ESERCIZI DI METODI QUANTITATIVI PER L'ECONOMIA
DIP. DI ECONOMIA E MANAGEMENT DI FERRARA
A.A. 2017/2018

File esercizi n. 6: ottimizzazione con vincoli di disuguaglianza e teorema di Weierstrass

Esercizio 1. Determinare il punto di massimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

sotto le condizioni

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 2 \end{cases}$$

Soluzione. Si noti che il sottodominio K su cui insiste la funzione obiettivo f è certamente limitato (é un triangolo del piano cartesiano), quindi vale Weierstrass e possiamo usare il metodo delle restrizioni. Il punto cercato é $\mathbf{A} = (0, 2)$.

Esercizio 2. Determinare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 - 4xy + y$$

sotto le condizioni

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$

Soluzione. Si noti che il sottodominio K su cui insiste la funzione obiettivo f è certamente limitato (é un triangolo del piano cartesiano), quindi vale Weierstrass e possiamo usare il metodo delle restrizioni. I punti cercati sono $\mathbf{A} = (0, 1)$ e $\mathbf{B} = (1, 0)$ di massimo, mentre $\mathbf{C} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é di minimo.

Esercizio 3. Determinare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 1$$

sotto la condizione

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Soluzione. Si noti che il sottodominio K su cui insiste la funzione obiettivo f è certamente limitato (é il cerchio di centro l'origine e raggio $r = 1$), quindi vale Weierstrass e possiamo usare il metodo delle restrizioni. I punti cercati sono l'origine, che é di minimo globale, mentre $\mathbf{A} = (0,1)$ e $\mathbf{B} = (0,-1)$ sono di massimo globale.

Esercizio 4. Determinare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = x + 2y + 3z$$

sotto la condizione

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 14.$$

Soluzione. Si noti che il sottodominio K su cui insiste la funzione obiettivo f è certamente limitato, perché é una sfera di $\mathbb{R}^3$, quindi vale Weierstrass e possiamo usare il metodo delle restrizioni, anche in caso non si riuscisse a rappresentare graficamente K. Se cerco la soluzione sulla parte interna di K, vedo che il gradiente di f non si annulla mai, quindi non possono esistere soluzioni in tale zona. Passo allora alla frontiera di K, che é unicamente rappresentata dal vincolo di uguaglianza $x^2 + y^2 + z^2 = 14$. Qui, applico il metodo della Lagrangiana (la condizione di qualificazione dei vincoli é sempre verificata tranne che nell'origine, che peró non sta sulla frontiera) e trovo due soli punti, ossia $\mathbf{A} = (-1,-2,-3)$ e $\mathbf{B} = (1,2,3)$ e tramite le quote concludo che $\mathbf{A}$ é di minimo assoluto, mentre $\mathbf{B}$ é di massimo assoluto.

Esercizio 5. Determinare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3y + xy$$

sotto la condizione

$$x^2 + y^2 \leq 9.$$

Soluzione. Si noti che il sottodominio K su cui insiste la funzione obiettivo f è certamente limitato, perché é un cerchio del piano cartesiano di centro l'origine e raggio 3, quindi vale Weierstrass e possiamo usare il metodo delle restrizioni. Se cerco la soluzione sulla parte interna di K, trovo un unico candidato, ossia il punto $P_1 \equiv (-1, 2)$ di quota pari a -3. Passo allora alla frontiera di K, che é unicamente rappresentata dal vincolo di uguaglianza $x^2 + y^2 = 9$. Qui, applico il metodo della Lagrangiana (si vede facilmente che non si hanno punti critici) e trovo tre punti stazionari, ossia $P_2 \equiv (3, 0)$, $P_3 \equiv (-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ e $P_4 \equiv (-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$ e tramite le quote concludo che P_1 é di minimo assoluto, mentre P_4 é di massimo assoluto.

Esercizio 6. (**Difficile**) Risolvere il problema

$$\begin{cases} \min f(x, y) = 2x^3 + 3y \\ \text{sub} \begin{cases} x + y \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

avendo cura di determinare tutti i possibili candidati.

