# Calcolo differenziale

## Il concetto di rapporto incrementale

Definizioni.
Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ . Siano $x_0,\ x = x_0 + h \in A$ .
La differenza

$$\Delta x = x - x_0 = x_0 + h - x_0 = h$$

si dice incremento della variabile indipendente $x$ nel passaggio da $x_0$ ad $x_0 + h$.
La differenza

$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

si dice incremento della variabile dipendente $y$ o della funzione $f$ relativo all'incremento $h$ ed al punto $x_0$.
Il rapporto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si dice rapporto incrementale della funzione $f$ relativo all'incremento $h$ ed al punto $x_0$.

## Il concetto di derivata

Definizione.
Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice derivabile in $x_0 \in A$ se esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Il valore di tale limite si chiama derivata prima della funzione $f$ nel punto $x_0$ e si denota con $f'(x_0), Df(x_0), \frac{df}{dx}(x_0)$.

Osservazione.
Indicheremo con $f'_+(x_0)$ la derivata destra, definita come

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \longrightarrow {x_0}^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Analogamente, indicheremo con $f'_-(x_0)$ la derivata sinistra, definita come

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \longrightarrow {x_0}^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si dimostra che $f$ è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ .

Definizione.
La funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $A$ se lo è in ogni punto di $A$.

## Derivate delle funzioni elementari

1. Funzione costante: $f(x) = k$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = 0$$

2. Funzione identità: $f(x) = x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

3. Funzione lineare: $f(x) = ax + b$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = a$$

4. Funzione quadratica: $f(x) = x^2$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - (x_0)^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (2x_0 + h)}{h} = 2x_0$$

5. Funzioni goniometriche. Si dimostra che:

$$f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$$
$$f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\sin x$$

## Continuità e derivabilità

Teorema.
Se $f$ è derivabile in $x_0$, allora $f$ è continua in $x_0$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ossia $\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Osservazione.
In generale non vale il viceversa, ossia continuità $\not\Rightarrow$ derivabilità. Esistono funzioni continue in un punto, ma non derivabili in tale punto.

Esempio.
La funzione $f(x) = |x|$ è continua in $x_0 = 0$, ma non è derivabile in tale punto. Infatti

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$
$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0) \implies f$ non è derivabile in $x_0 = 0$ . Si dice che in $x = 0$ , la funzione presenta un punto angoloso, ossia un punto in cui derivata destra e sinistra sono finite, ma diverse.

## Significato geometrico di derivabilità

Dal teorema precedente che lega continuità e derivabilità deriva la seguente condizione:

$$f \text{ derivabile in } x_0 \implies f \text{ continua in } x_0 \implies P_0\big(x_0, f(x_0)\big) \in G_f.$$

Consideriamo un altro punto $P\big(x, f(x)\big) = \big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big) \in G_f$ , con $P \neq P_0$ .

La retta passante per $P, P_0$ , incontrando $G_f$ in due punti, è secante e il coefficiente angolare è dato da:
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \tan\alpha$$
Dove con $\alpha$ indichiamo l'angolo formato dalla retta passante per $P, P_0$ col semiasse positivo delle ascisse.

Fissiamo $P_0$ e immaginiamo di poter avvicinare $P$ a $P_0$ . Fino a quando $P$ non coincide con $P_0$ , la retta per $P$ e $P_0$ è secante a $G_f$ e ha equazione:

$$s: y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0)$$

Quando $P$ si sovrappone a $P_0$ , cioè $x \to x_0$ ossia $h \to 0$ , la retta diventa tangente a $G_f$ e ha equazione:

$$t: y = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0)$$

Ossia

$$t: y = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right] \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$
$$t: y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Dunque, la derivata prima di $f$ in $x_0$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente a $G_f$ nel punto $P_0\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Esempio.

Scrivere l’equazione della retta tangente alla funzione $f(x) = x^2$ nel punto $x = 1$.

