ESERCIZI DI METODI QUANTITATIVI PER L'ECONOMIA
DIP. DI ECONOMIA E MANAGEMENT DI FERRARA
A.A. 2017/2018

File esercizi n. 7: ottimizzazione con vincoli di disuguaglianza su domini non limitati

Esercizio 1. Risolvere il problema

$$\begin{cases} \max f(x,y) = y - (x-1)^2 \\ \text{sub } \; x^2 + y \leq 1 \end{cases}$$

avendo cura di determinare tutti i possibili candidati.

Soluzione. Si noti che il sottodominio K su cui insiste la funzione obiettivo f non è limitato, pertanto non vale Weierstrass e non è detto che il problema abbia una soluzione. Se cerchiamo tra i candidati (in senso debole, rispetto a quando usiamo il metodo delle restrizioni, perché non sappiamo nemmano se esistano soluzioni), vediamo facilmente che non possono stare nell'interno di K. Impostando il problema come se ci fosse un unico vincolo in forma di uguaglianza, l'unico candidato (debole) è il punto $A = (1/2, 3/4)$ che sta sulla frontiera. Se calcoliamo $\Delta_A f(h,k) = f(1/2 + h, 3/4 + k) - f(A)$, con h, k "piccoli" e verificanti l'unico vincolo $x^2 + y \leq 1$, ossia

$$\left(\frac{1}{2} + h\right)^2 + \left(\frac{3}{4} + k\right) \leq 1,$$

o, equivalentemente,

$$h^2 + h + k \leq 0,$$

si trova che

$$\Delta_A f(h,k) = h - h^2 + k.$$

Se ora sfruttiamo il vincolo scritto in precedenza e lo immettiamo in $\Delta_A f(h,k)$, otteniamo che

$$\Delta_A f(h,k) \leq -2h^2 < 0 \;\; \text{per ogni} \;\; h \neq 0,$$

pertanto abbiamo dimostrato che A è una soluzione locale del problema posto.

Esercizio 2. Determinare col metodo di KKT tutti i candidati alla soluzione del problema

$$\begin{cases} \max f(x,y) = (x^2-3)y \\ \text{sub} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq x. \end{cases} \end{cases}$$

Successivamente, individuare la natura di almeno un candidato trovato.

Soluzione. Si noti che non vale Weierstrass, perché il sottodominio K su cui insiste la f non é limitato. I punti sulla frontiera sono sempre qualificati perché la frontiera é fatta o solo del semiasse positivo delle ascisse o dell'origine (tutti e due sempre qualificati), o solo del tipo $g(x,y) = 0$, ove $g(x,y) = x - y$, con gradiente $\nabla g(x,y) = (1,-1) \neq 0$. Il sistema impostato in base alla condizione necessaria del teorema di KKT porta, nel caso $\lambda = 0$, a individuare come candidati tutti e soli i punti dell'asse x, ossia $\{(x,0) : x \geq 0\}$, tutti di frontiera. Nel caso $\lambda > 0$, l'unico candidato che salta fuori dal sistema é l'origine, che peró faceva giá parte dell'insieme dei candidati trovati al punto precedente. Individuiamo la natura di un punto sull'asse x: siccome un punto di un qualunque intorno U di $(x_0, 0)$, con $x_0 \geq 0$, é del tipo $(x_0 + h, k)$, con h, k "piccoli", h di qualunque segno e $k \geq 0$, con il vincolo $k \leq x_0 + h$, una volta calcolato $\Delta f = f(x_0 + h, k) - f(x_0, 0)$, dato da

$$\Delta f = (h^2 + 2x_0h + x_0{}^2 - 3) \cdot k,$$

si noti che il segno di Δf concide con quello di

$$h^2 + 2x_0h + x_0{}^2 - 3,$$

che, per $h \to 0$, tende a $x_0{}^2 - 3$. Siccome noi siamo interessati a trovare punti di massimo, consideriamo solo il caso in cui $\Delta f \leq 0$, il che ci porta ad escludere il caso $x_0{}^2 - 3 > 0$. Quando invece $x_0{}^2 - 3 < 0$, ossia per $x \in [0, \sqrt{3}[$, si ha quindi che $\Delta f \leq 0$, perció tutti i punti dell'asse x con ascissa compresa tra zero e $\sqrt{3}$ (esclusa) sono di massimo, mentre si vede facilmente che $(\sqrt{3}, 0)$ non é soluzione.