Soluzione. Visto che il problema, con vincoli di diseguaglianza, é a dimensione $n = 2$, é preferibile disegnare il sottodominio K su cui insiste la funzione obiettivo. Se individuiamo tale insieme K, vediamo che é un sottoinsieme limitato del primo quadrante del piano cartesiano dato dallo spicchio di cerchio di centro l'origine O e raggio unitario ottenuto **togliendo** al cerchio stesso (o meglio, alla sua intersezione col primo quadrante) il triangolo rettangolo di vertici O, $A = (0, 1)$ e $B = (1, 0)$.
Essendo K limitato, per Weierstrass sappiamo che possiamo cercare il minimo globale ed usare il metodo delle restrizioni. Intanto vediamo se tale punto (supponendo che sia unico, ma non é detto) stia nell'interno di K, quindi cerchiamo i punti stazionari di f, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 6x^2 = 0 \\ 3 = 0, \end{cases}$$

che ovviamente non puó avere alcuna soluzione a causa della seconda equazione. Pertanto, non vi sono candidati alla soluzione nell'interno di K.
Cerchiamo allora la soluzione sulle 2 frontiere, partendo da $\mathbf{F}_1$, ossia il lato AB del triangolo suddetto, definito dall'equazione $y = 1 - x$, con $x \in [0, 1]$. Se restringo la f a $\mathbf{F}_1$, in simboli $f|_{\mathbf{F}_1}$, trovo che

$$f|_{\mathbf{F}_1} = \varphi_1(x) = 2x^3 - 3x + 3, \ x \in [0, 1].$$

Dalla derivata $\varphi_1'(x) = 6x^2 - 3$, essendo evidente che $6x^2 - 3 \geq 0$ per $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, intersecando tale soluzione col dominio, si trova $x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$. Pertanto, tale funzione é decrescente su $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ e crescente su $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$, quindi il candidato a punto di minimo é $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. In termini delle due variabili originarie, il candidato é $C = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ e la sua quota, dopo qualche passaggio algebrico, si dimostra essere $f(C) = 3 - \sqrt{2}$.
Per f ristretta a $\mathbf{F}_2$, ossia al tratto di circonferenza di centro O e $r = 1$ che collega i due punti A e B, conviene usare il metodo della lagrangiana, quindi studio la funzione

$$L(\lambda, x, y) = 2x^3 + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

La QV mi porta a studiare il caso $(h_x, h_y) = (0, 0)$, ove $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Essendo $(h_x, h_y) = (2x, 2y)$, l'unica soluzione sarebbe l'origine, che peró non appartiene alla circonferenza, quindi non si hanno punti non qualificati e i candidati si trovano esclusivamente tra i punti stazionari della lagrangiana.
Il sistema di primo ordine per trovare i punti stazionari della lagrangiana é

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 6x^2 + 2\lambda x = 0 \\ 3 + 2\lambda y = 0. \end{cases}$$

Se riscriviamo la seconda equazione come $2x(3x+\lambda) = 0$, abbiamo due possibilitá, ossia $x = 0$ oppure $x = -\lambda/3$. Nel primo caso, andando nella prima equazione, ricaviamo l'unica soluzione **accettabile** $y = 1$, quindi il primo candidato é il punto A, di quota $f(A) = 3$. Essendo peró $f(A) > f(C)$, si puó tranquillamente scartare tale candidato. Nel secondo caso, essendo chiaro dalla terza equazione che $\lambda = 0$ non porta ad alcuna soluzione, si ricava che $y = \frac{-3}{2\lambda}$. Inserendo ora nella prima equazione i valori di x e y in tal modo ottenuti, si ha che

$$\frac{\lambda^2}{9} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1,$$

ossia, dopo qualche facile passaggio algebrico,

$$4\lambda^4 - 36\lambda^2 + 81 = 0.$$

Non é difficile vedere che la precedente equazione puó esser scritta come $(2\lambda^2 - 9)^2 = 0$ e dunque ammette come soluzione $\lambda^2 = 9/2$, ossia $\lambda = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. Poiché é facile vedere che con $\lambda > 0$ si genera un punto non appartenente alla frontiera considerata, scartiamo $\lambda = \frac{3}{\sqrt{2}}$ e teniamo solo $\lambda = -\frac{3}{\sqrt{2}}$, da cui si arriva al punto

$$D = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

di quota $f(D) = 2\sqrt{2}$. Essendo peró $f(D) > f(C)$, si puó tranquillamente scartare anche tale candidato e pertanto si conclude che la soluzione cercata é individuata nel punto C.

Esercizio 7. **(Difficile)** Risolvere il problema

$$\begin{cases} \max f(x,y) = \frac{y}{(1+y^2)(1+x)} \\ \text{sub} \begin{cases} y^2 \leq x \\ x \leq 4, \end{cases} \end{cases}$$

avendo cura di determinare tutti i candidati.