Per scrivere l’equazione, occorre conoscere le coordinate del punto e il coefficiente angolare della retta. In questo caso avremo $P_0\big(x_0, f(x_0\,)\big) = P_0\big(1, f(1)\big) = P_0(1, 1)$

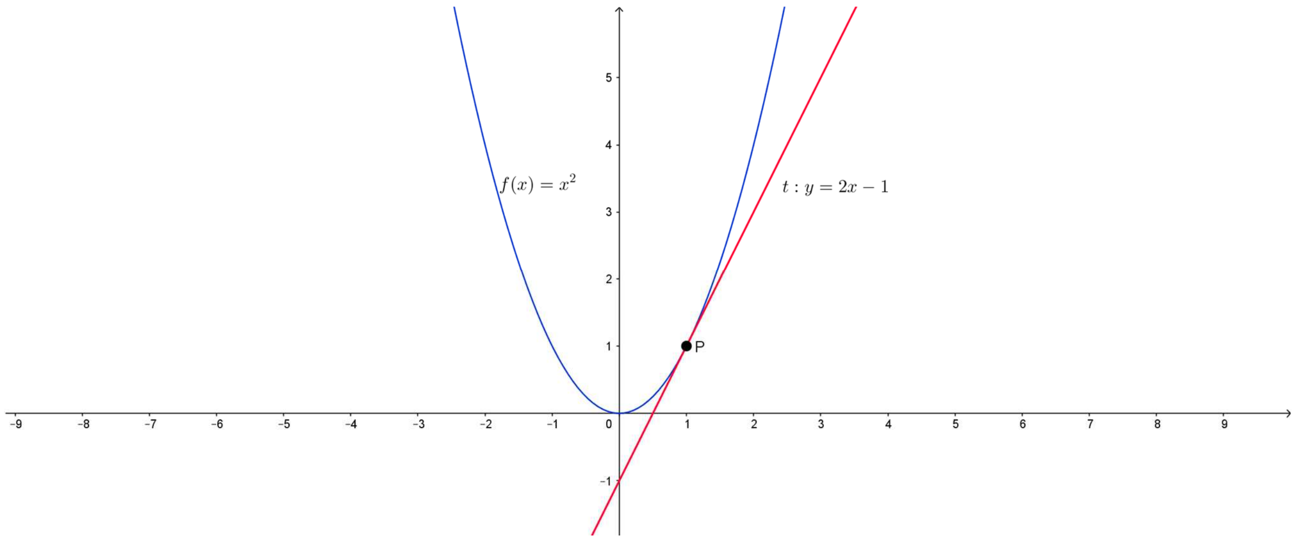
Calcoliamo la derivata prima della funzione: $f'(x) = 2x$

Il coefficiente angolare sarà dato da

$$m = f'(x_0) = f'(1) = 2$$

L’equazione della tangente sarà

$$t\colon y = 2 \cdot (x - 1) + 1 \implies t\colon y = 2x - 1$$



# Regole di derivazione

Siano $f, g$ due funzioni derivabili in $x_0$ $\left(x_0 \in D_f, x_0 \in D_g\right)$ e sia $k \in \mathbb{R}$ una costante. Allora le seguenti funzioni sono derivabili in $x_0$ e valgono le seguenti regole di derivazione:

i. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

ii. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

iii. $(k \cdot f)'(x_0) = k \cdot f'(x_0)$

iv. Se $g'(x_0) \neq 0$, $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$

v. Se $g'(x_0) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$

Dimostrazione.

i. $$(f+g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

ii. $$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] =$$
$$= \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

# Applicazioni delle regole di derivazione

1. Funzione potenza: $f(x) = x^n$ , con $n \in \mathbb{N} \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
2. Funzione polinomiale: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \implies$
$$f'(x) = n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$
3. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \implies f'(x) = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$
4. $f(x) = \cot x = \left(\frac{1}{\tan x}\right) \implies f'(x) = -\frac{\frac{1}{(\cos x)^2}}{(\tan x)^2} = -\frac{1}{(\sin x)^2} = -(1 + (\cot x)^2)$
5. $f(x) = x^{-n} = \left(\frac{1}{x^n}\right) \implies f'(x) = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}$ , con $n \in \mathbb{N}$

