ESERCIZI DI METODI QUANTITATIVI PER L'ECONOMIA
DIP. DI ECONOMIA E MANAGEMENT DI FERRARA
A.A. 2017/2018

Esercizi di Programmazione Lineare in Aula

Esercizio 1. Una industria vuole commercializzare un particolare prodotto dietetico, ossia una giusta miscela di due sostanze $S1$ ed $S2$ che fornisca un livello minimo di vitamine B_1, B_2 e B_6. Supposto che un etto di $S1$ costi $0,50$ euro e contenga $0,8$ mg di B_1, 1 mg di B_2 e $0,8$ mg di B_6, mentre un etto di $S2$ costi $0,35$ euro e contenga $0,6$ mg di B_1, $0,6$ mg di B_2 e $0,9$ mg di B_6, se la miscela complessivamente deve contenere almeno $2,8$ mg di vitamina B_1, 9 mg di B_2 e 10 mg di B_6, quanti etti delle due sostanze devono essere utilizzati per minimizzare i costi rispettando i vincoli?

Soluzione. Le incognite x, y sono le quantitá, in etti, dei due tipi di sostanze, quindi x è il numero di etti di $S1$, mentre y è il numero di etti di $S2$. La funzione da minimizzare é il costo in euro, ossia

$$f(x, y) = 0,5x + 0,35y.$$

I vincoli effettivi sono i tetti **minimi** delle tre sostanze affinché possano contenere almeno le quantitá segnalate nel testo delle tre vitamine, ossia, ad esempio, per la vitamina B_1

$$0,8x + 0,6y \geq 2,8.$$

Similmente si ragiona per le altre due vitamine, ossia

$$x + 0,6y \geq 9$$

e

$$0,8x + 0,9y \geq 10.$$

Semplificando algebricamente i tre vincoli e la funzione obiettivo (si moltiplica per dieci e si divide il tutto per fattori in comune nei vincoli, per cento nella funzione obiettivo poi si divide per cinque), il problema, quindi, diviene

$$\begin{cases} \min f(x,y) = 10x + 7y \\ \text{sub} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + 3y \geq 14 \\ 5x + 3y \geq 45 \\ 8x + 9y \geq 100. \end{cases} \end{cases}$$

Il dominio K individuato dai vincoli sopra esposti é certamente non limitato, perché non é difficile vedere che, se si cerca di disegnare K, si trova che esso é formato da tutti i punti del primo quadrante che stanno "sopra" ai due segmenti AC e CB, ove

$$A = (0; 15); \; B = (12,5; 0), \; C = \left(5; \frac{20}{3}\right).$$

Si noti che il fatto che il dominio K sia illimitato non implica che il problema non abbia soluzione. Il problema non ammetterebbe soluzioni se la funzione obiettivo fosse inferiormente illimitata, cosa che in questo caso non é, perché ovviamente $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in K$. Pertanto, essendoci delle soluzioni (ancora non so se una o di piú), almeno una di esse si trova in un vertice di K. I vertici di K sono in tutto tre, ossia A, B e C. Attraverso il metodo del simplesso, calcolo le quote dei vertici e trovo

$$f(A) = 105; \; f(B) = 125; \; f(C) = \frac{290}{3} \cong 96,66,$$

pertanto l'unica soluzione é C (non lasciatevi ingannare dal fatto che la soluzione non é intera; in questo caso é accettabile anche una soluzione in forma di frazione).

Esercizio 2. Una impresa puó usare tre procedimenti differenti, detti **P**1, **P**2 e **P**3, per la produzione di un bene. Ogni unitá di bene, secondo il procedimento **P**1, impiega la macchina 1 per due ore, la macchina 2 per un'ora e la macchina 3 sempre per un'ora, mentre secondo il procedimento **P**2, impiega la macchina 1 per quattro ore, la macchina 2 per due ore e la macchina 3 per tre ore, infine, secondo il procedimento **P**3, impiega la macchina 1 per tre ore, la macchina 2 per quattro ore e la macchina 3 per due ore. Si specifica che ogni unitá di bene, prodotta con un qualunque procedimento, deve essere lavorata su tutte e tre le macchine. Ogni macchina é disponibile per 50 ore. Il profitto per ogni unitá di bene é pari a 15 euro con **P**1, 18 euro con **P**2 e 10 euro con **P**3. Formulare il problema di P.L. in modo da conseguire il massimo profitto e trovare la soluzione ottimale.
AIUTO: la soluzione ottimale non prevede utilizzo del terzo procedimento.