Facoltativo: Dimostrare che il suddetto problema ha la stessa soluzione anche se si toglie il vincolo $x \leq 4$.

Soluzione. Visto che il problema é con vincoli di diseguaglianza, essendo $n = 2$, é preferibile disegnare il sottodominio K su cui insiste la funzione obiettivo. Se individuiamo tale insieme K, vediamo che é un sottoinsieme limitato compreso tra primo e quarto quadrante, simmetricamente posto sopra e sotto il semiasse positivo delle ascisse, che potremmo definire un "*triangolo curvilineo*" avente come unico lato rettilineo il segmento che collega i vertici $\mathbf{A} = (4, -2)$ e $\mathbf{B} = (4, 2)$, mentre gli altri due "lati" sono il tratto della curva $y = \sqrt{x}$ compreso tra l'origine e il punto $\mathbf{B}$, e il tratto della curva $y = -\sqrt{x}$ compreso tra l'origine e il punto $\mathbf{A}$. Siccome vale il teorema di Weierstrass, sappiamo che esiste almeno una soluzione globale. In realtá, possiamo semplificare il nostro studio, riducendo K a K_1, ove

$$K_1 = K \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\},$$

ossia la parte di K compresa nel primo quadrante. Infatti é facile vedere che $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in K_1$ e che la f é "antisimmetrica" rispetto all'asse y, ossia $f(x,-y) = -f(x,y)$ per ogni $(x,y) \in K_1$. Ció implica il fatto che la f sia negativa sulla parte di K compresa nel quarto quadrante, il che comporta direttamente che, essendo noi interessati a trovare il massimo, possiamo appunto limitarci a studiare la f su K_1.

Essendo K_1 limitato, possiamo usare il metodo delle restrizioni. Cerchiamo la soluzione (senza dimenticare che le soluzioni potrebbero essere piú di una) nell'interno di K_1. Il sistema per la ricerca dei punti stazionari di f porta a

$$\begin{cases} -\frac{y}{(1+y^2)(1+x)^2} = 0 \\ \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2(1+x)} = 0. \end{cases}$$

Siccome la prima equazione é soddisfatta solo per $y = 0$, immettiamo tale valore nella seconda equazione e troviamo $\frac{1}{1+x} = 0$ che non ha evidentemente alcuna soluzione, quindi possiamo scartare l'interno di K_1 e concentrarci sulla sua frontiera. Cominciamo a cercare le nostre soluzioni sul segmento (rettilineo) $\mathbf{BC}$, ove $\mathbf{C} = (4, 0)$, di equazione $x = 4$, con y compreso tra 0 e 2: restringendo a tale sottodominio la nostra funzione obiettivo, essa diviene facilmente

$$\varphi(y) = f(4, y) = \frac{y}{5(1 + y^2)}, \; y \in D_1 = [0, 2].$$

A questo punto studiamo la derivata di φ su D_1, ossia $\varphi'(y) \geq 0$ per $y \in D_1$, ottenendo

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1 - y^2}{(1 + y^2)^2} \geq 0 \; \text{ per } y \in D_1.$$

Non é difficile vedere che la suddetta disuguaglianza é verificata su D_1 per $y \in [0, 1]$, quindi φ é crescente su $[0, 1]$ e decrescente su $[1, 2]$. Pertanto, il candidato a punto di massimo si ha in corrispondenza di $y = 1$, con quota $\varphi(1) = 1/10$, o, che é lo stesso, il candidato nelle originarie due variabili é il punto $\mathbf{D} = (4, 1)$ con quota $f(\mathbf{D}) = \varphi(1) = 1/10$. Consideriamo ora il tratto di curva $y = \sqrt{x}$ tra l'origine e $\mathbf{B}$: abbiamo due possibilitá, ossia sostituire $\sqrt{x}$ al posto di y nella funzione obiettivo, con $x \in [0, 4]$ (lasciamo all'intraprendente lettore questa strada), oppure adottare il metodo della lagrangiana, qui data da

$$L(\lambda, x, y) = \frac{y}{(1 + y^2)(1 + x)} + \lambda(y^2 - x).$$

La condizione di qualificazione dei vincoli (QV), mi porta alla risoluzione del sistema $(g_x, g_y) = (0, 0)$, ove $g(x, y) = y^2 - x$, ossia $(-1, 2y) = (0, 0)$, che non ha alcuna soluzione, dunque tutti i candidati coincidono con i punti stazionari della lagrangiana.
Il sistema di primo ordine diventa

