

## Equazioni di primo grado

Un'equazione è un'uguaglianza tra due espressioni in cui compaiono una o più incognite per le quali si cercano i valori che la rendono vera. Un'equazione di primo grado nell'incognita  $x$  scritta in forma normale, ha un'espressione del tipo

$$ax + b = 0$$

Dove  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ . Un'equazione può essere determinata, in tal caso la sua soluzione è data da

$$x = -\frac{b}{a}$$

Se l'equazione non ammette soluzioni, si dirà impossibile; se ammette infinite soluzioni, si dirà indeterminata.

## Disequazioni di primo grado

Una disequazione di primo grado è del tipo

$$ax + b > 0 \quad \text{oppure} \quad ax + b < 0, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Le soluzioni di una disequazione sono rappresentate da un intervallo e sono date da:

$$ax + b > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\ x < -\frac{b}{a} & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Analogamente,

$$ax + b < 0 \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\ x > -\frac{b}{a} & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

## Equazioni di secondo grado

Un'equazione di secondo grado completa, scritta in forma normale, è del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Per stabilire se un'equazione di secondo grado ammetta soluzione oppure no, si deve calcolare il discriminante dell'equazione, indicato dalla lettera dell'alfabeto greco delta,  $\Delta$ . Il valore di  $\Delta$  è legato all'esistenza e al numero di radici reali dell'equazione.

$$\Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} > 0 \Rightarrow 2 \text{ soluzioni reali distinte, } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = 0 \Rightarrow 2 \text{ soluzioni reali coincidenti, } x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \\ < 0 \Rightarrow \nexists \text{ soluzioni reali} \end{cases}$$

### Casi particolari di equazioni di secondo grado

Equazione pura

$$a \neq 0, \quad b = 0, \quad c \neq 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

L'equazione ha soluzione se e solo se  $-\frac{c}{a} > 0$ . In tal caso le soluzioni saranno opposte.

Esempi.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \text{equazione impossibile}$$

Equazione spuria

$$a \neq 0, b \neq 0, c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \xrightarrow[\text{legge di annullamento del prodotto}]{} x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

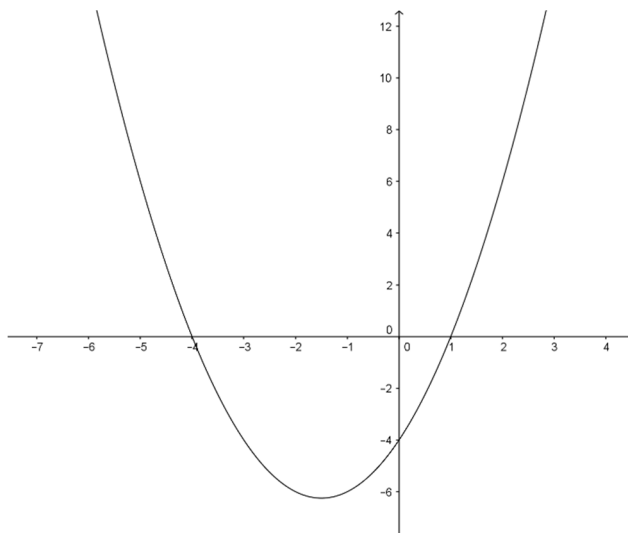
Osservazione.

Dal punto di vista geometrico, risolvere l'equazione di secondo grado  $ax^2 + bx + c = 0$  significa determinare i punti di intersezione della parabola di equazione  $y = ax^2 + bx + c$  con l'asse delle ascisse di equazione  $y = 0$ .

Esempio.

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 16 = 25 > 0$$

L'equazione ammette due soluzioni reali distinte,  $x_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$ ;  $x_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$ , che rappresentano, geometricamente, le ascisse dei punti di intersezione della parabola di equazione con l'asse delle ascisse.



Scomposizione del trinomio di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Dove  $x_1, x_2$  sono le soluzioni dell'equazione  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Esempio.

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 2 \cdot (x + 1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

## Disequazioni di secondo grado intere

Si tratta di risolvere disequazioni del tipo

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0$$

Per prima cosa si calcola il discriminante  $\Delta$  dell'equazione associata. Si possono verificare tre diversi casi, che corrispondono a differenti soluzioni per la disequazione considerata:

1.  $\Delta > 0$ . L'equazione associata ha due soluzioni distinte  $x_1, x_2$ , con  $x_1 < x_2$
2.  $\Delta = 0$ . L'equazione associata ha due soluzioni coincidenti  $x_1 = x_2$
3.  $\Delta < 0$ . L'equazione associata non ha soluzioni reali.

