Cognome

Nome

matricola

Attenzione: solo per chi non si sia regolarmente registrato sul sito, apporre firma e indirizzo posta elettronica

--@------------------------------

1. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ descritta dalla legge

$$f(x, y) = (1 - x^2) \cdot (x + y^2 - 1),$$

dimostrare che tale f:

(a) possiede quattro punti stazionari;

(b) ammette almeno un punto di minimo non globale;

(c) non ammette alcun altro punto di minimo.

Facoltativo: Dimostrare che tale f ammette un solo estremo.

2. Dimostrare che i candidati alla soluzione del problema

$$\begin{cases} \min f(x, y) = xy - y^2 \\ \text{sub} \begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

sono infiniti e mostrare la vera natura di uno solo di essi, a vostra scelta.

Facoltativo: mostrare la vera natura di tutti i candidati.

Soluzione del primo quesito

Le derivate parziali sono $f_x(x, y) = -2x(x + y^2 - 1) + 1 - x^2$ e $f_y(x, y) = 2y(1 - x^2)$. Per la ricerca dei punti stazionari, si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} -2x(x + y^2 - 1) + 1 - x^2 = 0 \\ 2y(1 - x^2) = 0. \end{cases}$$

Partendo dalla seconda equazione, si hanno i soli due casi $y = 0$ o $x = \pm 1$: nel primo, sostituendo $y = 0$ nella prima equazione, dopo qualche elementare calcolo algebrico, si ottiene $(1 + 3x)(1 - x) = 0$, le cui soluzioni sono $x_1 = -1/3$ and $x_2 = 1$, pertanto i primi due punti stazionari sono $P_1 = (-1/3, 0)$ e $P_2 = (1, 0)$. Nel secondo caso, se si sostituisce $x = -1$ nella prima equazione, si arriva a $y^2 - 2 = 0$, ossia $y = \pm\sqrt{2}$, sicché avete altri due punti stazionari dati da $P_3 = (-1, -\sqrt{2})$ e $P_4 = (-1, \sqrt{2})$, mentre dal caso $x = 1$ ricavate nuovamente il punto stazionario P_2. Dunque, il numero complessivo dei punti stazionari é quattro.

Ora calcolo le derivate seconde, ossia $f_{xx} = -6x - 2y^2 + 2$, $f_{xy} = -4xy$, $f_{yy} = 2 - 2x^2$, quindi la matrice Hessiana é

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -6x - 2y^2 + 2 & -4xy \\ -4xy & 2 - 2x^2 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice Hessiana é dunque

$$|H(x, y)| = 4((1 - 3x - y^2)(1 - x^2) - 4x^2y^2).$$

Siccome il vostro scopo é valutare il segno del determinante di H nei punti stazionari trovati in precedenza, é immediato vedere che $|H(P_3))| < 0$ e $|H(P_4))| < 0$, da cui deduciamo che sia P_3 che P_4 sono punti sella.

Se invece consideriamo P_1 é facile vedere che $|H(P_1))| > 0$ e $NW_1(P_1) > 0$, pertanto concludiamo che P_1 é un punto di minimo almeno locale. Si noti che se consideriamo, ad esempio, $f(x, 0) = (1 - x^2)(x - 1)$, si ha che $f(x, 0) \to -\infty$ per $x \to +\infty$, quindi P_1 non puó essere globale.

Infine, si ha che $|H(P_2))| = 0$, ossia l'Hessiana in P_2 é semidefinita e dunque non ci dá alcuna informazione sulla natura di P_2. Dimostriamo allora che P_2 non puó essere un altro punto di minimo. Si osservi che $f(P_2) = 0$, quindi si ha che

$$\Delta f_{P_2}(h, k) := f(1 + h, k) - f(P_2)$$

coincide con

$$f(1 + h, k) = -(h^2 + 2h) \cdot (h + k^2).$$

Se P_2 fosse un minimo (almeno) locale, allora per tutti gli h, k piccoli, ossia tendenti a zero, io avrei che $\Delta f_{P_2}(h, k) \geq 0$. Invece, se scelgo $k = 0$, si ha che $\Delta f_{P_2}(h, 0)$ é sempre negativo per h piccoli, perché $\Delta f_{P_2}(h, 0) = -h^2(2 + h)$ é il prodotto di $-h^2$ (sempre negativo) e $2 + h$ (sempre positivo, perché $2 + h \to 2$ per $h \to 0$).

