Calcolo delle probabilità

La teoria della probabilità, nata a metà del '600 per predire i risultati dei giochi d'azzardo, è una applicazione della teoria degli insiemi.

Definizioni.
Esperimento: insieme di azioni il cui risultato non può essere predetto con certezza.
Prova: singola esecuzione di un esperimento.
Esito: ogni possibile insieme di dati, ottenuto da un esperimento, che ne definisce un risultato.
Spazio campione Ω: insieme di tutti gli esiti di un esperimento.
Punto campione: elemento di Ω.
Evento: sottoinsieme di Ω, cioè insieme di esiti.
Evento elementare: Se $a \in \Omega, \{a\} =$ evento elementare.

Osservazioni.
$\Omega =$ evento certo
$\emptyset =$ evento impossibile
Se Ω finito (numerabile), allora è discreto; altrimenti continuo.

La teoria della probabilità studia esperimenti il cui esito è incerto (ad esempio, il lancio di un dado, l'estrazione di una pallina da un'urna, …), in particolare si occupa di:

- Assegnare delle probabilità a tutti gli esiti possibili, ripetendo molte volte l'esperimento e osservando gli esiti ottenuti (ad esempio, il lancio di una moneta);
- Predire l'esito degli esperimenti futuri (ad esempio, la probabilità di successo di un'operazione)
- Costruire regole di calcolo per studiare fenomeni più complessi

Vediamo un semplice esempio: consideriamo il lancio di un dado non truccato.
Sia $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ lo spazio campione. Consideriamo i seguenti eventi:
A: "esce il numero 5" $\Longrightarrow A = \{5\}$ evento elementare
B: "esce un numero dispari" $\Longrightarrow B = \{1, 3, 5\}$
C: "esce un numero < 7 " $\Longrightarrow C = \Omega$ evento certo
D: "esce un numero ≥ 8 " $\Longrightarrow D = \emptyset$ evento impossibile

Interpretazione probabilistica delle operazioni insiemistiche

Dato che gli eventi sono insiemi, si possono eseguire con essi le operazioni insiemistiche.
$A \cup B$ si verifica se l'esito appartiene ad A o a B.
$A \cap B$ si verifica se l'esito appartiene sia ad A che a B.
$\Omega \backslash A$ si verifica se l'esito non appartiene ad A, ossia si verifica se non si verifica A.
$A \subset B$ ogni volta che si verifica A, si verifica anche B.

Definizione.
Due eventi A, B si dicono incompatibili se il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro, ossia se $A \cap B = \emptyset$.

Esempi.

1. Lancio di una moneta equa (non truccata) due volte.
$$\Omega = \{(T,T),(T,C),(C,T),(C,C)\}$$
Consideriamo gli eventi:
A: "esce testa al 1° lancio" $\Longrightarrow A = \{(T,T),(T,C)\}$
B: "esce due volte testa" $\Longrightarrow B = \{(T,T)\}$ evento elementare
C: "esce croce al 2° lancio $\Longrightarrow C = \{(T,C),(C,C)\}$
Osserviamo che:
- L'evento "esce testa al 1° lancio e croce al 2° lancio" è $A \cap C = \{(T,C)\}$
- $B \cap C = \emptyset \Longrightarrow B, C$ sono eventi incompatibili
- $B \subset A$

2. Lancio di due dadi equi
$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\} = \{(i,j) |\ i,j = 1,2,3,4,5,6\}$$
Consideriamo gli eventi:
A: "escono due numeri la cui somma è 5" $\Longrightarrow A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$
B: "almeno una faccia è maggiore di 3" $\Longrightarrow B = \Omega \setminus \{\text{"entrambe le facce } \leq 3\text{"}\} = \Omega \setminus \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

Assiomi della probabilità

Per definire la probabilità occorrono: uno spazio campione Ω ; una famiglia di insiemi su cui operare, detta σ-algebra degli eventi.[1]

Definizione.
Sia $\Omega \neq \emptyset$ uno spazio campione. Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di Ω è detta σ −algebra su Ω se:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$
3. $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Longrightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \in \mathcal{A}$

Osservazioni.

$$\emptyset = \Omega \backslash \Omega \in \mathcal{A}$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}} \in \mathcal{A}$$

Definizione.
Dato uno spazio campione Ω ed una σ −algebra $\mathcal{A}$ di eventi su Ω, si dice probabilità o misura di probabilità, un'applicazione che associa ad ogni evento $A \in \mathcal{A}$ un numero reale $P(A)$ tale che

$$P: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \mapsto P(A)$$

1. $0 \leq P(A) \leq 1,\ \forall A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
4. Dati $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ eventi a due a due incompatibili, allora $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$

La terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si chiama <u>spazio delle probabilità</u> e 1, 2, 3, 4 sono detti <u>assiomi della probabilità</u>.

Dagli assiomi della teoria della probabilità derivano le seguenti proprietà:

i. $P(\emptyset) = 0$
ii. $P(\Omega \backslash \mathrm{A}) = 1 - P(A)$
iii. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
iv. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
v. Se $A \subseteq B$, allora $P(A) \leq P(B)$; se $A \subsetneq B$, allora $P(A) < P(B)$.
vi. $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$ oppure $P(A \cap B) \leq P(B) \leq P(A \cup B)$

Osservazione.
Assiomi e proprietà non danno alcuna informazione sul valore numerico della probabilità. Tale valore dipende dal tipo di esperimento e dallo spazio campione.