$$\begin{cases} y^2 - x = 0 \\ -\frac{y}{(1+y^2)(1+x)^2} - \lambda = 0 \\ \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2(1+x)} + 2\lambda y = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione, ricaviamo

$$\lambda = -\frac{y}{(1 + y^2)(1 + x)^2},$$

mentre dalla terza, osservato che il caso $y = 0$ non porta ad alcuna soluzione, possiamo ipotizzare che $y \neq 0$ e ricavare λ, ottenendo

$$\lambda = -\frac{1 - y^2}{2y(1 + y^2)^2(1 + x)}.$$

Uguagliando le ultime due equazioni, dopo qualche semplificazione algebrica, si trova

$$2y^2(1 + y^2) = (1 - y^2)(1 + x).$$

Se ora sfruttiamo il vincolo, tale equazione diviene

$$2x(1+x) = (1-x)(1+x),$$

ossia l'equazione di secondo grado $3x^2 + 2x - 1 = 0$ che ha come soluzioni $x = -1$ e $x = 1/3$. Teniamo solo la seconda, perché la prima é chiaramente inaccettabile (ricordiamo che $x \geq 0$ in K), e troviamo perció il secondo candidato $\mathbf{E} = (1/3, 1/\sqrt{3})$ appartenente al pezzo di frontiera considerata, di quota $f(\mathbf{E}) = (3\sqrt{3})/16$. Siccome $f(\mathbf{E}) > f(\mathbf{D})$, scartiamo $\mathbf{D}$ e teniamo $\mathbf{E}$. L'ultimo pezzo di frontiera di K_1 é il piú facile da studiare, ossia il tratto di asse x compreso tra l'origine e il punto $\mathbf{C}$. E' immediato vedere che la restrizione della f su tale bordo é la funzione nulla, quindi si puó assolutamente trascurare.
A questo punto, la soluzione globale é quindi il punto $\mathbf{E}$.

Facoltativo: questa volta K é illimitato, quindi a priori non sappiamo se esiste soluzione, tuttavia possiamo ovviare a questo ostacolo, adottando un metodo che qualche volta (non sempre) puó tornare utile, ossia rendere "provvisoriamente" limitato il nostro dominio e sfruttare Weierstrass. Supponiamo allora di aggiungere il vincolo $x \leq c$, ove c é un **arbitrario** numero positivo maggiore di 4. Si puó tranquillamente ripetere tutta l'argomentazione del caso precedente, ossia si puó trascurare l'asse x, mentre sul tratto di curva $y = \sqrt{x}$ non cambia assolutamente nulla ed il candidato risulta sempre essere $\mathbf{E}$. Infine, l'unica parte del nostro studio che va leggermente adattata rispetto alla precedente é quella sul segmento rettilineo che collega i punti $(c, 0)$ e $(c, \sqrt{c})$, su cui il candidato risulta essere (ripetendo esattamente le stesse argomentazioni precedenti) il punto $(c, 1)$ di quota pari a $1/(2(1+c))$. Siccome peró é facile vedere che $1/(2(1+c)) < 1/10 < f(\mathbf{E})$, il punto $\mathbf{E}$ rimane di massimo assoluto. L'arbitrarietá di c dimostra che $\mathbf{E}$ é di massimo globale su tutto K.

Esercizio 8. Determinare gli estremi della funzione $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{4}{27}\, x^2 y^2 - \frac{2}{3}\, y,$$

sotto i vincoli

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2; \\ 1 \leq y \leq 2; \\ xy \leq 2, \end{cases}$$

facendo attenzione a determinare preventivamente gli eventuali candidati nella parte interna e quelli presenti in ogni tratto di frontiera.