Esercizio 3. Risolvere il seguente problema:

$$\max f(x,y) = x^2y - x - y^2$$

sotto le condizioni

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq x^2. \end{cases}$$

Soluzione. Si noti che non vale Weierstrass, perché il sottodominio K su cui insiste la f non é limitato, quindi usiamo il teorema di KKT per trovare i punti candidati alla soluzione. Per la QV, poiché il gradiente del vincolo, espresso nella forma $g(x, y) \geq 0$, con $g(x, y) = x^2 - y$, é dato da $(2x, -1)$, abbiamo che g_y non si annulla mai, e siccome nessun punto (tranne l'origine, sempre qualificato) puó stare contemporaneamente sulla parte di frontiera $y = x^2$ che su uno degli assi, ció é sufficiente a garantire che la QV sia sempre valida. I punti trovati con KKT sono $\mathbf{O} = (0, 0)$ e $\mathbf{A} = (1, 1/2)$. Siccome $\mathbf{A}$ sta nell'interno di K, possiamo andare ad indagare la sua natura, passando alla Hessiana, grazie alla quale si scopre che $\mathbf{A}$ é un punto sella. Individuiamo ora la natura di $\mathbf{O}$. Se si pensa che non sia solo un candidato (tra l'altro, l'unico) alla soluzione, ma proprio la soluzione stessa, si deve mostrare che, presi $h, k \geq 0$, "piccoli" quanto si vuole, col vincolo che $(h, k) \in K$, ossia che $h, k \geq 0$ e $k \leq h^2$, si abbia che il segno di $\Delta f(h, k) = f(h, k) - f(0, 0)$, dato da

$$\Delta f(h, k) = h^2 k - h - k^2,$$

sia sempre negativo. Intanto, poiché $-k^2 \leq 0$, si ha che $h^2 k - h - k^2 \leq h^2 k - h$; inoltre, sfruttando il vincolo $k \leq h^2$, trovo inoltre che $h^2 k - h \leq h^4 - h = h(h^3 - 1)$ e poiché $h \geq 0$, ma $h^3 - 1 \to -1$ per $h \to 0$, ricavo definitivamente che $\Delta f(h, k) \leq 0$ per ogni (h, k) ammessa e dunque abbiamo dimostrato che $\mathbf{O}$ é un punto di massimo vincolato locale.

Esercizio 4. Dimostrare che i punti che possono essere soluzione del problema

$$\begin{cases} \min f(x, y) = x^2 + 2y^2 \\ \text{sub} \begin{cases} x + y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

sono tre e mostrare la vera natura di uno solo, a vostra scelta, dei tre.
FACOLTATIVO: mostrare la vera natura degli altri due.

Soluzione. Visto che il problema é con vincoli di diseguaglianza (uno solo effettivo, gli altri due di non negativitá), essendo $n = 2$, é preferibile disegnare il sottodominio K su cui insiste la funzione obiettivo.
Se individuiamo tale insieme K, vediamo che é un sottoinsieme illimitato del primo quadrante del piano cartesiano, ossia tutto il primo quadrante escluso il triangolo di vertici $\mathbf{O}$, $\mathbf{A} = (0, 1)$ e $\mathbf{B} = (1, 0)$, ma compreso il suo lato obliquo.
Essendo K non limitato, possiamo procedere col metodo di KKT. La discussione della QV la lasciamo all'attento lettore, comunque é facile visto che il gradiente del

vincolo, espresso nella forma $g(x, y) \leq 0$, con $g(x, y) = 1 - x - y$, é dato da $(-1, -1)$. Ora costruisco la Lagrangiana, data da

$$L(\lambda, x, y) = x^2 + 2y^2 + \lambda(1 - x - y).$$

La sola condizione necessaria di primo ordine porta al seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda(1 - x - y) = 0 \\ x(2x - \lambda) = 0 \\ y(4y - \lambda) = 0. \end{cases}$$