Riguardo alla domanda facoltativa, dobbiamo dimostrare che P_2 non é neppure un massimo (ossia é un punto sella). In base a quanto dimostrato in precedenza, ci basta provare che per una particolare scelta di h, k piccoli, si ha che $\Delta f_{P_2}(h, k) > 0$. Ad esempio, se scegliamo $2h = -k^2$ o, equivalentemente, $h = -k^2/2$, si ha:

$$\Delta f_{P_2}(-k^2/2, k) = \frac{k^2}{2} \cdot \left(2 - \frac{k^2}{2}\right) \cdot \frac{k^2}{2} > 0 \quad \text{per ogni sufficientemente piccolo } k.$$

Soluzione del secondo quesito

Visto che il problema é con vincoli di diseguaglianza (uno solo effettivo, gli altri due di non negativitá), essendo $n = 2$, é preferibile disegnare il sottodominio K su cui insiste la funzione obiettivo. Non é difficile vedere che K é un sottoinsieme illimitato del primo quadrante del piano cartesiano delimitato dall'asse y, per $y \geq 1$, dall'asse x, per $x \geq 2$, e dal segmento di estremi $A = (0, 1)$ e $B = (2, 0)$.

Essendo K non limitato, non vale Weiestrass e quindi puó succedere di tutto, ossia che esistano soluzioni (locali o globali) oppure che non esistano soluzioni. Procediamo col metodo di KKT. La condizione di qualificazione dei vincoli (QV) si riduce ad escludere da questo metodo gli eventuali punti che annullano il gradiente del vincolo, espresso nella forma $g(x, y) \leq 0$, con $g(x, y) = 2 - x - 2y$. Poiché il gradiente del vincolo é dato da $(-1, -2)$, non si annulla mai, quindi la QV é sempre soddisfatta. Ora costruisco la Lagrangiana, data da

$$L(\lambda, x, y) = xy - y^2 + \lambda(2 - x - 2y).$$

La sola condizione necessaria di primo ordine porta al seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda(2 - x - 2y) = 0 \\ x(y - \lambda) = 0 \\ y(x - 2y - 2\lambda) = 0. \end{cases}$$

Se pongo $\lambda = 0$ nella prima equazione e inserisco tale valore nelle altre due equazioni, ottengo il sistema

$$\begin{cases} xy = 0 \\ y(x-2y) = 0. \end{cases}$$

Se parto dalla prima equazione, ho i casi $x = 0$ oppure $y = 0$. Se inserisco $x = 0$ nella seconda equazione, trovo $-2y^2 = 0$, da cui $y = 0$, ossia l'origine O, tuttavia tale punto non appartiene a K ed é pertanto da escludere. Invece, se inserisco $y = 0$ nella seconda equazione, trovo $0 = 0$, ossia é sempre soddisfatta indipendentemenete dal valore di x. Questo ci porta a concludere che tutti i punti dell'insieme $\{(x, 0) : x \geq 2\}$ sono candidati a soluzione, tutti appartenenti alla frontiera di K.

Nel caso $\lambda > 0$, se ora considero la seconda equazione, ho due possibilitá: la prima é che $x = 0$, il che implica, sfuttando il vincolo, che $y = 1$, ossia il punto $(0, 1)$, che peró non é un candidato accettabile, perché se sfrutto la terza equazione, dopo aver inserito $x = 0$ e $y = 1$, si trova $\lambda = -1$ (ricordiamo che λ deve essere strettamente positivo). La seconda strada é $y = \lambda$ che, tramite il vincolo, ci porta a $x = 2-2\lambda$ e, infine, dalla terza equazione, si arriva a

$$2 - 6\lambda = 0,$$

ossia $\lambda = 1/3$ a cui é associato il candidato $C = (4/3, 1/3)$ appartenente alla frontiera di K.