Nella tabella sotto riportata sono esaminati i casi che si possono presentare e le relative soluzioni:

|              |         | $ax^2 + bx + c > 0$            | $ax^2 + bx + c \geq 0$       | $ax^2 + bx + c < 0$            | $ax^2 + bx + c \leq 0$       |
|--------------|---------|--------------------------------|------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
|              | $a > 0$ | $x < x_1 \vee x > x_2$         | $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$ | $x_1 < x < x_2$                | $x_1 \leq x \leq x_2$        |
| $\Delta > 0$ |         |                                |                              |                                |                              |
|              | $a < 0$ | $x_1 < x < x_2$                | $x_1 \leq x \leq x_2$        | $x < x_1 \vee x > x_2$         | $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$ |
|              | $a > 0$ | $\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$ | $\mathbb{R}$                 | $\emptyset$                    | $\{x_1\}$                    |
| $\Delta = 0$ |         |                                |                              |                                |                              |
|              | $a < 0$ | $\emptyset$                    | $\{x_1\}$                    | $\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$ | $\mathbb{R}$                 |
|              | $a > 0$ | $\mathbb{R}$                   | $\mathbb{R}$                 | $\emptyset$                    | $\emptyset$                  |
| $\Delta < 0$ |         |                                |                              |                                |                              |
|              | $a < 0$ | $\emptyset$                    | $\emptyset$                  | $\mathbb{R}$                   | $\mathbb{R}$                 |

### Sistemi di equazioni / disequazioni

Sono costituiti da più equazioni / disequazioni per le quali si cercano le eventuali soluzioni comuni.

## Disequazioni fratte

Sono disequazioni in cui l'incognita compare anche al denominatore e sono del tipo:

$$\frac{N(x)}{D(x)} \gtrless 0$$

Risolvere una disequazione fratta significa studiare il segno della frazione.

Per convenzione risulta più semplice porre numeratore e denominatore entrambi positivi e andare poi a studiare il segno del loro quoziente, sfruttando la regola dei segni.

Esempio.

$$\frac{2-x}{x+1} \geq 0$$

Per prima cosa, si studiano separatamente il segno del numeratore e del denominatore. Poniamo:

$$N(x): 2 - x \geq 0$$

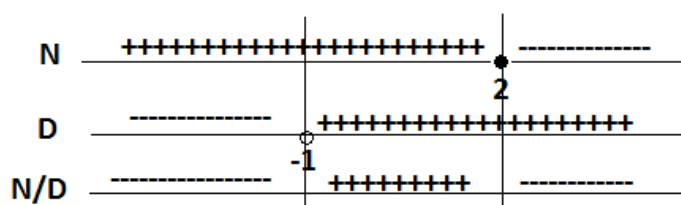
$$D(x): x + 1 > 0^1$$

Da cui segue, rispettivamente

$$N(x): x \leq 2$$

$$D(x): x > -1$$

Andiamo a rappresentare su rette orientate le soluzioni trovate



Dal momento che la frazione è richiesta  $\geq 0$ , l'intervallo di soluzione sarà dato da:

$$-1 < x \leq 2$$

---

<sup>1</sup> Osserviamo che il denominatore viene posto STRETTAMENTE positivo, poiché non può mai essere nullo.

## Equazioni e disequazioni col valore assoluto

Il caso più semplice di equazione con il valore assoluto è del tipo:

$$|f(x)| = g(x)$$

Questo tipo di equazione si risolve “spezzando” l’equazione iniziale in due nuove equazioni, a seconda che l’argomento del valore assoluto sia maggiore o minore di zero, nel seguente modo:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

Le soluzioni dell’equazione si ottengono facendo l’unione delle soluzioni dei due sistemi.

In modo analogo, si risolvono le disequazioni con il valore assoluto.

1.  $|f(x)| > g(x)$

Diventa

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases}$$

2.  $|f(x)| < g(x)$

Diventa

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) < g(x) \end{cases}$$

## Equazioni irrazionali

Sono equazioni in cui l'incognita compare sotto il segno di radice, ossia del tipo:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

Si distinguono due casi, a seconda che l'indice della radice sia pari o dispari.

1. Se  $n$  è pari, affinché la radice sia definita, è necessario che siano soddisfatte le Condizioni di Esistenza (C. E.):

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Quindi l'equazione si trasforma nella risoluzione di un sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^n \end{cases}$$

2. Se  $n$  è dispari, non servono C. E. perché le radici di indice dispari esistono sempre, quindi l'equazione irrazionale si risolve direttamente, ponendo

$$f(x) = [g(x)]^n$$

## Disequazioni irrazionali

Anche per le disequazioni, si distinguono due casi, a seconda che l'indice della radice sia pari o dispari.

- Se  $n$  è pari, ci limitiamo a considerare il caso della radice quadrata (ossia  $n=2$ )

$$(1) \quad \sqrt{f(x)} > g(x)$$

Equivale a risolvere due sistemi

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$(2) \quad \sqrt{f(x)} < g(x)$$

Equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

- Se  $n$  è dispari

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > [g(x)]^n$$

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < [g(x)]^n$$