[1] La definizione assiomatica della probabilità è dovuta a Kolmogorov (1933).

Esercizio.
Una ditta produce componenti elettrici che possono presentare due tipi di difetti:

- Il difetto x nel 2% della produzione
- Il difetto y nel 5% della produzione

Il componente elettrico risulta funzionante se ha solo uno dei due difetti, non funzionante se li ha entrambi, il che succede nello 0,8% dei casi. Si acquista un componente da tale ditta.

1) Qual è la probabilità che esso sia funzionante (ossia che abbia solo un difetto)?
2) Qual è la probabilità che esso non abbia alcun difetto?

Risoluzione.
Indichiamo gli eventi con la seguente notazione:
A: "avere il difetto x" $\Longrightarrow P(A) = 2\% = \frac{2}{100} = 0{,}02$
B: "avere il difetto y" $\Longrightarrow P(B) = 5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$
$A \cap B$: "avere entrambi i difetti" ossia "avere un prodotto non funzionante" $\Longrightarrow P(A \cap B) = 0{,}8\% = 0{,}008$
$A \cup B$: "avere almeno un difetto"

1) Il componente funziona se ha solo un difetto, questo significa andare a valutare la probabilità dell'evento $\Omega \backslash (A \cap B)$
$$P\big(\Omega \backslash (A \cap B)\big) = P(\Omega) - P(A \cap B) = 1 - 0{,}008 = 0{,}992 = 99{,}2\%$$
2) Dire che il componente non ha difetti significa considerare l'evento $\Omega \backslash$ "avere almeno un difetto", ossia $\Omega \backslash (A \cup B)$
$$P\big(\Omega \backslash (A \cup B)\big) = P(\Omega) - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - 0{,}062 = 0{,}938 = 93{,}8\%$$

Il caso equiprobabile

Definizione.
Uno spazio campione Ω finito, $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, si dice <u>equiprobabile</u> se ognuno degli esiti $e_1, e_2, \dots, e_n$ ha la stessa possibilità di verificarsi, ossia $P(e_1) = P(e_2) = \cdots P(e_n)$.

Esempio.
Se si considera il lancio di un dado non truccato, tutti i numeri da 1 a 6 hanno la stessa possibilità di uscire. Per definire la probabilità su Ω , osserviamo che
$\Omega = \{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \dots \cup \{e_n\}$ e $P(\Omega) = 1$

$$1 = P(\Omega) = P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \dots \cup \{e_n\})$$

Dal momento che Ω è equiprobabile, $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \cdots P(\{e_n\})$, quindi

$$1 = n \cdot P(\{e_i\}), \;\; i = 1, \dots, n$$

Allora $P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}, \;\; \forall i = 1, \dots, n$
Si può quindi concludere che, in uno spazio campione equiprobabile, tutti gli eventi elementari hanno probabilità $\frac{1}{n}$.

Osservazione.
Sia $A \subset \Omega$ un evento, $A = \left\{e_1, e_2, \dots, e_{n_A}\right\}$, con n_A = numero di elementi di A. Allora

$$P(A) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \cdots + P\left(\left\{e_{n_A}\right\}\right) = n_A \cdot \frac{1}{n}$$

Teorema.
Sia Ω equiprobabile, finito, formato da n punti. Sia $A \subset \Omega$ un evento. Allora

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

La probabilità di un evento così definita coincide con la <u>definizione classica di probabilità</u>, dovuta a Laplace:

$$P(A) = \frac{\#\text{ casi favorevoli di } A}{\#\text{ casi possibili}}$$

Per calcolare il numero totale di eventi dello spazio campione si usano i concetti di combinazioni, permutazioni, disposizioni, ossia il calcolo combinatorio.

Il calcolo combinatorio

Il calcolo combinatorio si occupa di contare e studiare come gli elementi di opportuni insiemi possono essere scelti e raggruppati, secondo certe proprietà.

Se conta l'ordine con cui vengono scelti gli elementi, si avranno delle **disposizioni**.
Disposizioni semplici di n elementi diversi di classe k, con $k \leq n$.
Sono tutti i possibili gruppi che si possono formare con k elementi scelti tra gli n .

$$D_{n,k} = \frac{n\,!}{(n-k)\,!} = n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)$$

Disposizioni con ripetizione di n elementi diversi di classe k, con $k \gtreqless n$.

$$D^*_{n,k} = n^k$$

Se $k = n$, si parla di **permutazioni**.
Permutazioni semplici di n elementi diversi

$$P_n = n\,! = n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1$$

Permutazioni con ripetizione di n elementi, di cui n_1, n_2 ripetuti

$$P^*_n = \frac{n\,!}{n_1 \cdot n_2}$$

Se non conta l'ordine con cui vengono scelti gli elementi, si avranno delle **combinazioni**.
Combinazioni semplici di n elementi diversi di classe k, con $k \leq n$.

$$C_{n,k} = \frac{n\,!}{k\,! \cdot (n-k)\,!} = \binom{n}{k}$$

Combinazioni con ripetizione di n elementi diversi di classe k, con $k \gtreqless n$.

$$C^*_{n,k} = \frac{(n+k-1)\,!}{k\,! \cdot (n-1)\,!}$$