $\frac{k}{n}$.

Osservazione. Nel teorema delle probabilità totali si può interpretare $P(A|B_i)$ come la probabilità di avere l'effetto A come conseguenza della causa B_i. Sapendo che A si è verificato, ha senso calcolare $P(B_i|A)$, cioè la probabilità che l'effetto A sia dato a causa di B_i ?
Quale delle cause $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ha determinato il verificarsi di A ?

Teorema di Bayes

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità. Siano $B_1, B_2, \dots, B_n$ eventi tali che

i. $P(B_i) > 0,\ \forall i = 1, \dots, n$

ii. $B_1, B_2, \dots, B_n$ a due a due incompatibili, cioè $B_i \cap B_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$

iii. $B_1 \cup B_2 \cup \ \dots \cup B_n = \Omega$, ossia i B_i costituiscono una partizione di Ω.

Sia $A \in \mathcal{A}$, tale che $P(A) > 0$. Allora

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$

Dimostrazione.

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} = (\text{th. probabilità totali})$$
$$= \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$

Osservazione.

$P(B_i|A)$ rappresenta una probabilità "a posteriori": mostra come si modifica la probabilità iniziale $P(B_i)$, sapendo che l'evento A si è verificato.

Esempi.

1. Una prova d'esame a crocette consiste in una sola domanda con 10 possibili risposte. Supponiamo che il 35% degli studenti siano onniscienti (indovinano perché sanno la risposta), il resto totalmente ignoranti (rispondono a caso). Qual è la probabilità che un compito contenente la risposta corretta sia di uno studente ignorante?

   A: "studente onnisciente", $P(A) = 0{,}35$

   B: "studente ignorante", $P(B) = 0.65$

   C: "risposta corretta"

Si vuole valutare la probabilità di avere un compito con la risposta corretta (EFFETTO), proveniente da uno studente ignorante (CAUSA). Usiamo il teorema di Bayes.

$$P(B|C) = \frac{P(C|B) \cdot P(B)}{P(C)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}65}{1 \cdot 0{,}35 + 0{,}1 \cdot 0{,}65} = \frac{0{,}065}{0.415} \simeq 0{,}16$$

2. Una malattia è presente nel 16% dei casi. La probabilità che, se una persona è sana, il test diagnostico sia negativo è 85%, mentre la probabilità che, se una persona è malata, il test sia positivo è 90%. Scelta a caso una persona, qual è la probabilità che il test sia positivo? Valutare anche la probabilità che una persona sia sana se il test è negativo e la probabilità che una persona sia malata sapendo che il test è positivo.

M: "essere malato", $P(M) = 0{,}16$

S: "essere sano", $P(S) = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$

$T_n|S$: "test negativo se la persona è sana"

$T_p|S$: "test positivo se la persona è sana"

$T_p|M$: "test positivo se la persona è malata"

$$P(T_n|S) = 0{,}85 \implies P(T_p|S) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$$
$$P(T_p|M) = 0{,}90$$
Applichiamo la legge delle alternative per calcolare $P(T_p)$:
$$P(T_p) = P(T_p|S) \cdot P(S) + P(T_p|M) \cdot P(M) = 0{,}15 \cdot 0{,}84 + 0{,}90 \cdot 0{,}16 = 0{,}27$$
Per valutare la probabilità che una persona sia sana se il test è negativo e la probabilità che una persona sia malata sapendo che il test è positivo, si usa il teorema di Bayes. In entrambi i casi è noto l'effetto e si vuole capire qual è la probabilità che questo sia dovuto ad una determinata causa.
$$P(S|T_n) = \frac{P(T_n|S) \cdot P(S)}{P(T_n)} = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}84}{1 - P(T_p)} = \frac{0{,}714}{0{,}73} \simeq 0{,}98$$
$$P(M|T_p) = \frac{P(T_p|M) \cdot P(M)}{P(T_p)} = \frac{0{,}90 \cdot 0{,}16}{0{,}27} = \frac{0{,}144}{0{,}27} \simeq 0{,}53$$

Uno dei problemi che capitano frequentemente nel calcolo delle probabilità è quello di calcolare la probabilità che un dato evento capiti k volte su n prove effettuate. Si parla in questo caso di schema delle prove di Bernoulli.
Consideriamo il seguente esempio. Un esperimento ha due possibili esiti:
S: "successo", con $P(S) = p, \ \ 0 < p < 1$
F: "fallimento", con $P(F) = 1 - p = q$
La probabilità di successo rimane costante ad ogni ripetizione dell'esperimento. Qual è la probabilità di $k = 0, 1, \dots, n$ successi in n prove?

- $n = 1$
  $P(S = 1) = p;\ P(S = 0) = q \implies$
  $P(S = 1) + P(S = 0) = p + q$
- $n = 2$
  $P(S = 2) = p^2;\ P(S = 1) = pq + pq = 2pq;\ P(S = 0) = q^2 \implies$
  $P(S = 2) + P(S = 1) + P(S = 0) = p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2$

In generale
$$P(S = 0) + P(S = 1) + P(S = 2) + \cdots + P(S = n) = (q + p)^n$$
$P(S = k)$ è il k-simo termine dello sviluppo del binomio
$$(q + p)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} p^k$$
Esempio.
Lancio 3 volte un dado equo. Qual è la probabilità di ottenere due numeri pari?
S: "esce un numero pari", $P(S) = \frac{1}{2} = p$
F: "esce un numero dispari", $P(F) = \frac{1}{2} = q$
$$P(S = 2) = \binom{3}{2} q^{3-2} p^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$