6. La regola di derivazione per le funzioni potenza vale anche se l'esponente è razionale

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

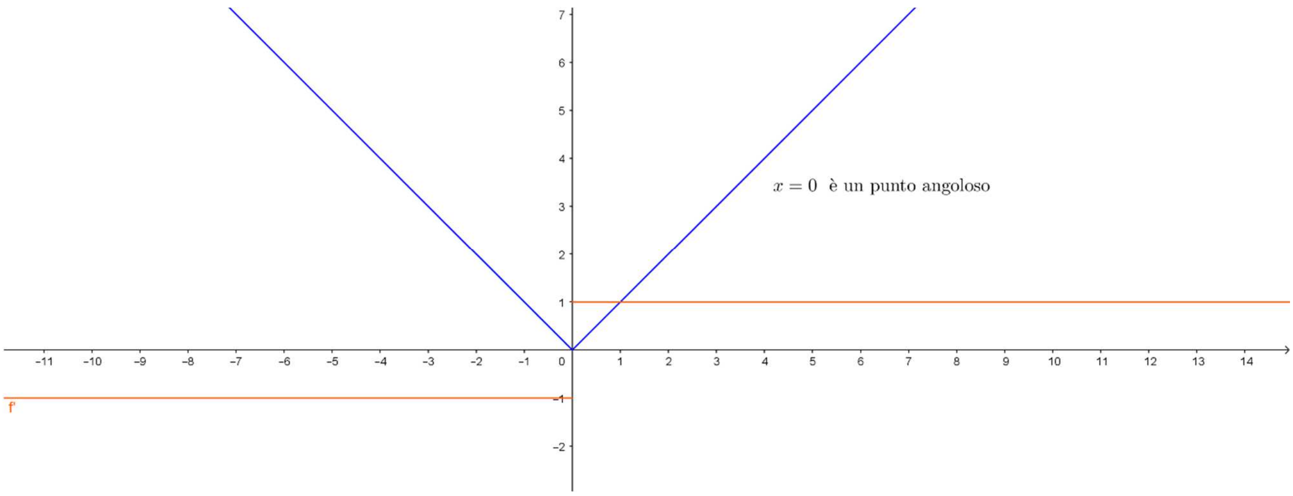
## Punti di non derivabilità

Ci sono tre possibili casi di non derivabilità:

1) $f$ non è derivabile in $x_0$ e presenta un punto angoloso se limite destro e sinistro esistono entrambi, finiti ma diversi oppure uno finito e l'altro infinito.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \neq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

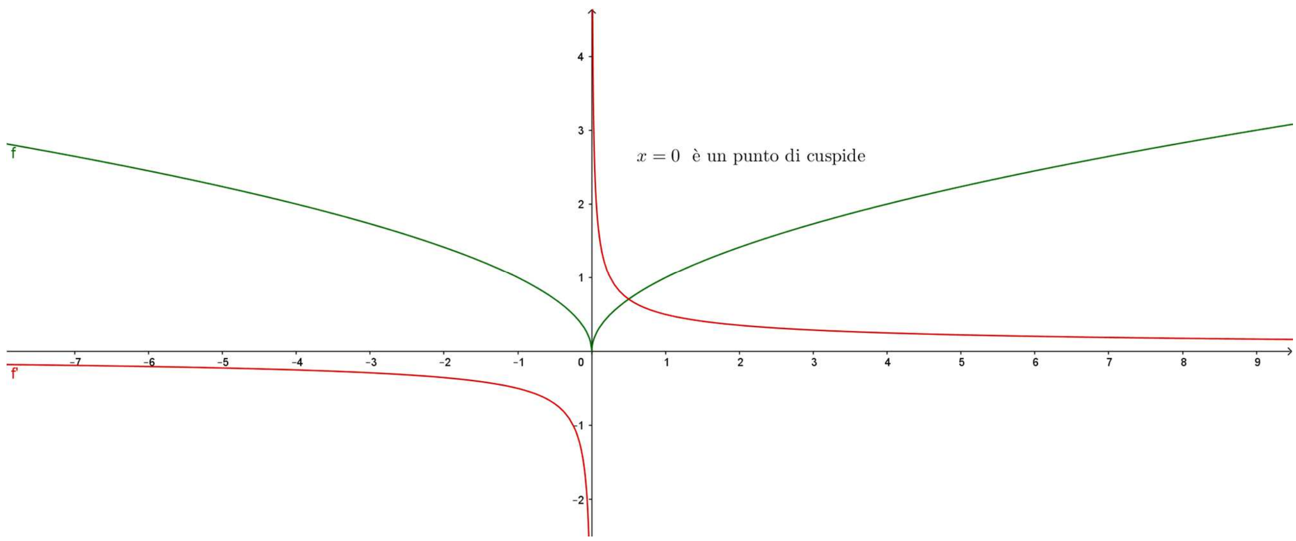
Esempio.
$f(x) = |x|$ presenta un punto angoloso in $x = 0$ .




2) $f$ non è derivabile in $x_0$ e presenta una cuspide se limite destro e limite sinistro sono infiniti di segno opposto.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty \text{ e } \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \mp\infty$$

Esempio.
$f(x) = \sqrt{|x|}$ presenta una cuspide in $x = 0$ .