Se pongo $\lambda = 0$ nella prima equazione e inserisco tale valore nelle altre due equazioni, l'unica soluzione che trovo facilmente é $\mathbf{O}$, che peró non appartiene a K, quindi é inaccettabile. Nel caso $\lambda > 0$, se ora considero la seconda equazione, ho due possibilitá: la prima é che $x = 0$, il che implica, sfruttando il vincolo, che $y = 1$, dunque trovo il primo candidato, ossia $\mathbf{A} = (0, 1)$ che appartiene alla frontiera di K: il fatto che dalla terza equazione si ricavi $\lambda = 4$ ci dice che $\mathbf{A}$ é accettabile. La seconda strada é $x = \lambda/2$ che, tramite il vincolo, ci porta a $y = 1 - \lambda/2$ e, infine, dalla terza equazione, si ricava che

$$(1 - \lambda/2) \cdot (4 - 3\lambda) = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4/3$. Tornando indietro, si ricavano rispettivamente i candidati $\mathbf{B} = (1, 0)$ e $\mathbf{C} = (2/3, 1/3)$, entrambi accettabili e appartenenti alla frontiera di K.
Mostriamo ora che sia $\mathbf{A}$ che $\mathbf{B}$ non sono soluzioni. Cominciamo con $\mathbf{A}$: un punto di un qualunque intorno U di $\mathbf{A}$ é del tipo $(h, 1 + k)$, con h, k "piccoli" e $h \geq 0$ con il vincolo che $(h, 1 + k) \in K$, ossia

$$h + 1 + k \geq 1,$$

o equivalentemente

$$h + k \geq 0. \tag{1}$$

Se $\mathbf{A}$ fosse soluzione, il segno di $\Delta_{\mathbf{A}} f(h, k) = f(h, 1 + k) - f(\mathbf{A})$, dato da

$$\Delta_{\mathbf{A}} f(h, k) = h^2 + 2k^2 + 4k,$$

dovrebbe essere sempre non negativo. Invece, si vede facilmente che $\Delta_{\mathbf{A}} f(h, k) = h(3h - 4) < 0$ se $k = -h,\ h > 0$ e $h < 4/3$ (si noti che il vincolo (1) é rispettato). Allo stesso modo, si dimostra che anche $\mathbf{B}$ non é soluzione. Infine, mostriamo che $\mathbf{C}$ é la soluzione cercata: infatti, si ha che un punto di un qualunque intorno U di $\mathbf{C}$ é del tipo $(2/3 + h, 1/3 + k)$, con h, k "piccoli" e tali da rispettare il vincolo (1). Tramite un semplice calcolo si ha che

$$\Delta_{\mathbf{C}} f(h, k) = f(2/3 + h, 1/3 + k) - f(\mathbf{C})$$

é dato da

$$\Delta_{\mathbf{C}} f(h,k) = h^2 + \frac{4}{3}h + 2k^2 + \frac{4}{3}k$$

ed é facile vedere che $\Delta_{\mathbf{C}} f(h,k)$ é sempre non negativo, perché é la somma di due quadrati, ossia $h^2 + 2k^2$, e di un termine, ossia $4/3(h+k)$, sicuramente non negativo a causa del vincolo (1).

Esercizio 5. Determinare tutti i candidati al problema

$$\begin{cases} \max f(x,y) = 3x^2 - 2y^2 \\ \text{sub} \begin{cases} x - 2y \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

e mostrare la vera natura di uno solo di essi, a vostra scelta.

