ESERCIZI DI METODI QUANTITATIVI PER L'ECONOMIA
DIP. DI ECONOMIA E MANAGEMENT DI FERRARA
A.A. 2017/2018

File esercizi n. 8: programmazione lineare

Esercizio 1. Impostare e risolvere il seguente problema: nella costruzione di una struttura turistica formata da due tipologie di alberghi, **A** e **B**, bisogna tenere in considerazione i seguenti vincoli di natura urbanistico-progettuale:

i) il numero complessivo delle camere dei due alberghi non deve superare le 300 unitá;

ii) il numero delle camere dell'albergo di tipo **B** (quello piú costoso) non deve superare un terzo del numero delle camere dell'albergo di tipo **A**.

Ipotizzando che il prezzo medio delle camere dell'albergo di tipo **A** sia di 80 euro a notte e quello delle camere di tipo **B** di 160 euro a notte, quale sará effettivamente il numero di camere dell'albergo di tipo **A** e quelle dell'albergo di tipo **B** da progettare affinché sia massimo l'incasso della struttura?

Soluzione. Se x, y sono rispettivamente le camere del primo e del secondo tipo di albergo da costruire affinché sia risolto il seguente problema:

$$\begin{cases} \max f(x,y) = 80x + 160y \\ \text{sub} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 300 \\ y \leq \frac{1}{3}x, \end{cases} \end{cases}$$

allora la soluzione é $(x^*, y^*) = (225, 75)$.

Esercizio 2. Impostare e risolvere il seguente problema: un colorificio produce due tipi di coloranti **A** e **B** utilizzando 3 preparati base **P**, **Q** e **R**. Tali preparati devono essere acquistati e subiscono un processo di raffinazione prima di essere utilizzati. Le quantitá (in litri) di preparati base da acquistare per produrre un litro di colorante di ciascuno dei due tipi é riportato nella seguente tabella

	A	**B**
P	1	1
Q	1	2
R	0	1

Ogni mese la quantitá di preparati base (in litri) che possono essere acquistati é la seguente:

P	**Q**	**R**
750	1000	400

Il prezzo di vendita del colorante **A** é di 7 euro al litro, mentre il colorante **B** viene venduto a 10 euro al litro. Determinare la strategia ottimale di produzione mensile in modo da massimizzare i ricavi ottenuti dalla vendita dei due coloranti.

Soluzione. Se x, y sono rispettivamente le quantitá in litri dei due coloranti da produrre tali che sia risolto il seguente problema:

$$\begin{cases} \max f(x,y) = 7x + 10y \\ \text{sub} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 750 \\ x + 2y \leq 1000 \\ y \leq 400, \end{cases} \end{cases}$$

allora la soluzione é $(x^*, y^*) = (500, 250)$.

Esercizio 3. Una pasticceria produce due tipi di creme: ai frutti di bosco ed alla cannella. Per chilo di prodotto sono utilizzate le quantitá di ingredienti riportate nella seguente tabella:

	Crema frutti di bosco	**Crema cannella**
Latte(litri)	12	23
Panna(litri)	35	20
Uova	40	25
Zucchero(grammi)	230	180

La disponibilitá giornaliera degli ingredienti é di 1500 litri di latte, 3150 litri di panna, 2000 uova e 18 chili di zucchero. I dolci sono venduti rispettivamente ai prezzi di 20 euro al chilo e $12,50$ euro al chilo. Impostare e risolvere un modello di programmazione lineare per determinare la produzione giornaliera che massimizzi il ricavo.

Soluzione. Se x, y sono rispettivamente le quantitá in chili delle due creme da produrre tali che sia risolto il seguente problema:

$$\begin{cases} \max f(x,y) = 20x + 12,5y \\ \text{sub} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 12x + 23y \leq 1500 \\ 35x + 20y \leq 3150 \\ 40x + 25y \leq 2000 \\ 230x + 180y \leq 18000, \end{cases} \end{cases}$$

allora ho infinite soluzioni sul segmento **AB** di estremi

$$\mathbf{A} = \Big(\frac{425}{31}, \frac{1800}{31}\Big); \ \mathbf{B} = (50, 0),$$

quindi **una** possibile soluzione é di produrre solo 50 chili di crema ai frutti di bosco.

Esercizio 4. (**Difficile**) Dimostrare che il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{cases} \min f(x,y,z) = 2x + y + 4z \\ \text{sub} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ x \leq 1 \\ y \leq \frac{5}{8} \\ x + 2z \geq 1 \\ 4y - 3z \geq 1, \end{cases} \end{cases}$$

ha soluzione nel punto

$$\mathbf{A} = \Big(1, \frac{1}{4}, 0\Big).$$

Soluzione. Siccome il sottodoninio K determinato dalle 7 disequazioni sopra riportate (3 di non negativitá e 4 effettive) é limitato, esiste sempre almeno una soluzione individuata in un vertice, quale é il punto $\mathbf{A}$, che si ricava dal sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 4y - 3z = 1 \\ x = 1. \end{cases}$$

I 3 vertici adiacenti ad $\mathbf{A}$ sono

$$\mathbf{B} = \left(0, \frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right),$$
$$\mathbf{C} = \left(1, \frac{5}{8}, 0\right),$$
$$\mathbf{B} = \left(1, \frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right),$$

rispettivamente determinati dai sistemi

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 4y - 3z = 1 \\ x = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y = \frac{5}{8} \\ x = 1, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y = \frac{5}{8} \\ 4y - 3z = 1 \\ x = 1. \end{cases}$$

Poiché si vede facilmente che le quote dei 3 vertici adiacenti ad $\mathbf{A}$ sono piú alte di quella di $\mathbf{A}$, la dimostrazione é finita.