3) $f$ non è derivabile in $x_0$ e presenta un <u>flesso a tangente verticale</u> se limite destro e sinistro sono infiniti dello stesso segno

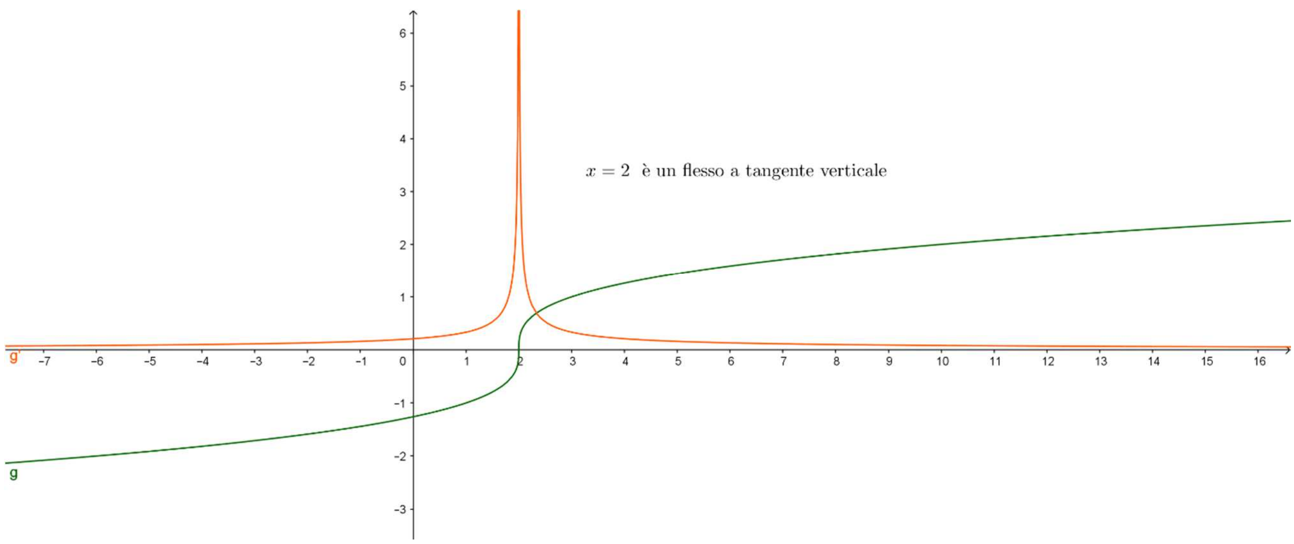
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$$

Oppure

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$$

Esempio.

$g(x) = \sqrt[3]{x-2}$ presenta un flesso a tangente verticale in $x = 2$ .



Derivata della funzione composta

Se $f$ è una funzione derivabile in $x_0$ e $g$ è una funzione derivabile in $y_0 = f(x_0)$ , allora la funzione composta $g \circ f$ (se esiste) è derivabile in $x_0$ e si ha:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)$$

Esempio.

$$f(x) = (\sin(3x^2))^4 \implies f'(x) = 4(\sin(3x^2))^3 \cdot \cos(3x^2) \cdot 6x$$

Derivata della funzione inversa

Sia $f$ una funzione continua e invertibile su $I \subseteq \mathbb{R}$ . Se $f$ è una funzione derivabile in $x_0$ con $f'(x_0) \neq 0$ , allora lasua inversa $f^{-1}$ è invertibile in $y_0 = f(x_0)$ e

$$\big(f^{-1}(x_0)\big)' = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{con } x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Esempi.

1. $f(x) = x^2 \implies f^{-1}(y) = \sqrt{y},\ \text{con } y \geq 0$

$$\left(\sqrt{y}\right)'_{y=y_0} = \frac{1}{(x^2)'_{x_0=f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{(2x)_{x_0=\sqrt{y_0}}} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \implies \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. $f(x) = \tan x$ è invertibile in $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e la sua inversa è $x = \arctan y$

$$(\arctan y)'(y_0) = \frac{1}{(\tan x)'_{x_0=\arctan(y_0)}} = \frac{1}{(1 + (\tan x)^2)_{x_0=\arctan(y_0)}} = \frac{1}{1 + y_0^2}$$
$$\implies (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

Derivata della funzione esponenziale

Sia $f(x) = e^x$ . Calcoliamo la derivata di $f$ , usando la definizione:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0}e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h}$$
$$= e^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$$

