ESERCIZI DI METODI QUANTITATIVI PER L'ECONOMIA
DIP. DI ECONOMIA E MANAGEMENT DI FERRARA
A.A. 2017/2018

File esercizi n. 5: ottimizzazione con due vincoli di uguaglianza

Esercizio 1. Determinare i punti di minimo della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sotto le due condizioni $x + y + z = 1$ e $x - y + z = 1$.

Soluzione. Si tratta di un problema di ottimizzazione vincolata (con vincoli di uguaglianza) con $n = 3$ e $m = 2$. Dobbiamo cercare di vedere se sia possibile immettere i due vincoli nella funzione obiettivo, in modo da affrontare un problema di minimo per una nuova funzione ad una variabile. In tale caso, si vedrá che é possibile "fondere" i due vincoli in modo da far sparire due variabili. Infatti, se consideriamo il sistema dei due vincoli, dato appunto da

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

ci accorgiamo che é un sistema lineare che ammette ∞^1 soluzioni, ossia infinite soluzioni dipendenti da un parametro. Se scegliamo come parametro libero la variabile $x \in \mathbb{R}$, ci accorgeremo che l'insieme delle soluzioni del suddetto sistema è dato da

$$\{(x, 0, 1 - x),\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Se allora calcoliamo la funzione obiettivo in corrispondenza di una arbitraria soluzione del sistema dei vincoli, otteniamo che la funzione di cui dobbiamo calcolare i minimi é ad una sola variabile reale, ossia

$$F(x) := f(x, 0, 1 - x) = x^2 + (1 - x)^2,\ x \in \mathbb{R}$$

e si trova ora facilmente che il punto di minimo (globale) é in corrispondenza di $x_0 = 1/2$, pertanto la risposta cercata é $A = (1/2, 0, 1/2)$ minimo globale.

Esercizio 2. Determinare gli estremi della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sotto le due condizioni $3x + y + z = 5$ e $x + y + z = 1$.

Soluzione. L'unica soluzione é $\mathbf{A} = (2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e si tratta di un minimo assoluto.

Esercizio 3. Determinare i punti di massimo della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y, z) = yz + xz$$

sotto i due vincoli

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ xz = 3. \end{cases}$$

Soluzione. Teoricamente, questo é un problema di ottimizzazione con $n = 3$ e $m = 2$ vincoli di uguaglianza, quindi servirebbe una lagrangiana con 2 variabili ausiliarie. Tuttavia, se ci accorgiamo che il vincolo $xz = 3$ puó essere completamente assorbito dalla funzione obiettivo, allora il tutto si riduce ad un problema di max di una funzione

$$g(y, z) = yz + 3$$

con $n = 2$ e un solo vincolo di uguaglianza (m=1), ossia

$$y^2 + z^2 = 1.$$

Siccome tale vincolo equivale alla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio unitario, il sottodominio K su cui insiste g é limitato, quindi vale Weierstrass, pertanto esiste un punto di max globale e lo cerco con la sola condizione necessaria di primo ordine, ossia i punti stazionari della lagrangiana (senza punti non qualificati: controllate voi)

$$L(\lambda, y, z) = yz + 3 + \lambda(y^2 + z^2 - 1).$$

Il sistema di primo ordine diventa

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ z + 2\lambda y = 0 \\ y + 2\lambda z = 0. \end{cases}$$

Se ricavo nella seconda $z = -2\lambda y$ e lo sostituisco nella terza, trovo $y - 4\lambda^2 y = 0$, ossia

$$y(1 - 4\lambda^2) = 0,$$

da cui ricavo $y = 0$ oppure $1 - 4\lambda^2 = 0$. Ma $y = 0$ mi porta a $z = 0$ e allora non sarebbe rispettata la prima equazione, ossia il vincolo, quindi é da scartare. La strada $1 - 4\lambda^2 = 0$, invece, mi porta a $\lambda = \pm\frac{1}{2}$, da cui $z = \pm y$ e tornando all'equazione di vincolo, ricavo che $2y^2 = 1$, ossia $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. In definitiva, trovo i candidati

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), C = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), D = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Se ora calcolo le quote, mi accorgo facilmente che $g(A) = g(D) > g(B) = g(C)$, quindi i punti di max globale sono A e D.