Soluzione. Visto che il problema é con vincoli di diseguaglianza, essendo $n = 2$, é preferibile disegnare il sottodominio K su cui insiste la funzione obiettivo.
Se individuiamo tale insieme K, vediamo che é un triangolo "mistilineo" di vertici $\mathbf{A} = (1, 1)$, $\mathbf{B} = (1, 2)$ e $\mathbf{C} = (2, 1)$ formato dai due segmenti $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{AC}$ e dal tratto dell'iperbole equilatera di equazione $y = \frac{2}{x}$ che collega i punti $\mathbf{B} = (1, 2)$ e $\mathbf{C} = (2, 1)$.
Essendo K limitato, vale Weierstrass e sappiamo che esistono almeno un punto di massimo e uno di minimo assoluti. Li cerchiamo all'interno di K o sulla frontiera.
Intanto vediamo se gli estremi stanno nell'interno di K, quindi cerchiamo i punti stazionari di f, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -\frac{1}{x^2} + \frac{8}{27}\, xy^2 = 0; \\ \frac{8}{27}\, x^2 y - \frac{2}{3} = 0. \end{cases}$$

Se si parte dalla seconda equazione, escludendo il caso $x = 0$ che non porterebbe ad alcuna soluzione (si avrebbe, infatti, $-\frac{2}{3} = 0$), si trova $y = \frac{9}{4x^2}$, che, inserito nella prima equazione, porta a

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^3} = 0,$$

ossia, dopo qualche elementare passaggio algebrico, $-2x + 3 = 0$ che ha come soluzione $x = 3/2$, ossia l'unico punto stazionario di f é $\mathbf{D} = (3/2, 1)$, non accettabile, perché appartiene alla frontiera di K.
Cerchiamo allora la soluzione sulla frontiera. Iniziando dal segmento $\mathbf{AC}$, di equazione $y = 1$, la restrizione della funzione obiettivo f su tale segmento é data da

$$f|_{\mathbf{AC}} = \varphi_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{27}\, x^2 - \frac{2}{3}, \quad x \in D_1 = [1, 2].$$

Dalla derivata

$$\varphi_1'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{8}{27}\, x,$$

si ha che $\varphi_1'(x) \geq 0$ se e solo se $x^3 \geq 27/8$, ossia $x \geq 3/2$, pertanto, intersecando tale soluzione col nostro dominio D_1, si deduce che φ_1 é decrescente su $[0, 3/2]$ e crescente su $[3/2, 2]$. Di conseguenza, il punto candidato a minimo é $\mathbf{D}$, mentre i candidati a massimo sono due, cioé $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$ con quote

$$f(\mathbf{D}) = \frac{1}{3},\ f(\mathbf{A}) = \frac{13}{27},\ f(\mathbf{C}) = \frac{23}{54},$$

quindi, essendo $f(\mathbf{C}) < f(\mathbf{A})$, il candidato a massimo assoluto é $\mathbf{A}$.
Passando al segmento $\mathbf{AB}$, di equazione $x = 1$, la restrizione della funzione obiettivo f su tale segmento é data da

$$f|_{\mathbf{AB}} = \varphi_2(y) = 1 + \frac{4}{27}\, y^2 - \frac{2}{3}\, y, \quad y \in D_1 = [1, 2].$$

Dalla derivata
$$\varphi_2'(y) = \frac{8}{27}\,y - \frac{2}{3},$$
si ha che $\varphi_2'(y) \geq 0$ se e solo se $y \geq 9/4$, pertanto, intersecando tale soluzione col nostro dominio D_2, si deduce che φ_2 é sempre decrescente su D_2. Di conseguenza, il punto candidato a minimo é $\mathbf{B}$, di quota $f(\mathbf{B}) = 7/27$, mentre quello candidato a massimo é $\mathbf{A}$, giá trovato in precedenza. Siccome $f(\mathbf{B}) < f(\mathbf{D})$, il nostro candidato a minimo assoluto ora é $\mathbf{B}$, mentre quello di massimo assoluto rimane $\mathbf{A}$.
Passando al tratto curvilineo $\mathbf{BC}$, di equazione $y = 2/x$, la restrizione della funzione obiettivo f su tale tratto é data da
$$f|_{\mathbf{BC}} = \varphi_3(x) = \frac{1}{x} + \frac{16}{27} - \frac{4}{3x}, \quad x \in D_1 = [1,2].$$
Dalla derivata
$$\varphi_3'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{3x^2},$$
si ricava facilmente che $\varphi_3'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$, pertanto se ne deduce che φ_3 é sempre crescente su D_1. Di conseguenza, il punto candidato a minimo é $\mathbf{B}$, giá trovato in precedenza, mentre quello a massimo é $\mathbf{C}$, giá scartato prima in favore di $\mathbf{A}$.
Riassumendo, si trova che il minimo assoluto é il solo punto $\mathbf{B}$, di quota $f(\mathbf{B}) = 7/27$, e si ha un solo punto di massimo assoluto dato da $\mathbf{A}$, di quota $f(\mathbf{A}) = 13/27$.