Allora si ha che:

$$f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$$

In generale vale che:

$$f(x) = a^x \implies f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

Derivata della funzione logaritmo

Sia $f(x) = \ln x$ . ricordiamo che $f(x) = \ln x$ è l'inversa di $f(x) = e^x$ . Sfruttando la regola di derivazione per la funzione inversa, si ha che:

$$(\ln y)'(y_0) = \frac{1}{(e^x)'_{x_0=\ln(y_0)}} = \frac{1}{(e^x)_{x_0=\ln(y_0)}} = \frac{1}{e^{\ln(y_0)}} = \frac{1}{y_0}$$

Allora si ha che:

$$f(x) = \ln x \implies f'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$$

In generale vale che:

$$f(x) = \log_a x \implies f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e \quad \forall x > 0$$

Derivate di ordine superiore

Se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in ogni punto di $[a,b]$ possiamo considerare la funzione derivata

$$\begin{aligned} f'\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

Se $f'$ è derivabile in $x_0 \in [a,b]$ , diremo che $f$ è derivabile due volte in $x_0$ , chiameremo tale derivata, derivata seconda di $f$ in $x_0$ e la indicheremo con

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

In modo analogo, se $f$ è derivabile $n$ volte in $x_0$, possiamo definire le derivate di ordine superiore e le indicheremo con

$$f^{III}, f^{IV}, \dots, f^{(n)}$$

## Teoremi sulle funzioni derivabili

**Teorema di Fermat**

Sia $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$ . Supponiamo che valgano le seguenti ipotesi:
- $f$ sia derivabile in $x_0$
- $x_0$ sia punto di massimo o minimo (relativo o assoluto) per $f$

Allora $f'(x_0) = 0$ e diremo che $x_0$ è un <u>punto stazionario</u> per $f$ .

Osservazioni.

1. Le rette tangenti a $G_f$ nei punti di massimo o minimo di $(a,b)$ sono parallele all'asse x.
2. Non vale il viceversa del teorema di Fermat. Esistono punti stazionari per $f$ , ma che non sono né punti di massimo né punti di minimo.

Esempio.

$$f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ma $x = 0$ non è né punto di massimo né punto di minimo. $x = 0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale.

3. $x_0$ deve essere un punto interno all'intervallo. Se $x_0$ non fosse interno, cioè $x_0 = a$ o $x_0 = b$ e $x_0$ massimo o minimo, non è detto che $f'(x_0) = 0$ .

Esempio.
$f(x) = x$ in $[0,2]$ . Allora $x = 0$ minimo e $x = 2$ massimo di $f$ , ma $f'(x) = 1 \neq 0$

**Teorema di Rolle**

Sia $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $(a,b)$ . Se $f(a) = f(b)$ , allora $\exists\, c \in (a,b)$: $f'(c) = 0$ .

**Teorema di Lagrange**

Sia $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $(a,b)$ . Allora $\exists\, c \in (a,b)$: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

Enunciamo ora alcuni importanti corollari del teorema di Lagrange.

1. Test di monotonia.

Sia $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $(a,b)$.
$f$ crescente in $[a,b] \iff f'(x) \geq 0 \ \ \forall x \in (a,b)$
$f$ decrescente in $[a,b] \iff f'(x) \leq 0 \ \ \forall x \in (a,b)$

Osservazione.
$f' > 0 \ \ (f' < 0)\ \forall x \in (a,b) \Longrightarrow f$ strettamente crescente (decrescente) in $[a,b]$ .
Non vale il viceversa, ossia se $f$ è strettamente crescente (decrescente), può esistere $x_0$ tale che $f'(x_0) = 0$ .

Ad esempio $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ossia $\exists x_0 = 0 :$ $f'(x_0) = f'(0) = 0$ .

2. $f$ derivabile in $[a, b]$ è costante $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0 \;\; \forall x \in [a, b]$

3. $f, g$ derivabili in $[a, b]$, $f' = g' \Leftrightarrow f - g =$ costante

4. Criterio per determinare i punti di massimo e di minimo

   Sia $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $(a, b)$ e sia $x_0 \in (a, b)$ punto stazionario di $f$ ($f'(x_0) = 0$ ). Allora si ha che:

- Se $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in (a, x_0)$ e $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (x_0, b)$ , allora $x_0$ è un punto di <u>minimo relativo</u> per $f$ .
- Se $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (a, x_0)$ e $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in (x_0, b)$ , allora $x_0$ è un punto di <u>massimo relativo</u> per $f$ .
- Se $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ , allora $x_0$ è un punto di <u>flesso a tangente orizzontale ascendente</u>.
- Se $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ , allora $x_0$ è un punto di <u>flesso a tangente orizzontale discendente</u>.