Soluzione. Visto che il problema é con vincoli di diseguaglianza (uno solo effettivo, gli altri due di non negativitá), essendo $n = 2$, é preferibile disegnare il sottodominio K su cui insiste la funzione obiettivo. Se individuiamo tale insieme K, vediamo che é un sottoinsieme illimitato del primo quadrante del piano cartesiano, con frontiera data dall'asse y, da un tratto dell'asse x che va dal punto $O = (0,0)$ fino al punto $A = (1,0)$ e, infine, dalla semiretta di equazione $x - 2y = 1$ che parte dal punto A e attraversa il primo quadrante con pendenza positiva pari a $1/2$ (se volete disegnarla, basta che si tracci la semiretta che parte da A, passa, ad esempio, per $B = (5,2)$ e continua su tutto il primo quadrante).
Essendo K non limitato, non possiamo usare il metodo delle restrizioni, quindi procediamo col metodo di KKT. La condizione di qualificazione dei vincoli (QV) si riduce ad escludere gli eventuali punti che annullano il gradiente del vincolo, espresso nella forma $g(x,y) \geq 0$, con $g(x,y) = 1 - x + 2y$. Poiché il gradiente del vincolo é dato da $(-1,2)$, la QV é sempre soddisfatta. Ora costruisco la Lagrangiana, data da

$$L(\lambda, x, y) = 3x^2 - 2y^2 + \lambda(1 - x + 2y).$$

La sola condizione necessaria di primo ordine porta al seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda(1 - x + 2y) = 0 \\ x(6x - \lambda) = 0 \\ y(-4y + 2\lambda) = 0. \end{cases}$$

Se pongo $\lambda = 0$ nella prima equazione e inserisco tale valore nelle altre due equazioni, l'unica soluzione che trovo facilmente é O, che sta, come sappiamo, sulla frontiera di K, quindi é un candidato accettabile. Se, invece, l'unico vincolo effettivo é attivo, ossia $\lambda > 0$, allora la prima equazione (ossia, il vincolo) diviene $x - 2y = 1$. Se ora considero la seconda equazione, ho due possibilitá: la prima é che $x = 0$, il che peró

implicherebbe, sfuttando il vincolo, che $y = -1/2$, soluzione non accettabile perché viola il vincolo di non negativitá. Dunque, é accettabile solo il caso che $x > 0$ e che $6x - \lambda = 0$, ossia $x = \lambda/6$. Nella terza equazione ho di nuovo due possibilitá: se $y = 0$, il vincolo mi impone che $x = 1$ e $\lambda = 6$, quindi tale candidato, dato dal punto A, é accettabile. Se invece percorro la strada di $-4y + 2\lambda = 0$, ricaverei $y = \lambda/2$. Se ora inserisco nel vincolo le soluzioni $x = \lambda/6$ e $y = \lambda/2$, trovo che $\lambda = -6/5 < 0$, quindi inaccettabile. In conclusione, gli unici due candidati alla soluzione del mio problema di masssimo sono O e A, entrambi sulla frontiera di K.
Indaghiamo sulla natura dei candidati. Cominciamo con O: un punto di un qualunque intorno U di O é del tipo (h, k), con h, k "piccoli", non negativi e tali che $h-2k \leq 1$. Se O fosse soluzione, il segno di $\Delta f(O) = f(h, k) - f(O)$, dato da

$$\Delta f(O) = 3h^2 - 2k^2,$$

sarebbe minore o uguale a zero, ma si vede facilmente che $\Delta f(O) > 0$ se $h > 0$ e $k = 0$ (si noti che il vincolo $h - 2k \leq 1$ è soddisfatto), quindi O non é soluzione. Vediamo ora il punto A: un punto di un qualunque intorno U di A é del tipo $(1 + h, k)$, con h, k "piccoli", h sia positivo che negativo, mentre $k \geq 0$. Ricordiamo che il vincolo $x - 2y \leq 1$ applicato ad un punto del tipo $(1 + h, k)$, significa che