Riassumendo, tutti i candidati appartengono alla frontiera di K e sono dati dagli infiniti punti sull'asse x con ascissa $x \geq 2$ e dal punto C.

Mostriamo ora che C non puó essere soluzione del nostro problema: un punto di un qualunque intorno U di C é del tipo $(4/3 + h, 1/3 + k)$, con h, k "piccoli". Si osservi che il vincolo $x + 2y \geq 2$, applicato ad un punto del tipo $(4/3 + h, 1/3 + k)$, significa equivalentemente

$$h + 2k \geq 0. \tag{1}$$

Invece i due vincoli di non negativitá sono sempre soddisfatti perché $4/3 + h \to 4/3 > 0$ per $h \to 0$ e, analogamente, $1/3 + k \to 1/3 > 0$ per $k \to 0$.

Dobbiamo valutare il segno di $\Delta f_C(h, k) = f(4/3 + h, 1/3 + k) - f(A)$, che, dopo qualche calcolo, diviene:

$$\Delta f_C(h, k) = hk + \frac{1}{3}h + \frac{2}{3}k - k^2.$$

Se C fosse soluzione del nostro problema, dovremmo avere che $\Delta f_C(h, k) \geq 0$ per tutti gli h, k sufficientemente piccoli e soddisfacenti l'unico vincolo che abbiamo, ossia l' Eq. (1). Invece, se scelgo $h = -2k$, che rispetta il vincolo in forma di uguaglianza, si trova che

$$\Delta f_C(-2k, k) = -3k^2 < 0.$$

Infine, mostriamo che un qualunque candidato del tipo $P = (x, 0)$, per ogni fissato x maggiore o uguale a 2, é soluzione del nostro problema: intanto, si noti che un punto di un qualunque intorno U di P é del tipo $(x+h, k)$, con h, k "piccoli". Si osservi che il vincolo $x + 2y \geq 2$, applicato ad un punto del tipo $(x + h, k)$, significa equivalentemente

$$h + 2k \geq 2 - x.$$

Inoltre il vincolo di non negativitá dato da $x + h \geq 0$ é sempre soddisfatto perché $x + h \to x \geq 2 > 0$ per $h \to 0$, mentre il secondo vincolo di non negativitá diviene semplicemente $k \geq 0$ e questo é da rispettare. In definitiva, vanno bene tutti gli h, k "piccoli" ma tali da rispettare i due vincoli

$$\begin{cases} h + 2k \geq 2 - x \\ k \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Dobbiamo valutare il segno di $\Delta f_P(h, k) = f(x + h, k) - f(P)$, che, dopo qualche calcolo, diviene:

$$\Delta f_P(h, k) = (x + h)k - k^2.$$

Per dimostrare che P é soluzione, bisogna far vedere che $\Delta f_P(h, k) \geq 0$ per tutti gli h, k sufficientemente piccoli e soddisfacenti i due vincoli che abbiamo, ossia l' Eq. (2). Intanto, raccogliendo un k, si ha che

$$\Delta f_P(h, k) = k \cdot (x + h - k),$$

poi, sfruttando il primo vincolo dell'Eq. (2), scritto nella forma $h \geq 2 - x - 2k$, tenendo conto che il secondo vincolo dell'Eq. (2) é $k \geq 0$, deduco che

$$\Delta f_P(h, k) = k \cdot (x + h - k) \geq k \cdot (2 - 3k)$$

e l'ultimo membro della precedente disuguaglianza é sicuramente sempre positivo perché prodotto di k (positivo per ipotesi) con $2 - 3k$, di nuovo sicuramente positivo, perché $2 - k \to 2 > 0$ per $k \to 0$.