## Funzioni concave e convesse

Definizione.
Sia $f \colon ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione.
$f$ si dice <u>convessa</u> in $]a, b[$ se, presi due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in ]a, b[$ , il segmento che congiunge $A\left(x_1, f(x_1)\right)$ e $B\left(x_2, f(x_2)\right)$ giace "al di sopra" di $G_f$ in $[x_1, x_2]$ o $[x_2, x_1]$.
In caso contrario $f$ si dice <u>concava</u>.

Teorema.
Sia $f$ una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ .

- $f$ convessa in $]a, b[ \Leftrightarrow f''(x) \geq 0, \forall x \in ]a, b[$
- $f$ concava in $]a, b[ \Leftrightarrow f''(x) \leq 0, \forall x \in ]a, b[$

Definizione.
Sia $f$ una funzione derivabile almeno due volte in $]a, b[$ . Un punto $x_0$ si dice punto di flesso se $f$ è concava in $]a, x_0[$ e convessa in $]x_0, b[$ o viceversa.

Osservazione.
Per definizione, il punto di flesso è un punto in cui cambia la concavità della funzione. Nei punti di flesso, $f'' = 0$ .

Se $f$ è derivabile nel punto di flesso, esiste la tangente alla curva in tale punto. In particolare si avrà un punto di flesso:

- A tangente orizzontale, se la tangente è parallela all'asse delle ascisse
- A tangente verticale, se la tangente è parallela all'asse delle ordinate
- Obliquo

## Teorema di De L'Hôpital

Questo teorema è una applicazione del calcolo delle derivate al calcolo dei limiti ed è utile per risolvere i limiti di forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

Teorema.

Siano $f, g$ due funzioni definite in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ o $x_0 = \pm\infty$ . Supponiamo che:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ oppure $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$
- $f, g$ siano derivabili e $g'(x) \neq 0$ almeno in un intorno di $x_0$ .

Allora, se esiste $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ finito o non finito, esiste anche $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e vale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Osservazioni.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ , allora $f$ si dice infinitesimo. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ , allora $f$ si dice infinito.

Se nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ si trova

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \begin{cases} \neq 0, & f \text{ infinitesimo dello stesso ordine di } g \\ = 0, & f \text{ infinitesimo di ordine superiore rispetto a } g \\ = \infty, & f \text{ infinitesimo di ordine inferiore rispetto a } g \end{cases}$$

Se nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ si trova

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \begin{cases} \neq 0, & f \text{ infinito dello stesso ordine di } g \\ = 0, & f \text{ infinito di ordine inferiore rispetto a } g \\ = \infty, & f \text{ infinito di ordine superiore rispetto a } g \end{cases}$$

Se non esistono i limiti, gli infinitesimi o gli infiniti si dicono non confrontabili.

Esempi.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 1) \cdot e^{-3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 - 1)}{e^{3x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{3e^{3x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{9e^{3x}} = 0$$

Osservazione.
In alcuni casi il teorema di De L'Hôpital non si può applicare. Ad esempio, se volessimo calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}$$

Usando il teorema di De L'Hôpital, troveremmo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$$

Ma non esistono né $\lim_{x \to +\infty} \cos x$ , né $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ quindi in questo caso sarebbe sbagliato applicare il teorema di De L'Hopital. Tale limite si risolve osservando che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}{x \cdot \left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)} = 1$$

Il teorema di De L'Hopital conclude la parte relativa al calcolo differenziale. Con le nozioni studiate fino ad ora, siamo in grado di poter eseguire lo studio di qualunque funzione e di poterne disegnare il grafico.

## Studio di funzione

- Classificazione
- Dominio
- Eventuali simmetrie (funzione pari, dispari, né pari né dispari)
- Segno: $f(x) \geq 0$
- Intersezioni con gli assi:
  - $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$ Intersezioni con l'asse x
  - $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$ Intersezioni con l'asse y
- Comportamento agli estremi del dominio: asintoti verticali, orizzontali (eventuali asintoti obliqui, se non esistono asintoti orizzontali)
- Andamento della funzione: crescenza e decrescenza $f'(x) \geq 0$ e ricerca di eventuali punti di minimo/massimo
- Convessità / concavità della funzione $f''(x) \geq 0$ e ricerca di eventuali punti di flesso