$$1 + h - 2k \leq 1,$$

ossia equivalentemente

$$h \leq 2k. \tag{2}$$

Tale condizione ci assicura che il punto $(1 + h, k)$ cada effettivamente dentro K. Mostriamo ora che anche A non é soluzione. Infatti, se fosse soluzione, il segno di $\Delta f(A) = f(1 + h, k) - f(A)$, in generale dato da

$$\Delta f(A) = 3(1 + h)^2 - 2k^2 - 3 = 3h^2 + 6h - 2k^2,$$

sarebbe sempre minore o uguale a zero. Invece, se scegliamo un punto del tipo (k, k), con $k > 0$ (ossia, $h = k$), tutti i vincoli sono soddisfatti e in questo caso particolare si ha

$$\Delta f(A) = k^2 + 6k,$$

quantitá che è sempre chiaramente positiva, perché somma di quantitá positive.
La conclusione è pertanto che tale problema non ammette soluzioni.

Esercizio 6. Dato il problema

$$\begin{cases} \max f(x,y) = \frac{1}{(x+1)(y+1)} \\ \text{sub} \begin{cases} x+y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0, \end{cases} \end{cases}$$

dimostrare che i candidati alla soluzione sono tre e mostrare la vera natura di uno solo, a vostra scelta, dei tre.
FACOLTATIVO: mostrare la vera natura degli altri due.

Soluzione. Visto che il problema é con vincoli di diseguaglianza (uno solo effettivo, gli altri due di non negativitá), essendo $n = 2$, é preferibile disegnare il sottodominio K su cui insiste la funzione obiettivo.
Se individuiamo tale insieme K, vediamo che é un sottoinsieme illimitato del primo quadrante del piano cartesiano, ossia tutto il primo quadrante escluso il triangolo di vertici O, $A = (0,2)$ e $B = (2,0)$, ma compreso il suo lato obliquo.
Essendo K non limitato, non possiamo usare il metodo delle restrizioni, quindi procediamo col metodo di KKT. La condizione di qualificazione dei vincoli (QV) porta a studiare il caso in cui il gradiente del vincolo, espresso nella forma $g(x,y) \geq 0$, ove $g(x,y) = x+y-2$, si annulli. Tuttavia, questo non puó mai accadere, perché tale gradiente é dato da $(1,1)$, quindi i tre candidati che dobbiamo determinare si trovano tra i punti stazionari della lagrangiana, data da

$$L(\lambda, x, y) = \frac{1}{(x+1)(y+1)} + \lambda(x+y-2).$$

La sola condizione necessaria di primo ordine porta al seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda(x+y-2) = 0 \\ x(-\frac{1}{(x+1)^2(y+1)} + \lambda) = 0 \\ y(-\frac{1}{(x+1)(y+1)^2} + \lambda) = 0. \end{cases}$$

Se pongo $\lambda = 0$ nella prima equazione e inserisco tale valore nelle altre due equazioni, l'unica soluzione che trovo facilmente é O, che peró non appartiene a K, quindi é inaccettabile. Nel caso $\lambda > 0$, se ora considero la seconda equazione, ho due possibilitá: la prima é che $x = 0$, il che implica, sfuttando il vincolo, che $y = 2$, dunque trovo il primo candidato, ossia A, che appartiene alla frontiera di K: il fatto che dalla terza equazione si ricavi un valore positivo di λ (precisamente, $\lambda = \frac{1}{9}$) ci dice che A é accettabile. La seconda strada é, presupponendo $x > 0$, porre

$$\lambda = \frac{1}{(x+1)^2(y+1)}.$$

Se ora considero la terza equazione, ho di nuovo due possibilitá: $y = 0$ oppure $y > 0$. Nel primo caso, analogamente alla situazione vista prima, troveró come candidato il punto B, associato allo stesso valore positivo di λ trovato in precedenza per il punto A. Nel secondo caso, infine, posso ricavare