Soluzione. Le incognite x, y, z sono le unitá di bene prodotti rispettivamente con i procedimenti **P**1, **P**2 e **P**3. La funzione da massimizzare é il profitto in euro, ossia

$$f(x, y, z) = 15x + 18y + 10z.$$

I vincoli effettivi sono le disponibilitá di ogni macchina, ossia

$$2x + 4y + 3z \leq 50$$

per la prima, poi

$$x + 2y + 4z \leq 50$$

per la seconda e infine

$$x + 3y + 2z \leq 50$$

per la terza. Il problema, quindi, diviene

$$\begin{cases} \max f(x, y, z) = 15x + 18y + 10z \\ \text{sub} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 2x + 4y + 3z \leq 50 \\ x + 2y + 4z \leq 50 \\ x + 3y + 2z \leq 50. \end{cases} \end{cases}$$

Si noti che il dominio K individuato dai vincoli sopra esposti é certamente limitato. Cerchiamo allora di risolvere tale problema di PL, con $n = 3$ e $m = 3$. Invece di partire dall'origine, per sveltire un pó la cosa, sfruttiamo l'aiuto: l'idea é quella di iniziare da un punto che abbia la terza coordinata nulla. Pensiamo perció ad un sistema in cui una delle tre equazioni sia appunto $z = 0$ e le altre due le scegliamo tra quelle di non negativitá o tra le ultime tre del suddetto sistema (ovviamente viste come equazioni e non come disequazioni). Proviamo con un caso semplice, ossia il sistema

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 50 \end{cases}$$

la cui soluzione é $A = (25; 0; 0)$, compatibile con gli altri vincoli, quindi accettabile. Il profitto legato ad A é la quota $f(A) = 375$ euro.
Cerchiamo i 3 vertici adiacenti ad A: il primo é molto semplice, ossia l'origine, quindi da scartare. Poi, se sostituiamo nel sistema che determina A la seconda equazione

con $x = 0$, ottengo il sistema

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 50, \end{cases}$$

che porta alla soluzione $B = (0; 12,5; 0)$, compatibile con gli altri vincoli, quindi é il secondo vertice adiacente ad A di quota $f(B) = 225 < f(A)$, perció si puó scartare. Infine, se sostituiamo nel sistema che determina A la prima equazione con $x + 2y + 4z = 50$, ottengo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 50 \\ y = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 50, \end{cases}$$

che porta alla soluzione $C = (10; 0; 10)$, compatibile con gli altri vincoli, quindi é il terzo (ed ultimo) vertice adiacente ad A di quota $f(C) = 250 < f(A)$, perció si puó scartare, dal che se ne deduce che A é proprio la soluzione cercata.

Esercizio 3. Dimostrare che il problema di programmazione lineare

$$\begin{cases} \max f(x,y) = -3x + y \\ \text{sub} \begin{cases} 4x - y \leq 0 \\ x \leq 2 \\ y + x \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

non ammette soluzioni.

Soluzione. Il dominio K individuato dai vincoli sopra esposti é certamente non limitato, perché non é difficile vedere che, se si cerca di disegnare K, si trova che esso é formato da tutti i punti della "striscia" del primo quadrante delimitata ai lati dall'asse y e dalla retta $x = 2$ e dal basso dai due segmenti AC e CB, ove

$$A = (0; 2); \ B = (2; 8), \ C = \left(\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right).$$

Dunque, fa parte di K ogni punto di ascissa $x = 2$ e $y \geq 8$ per cui se mi calcolo la quota di un tale punto, ottengo

$$f(2, y) = y - 6 \to +\infty, \quad \text{per} \ y \to +\infty.$$

Il problema di massimo non é pertanto superiormente limitato e conseguentemente non ha soluzione.