$$\lambda = \frac{1}{(x+1)(y+1)^2}.$$

Se ora uguaglio i due valori di λ esplicitati nelle ultime due formule, si deduce facilmente che $x = y$: dall'equazione di vincolo, si ricava il terzo candidato $C = (1, 1)$, che appartiene sempre alla frontiera di K ed é accettabile, perché é associato ad un valore positivo di λ (esattamente, $\lambda = \frac{1}{8}$).
Mostriamo ora che C non é soluzione. Un punto di un qualunque intorno U di C é del tipo $(1 + h, 1 + k)$, con h, k "piccoli". Si deve sempre imporre che un tale punto deve stare in K, ossia applicare a tale punto i tre vincoli del problema, i due di non negativitá e quello effettivo. I due vincoli di non negativitá non influiscono sul segno di h e k, perché $1 + h$ e, allo stesso modo, $1 + k$ sono sempre positivi, qualunque sia il segno di h e k (purché "piccoli", come da ipotesi). Al contrario, il vincolo effettivo $x + y \geq 2$, applicato ad un punto del tipo $(1 + h, 1 + k)$, significa che

$$1 + h + 1 + k \geq 2,$$

ossia equivalentemente

$$h + k \geq 0. \tag{3}$$

Poiché si deve valutare il segno di $\Delta f(C) = f(1 + h, 1 + k) - f(C)$, dato da

$$\Delta f(C) = \frac{1}{(2+h)(2+k)} - \frac{1}{4} = -\frac{2h + 2k + hk}{4(2+h)(2+k)},$$

si vede facilmente che $\Delta f(C)$ ha lo stesso segno del termine $-2h - 2k - hk$, quindi, di qui in avanti, ragioneremo sul segno di quest'ultimo termine. Per mostrare che C non é soluzione, bisogna trovare una coppia (h, k), compatibile con l'equazione (3), in corrispondenza della quale il termine $-2h - 2k - hk$ sia positivo. Se consideriamo una coppia del tipo $(h, -h)$ con $h > 0$, compatibile con (3), si ha che $-2h-2k-hk = h^2 > 0$ ed ho finito.
Mostriamo ora che A é soluzione del problema: per la simmetria dell'intero problema rispetto alle due variabili x e y, questo implica automaticamente che anche B é punto di massimo. Un punto di un qualunque intorno U di A é del tipo $(h, 2 + k)$, con h, k "piccoli". Si deve sempre imporre che un tale punto deve stare in K, ossia applicare a tale punto i tre vincoli del problema, i due di non negativitá e quello effettivo. Il secondo vincolo di non negativitá non influisce sul segno di k, perché $2 + k$ é sempre positivo, mentre il primo impone che $h \geq 0$. Il vincolo effettivo $x + y \geq 2$, applicato

ad un punto del tipo $(h, 2+k)$, significa che

$$h + 2 + k \geq 2,$$

ossia di nuovo l'equazione (3). In definitiva, una coppia (h, k) é accettabile se soddisfa le due condizioni

$$\begin{cases} h \geq 0 \\ h + k \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Poiché si deve valutare il segno di $\Delta f(A) = f(h, 2+k) - f(A)$, dato da

$$\Delta f(A) = \frac{1}{(1+h)(3+k)} - \frac{1}{3} = -\frac{3h + k + hk}{3(1+h)(3+k)},$$

si vede facilmente che $\Delta f(A)$ ha lo stesso segno del termine $-3h - k - hk$, quindi, di qui in avanti, ragioneremo sul segno di quest'ultimo termine. Per mostrare che A é un massimo, bisogna far vedere che il termine $-3h - k - hk$ é negativo, o, equivalentemente, $3h + k + hk \geq 0$, comunque presa una coppia (h, k) compatibile con i vincoli espressi dalla formula (4). Allora, sfruttando la seconda equazione della formula (4) nella forma $k \geq -h$, si ha che

$$3h + k + hk = 3h + k(1 + h) \geq 3h - h(1 + h) = 2h - h^2 = h(2 - h)$$

e, ricordando che $h \geq 0$, si deduce immediatamente che il prodotto $h(2 - h) \geq 0$, concludendo in tal modo la dimostrazione.