Esercizio 4. Determinare i punti di massimo, sia locali che globali, della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y, z) = -x^2z^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}$$

sotto i due vincoli

$$\begin{cases} x^2 + z^4 = 1 \\ z^2 - y = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Teoricamente, questo é un problema di ottimizzazione con $n = 3$ variabili libere e $m = 2$ vincoli di uguaglianza, quindi, adottando il metodo della Lagrangiana, servirebbero 2 variabili ausiliarie. Tuttavia, se ci accorgiamo che il vincolo $z^2 - y = 0$ puó essere completamente assorbito dalla funzione obiettivo e contemporaneamente essere recepito dal primo vincolo (nella forma $z^4 = y^2$) facendo scomparire una variabile libera (qui scegliamo la z), allora il tutto si riduce al nuovo (ed equivalente) problema

$$\begin{cases} \max f(x, y) = -x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16} \\ \text{sub} \;\; g(x, y) = 0, \end{cases}$$

ove la funzione di vincolo $g(x, y)$ é data da

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Siccome tale vincolo equivale alla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $r = 1$, il sottodominio K su cui insiste f é limitato, quindi vale Weierstrass e dunque so che esiste almeno un punto di max globale. In realtá, se ci ricordiamo del secondo originario vincolo precedentemente fatto assorbire dal primo, ossia $z^2 = y$, si deduce che $y \geq 0$, quindi il vero dominio non é tutta la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $r = 1$, ma la sola semicirconferenza superiore. Adottiamo il metodo della Lagrangiana (lasciamo al volenteroso lettore il metodo alternativo di inserire anche tale vincolo dentro alla nuova funzione obiettivo), determinando i punti stazionari della funzione

$$L(\lambda, x, y) = -x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16} + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

La condizione di qualificazione dei vincoli (QV), mi porta alla risoluzione del sistema $(g_x, g_y) = (0, 0)$, ossia $(2x, 2y) = (0, 0)$, che ha come unica soluzione $(0, 0)$, non accettabile perché non appartiene a K, dunque tutti i candidati coincidono con i punti stazionari della Lagrangiana.
Il sistema di primo ordine diventa

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ -2xy^2 + x + 2\lambda x = 0 \\ -2x^2y + 2\lambda y = 0. \end{cases}$$

Dalla terza equazione, nella forma $2y(\lambda - x^2) = 0$, si deduce che ho solo due casi, ossia $y = 0$ oppure $\lambda = x^2$. Nel primo caso, vado direttamente alla equazione di vincolo e trovo $x^2 = 1$, ossia $x = \pm 1$, mentre la seconda equazione, ricordando sempre che $y = 0$, puó essere messa nella forma $x(1 + 2\lambda) = 0$: siccome $x = \pm 1$, necessariamente $1 + 2\lambda = 0$, ossia $\lambda = -1/2$. Ho in tal modo ottenuto i primi due punti stazionari della Lagrangiana, ossia $\mathbf{P}_1 = (-1/2, -1, 0)$ e $\mathbf{P}_2 = (-1/2, 1, 0)$ (si noti che scriviamo i punti nella notazione "estesa" in cui la prima componente é la variabile ausiliaria λ, ma quando calcoliamo le quote, consideriamo solo le ultime due componenti).
Nel secondo caso, sostituisco λ con x^2 nella seconda equazione, ottenendo $-2xy^2 + x + 2x^3 = 0$. Dalla prima equazione ricavo $y^2 = 1 - x^2$ e lo immetto nella precedente, trovando cosí, dopo qualche semplice calcolo, $4x^3 - x = 0$ o, equivalentemente, $x(4x^2 - 1) = 0$ che porta direttamente a $x = 0$ oppure $x = \pm 1/2$. Da $x = 0$, immesso nel vincolo, ricavo $y^2 = 1$, da cui $y = 1$ (ricordando che abbiamo scartato $y = -1$, perché, come rimarcato in precedenza, sono ammessi solo $y \geq 0$), ossia un terzo punto stazionario dato da $\mathbf{P}_3 = (0, 0, 1)$. Infine, tramite $x = \pm 1/2$ si arriva facilmente ad individuare altri due punti stazionari, ossia $\mathbf{P}_4 = (1/4, -1/2, \sqrt{3}/2)$ e $\mathbf{P}_5 = (1/4, 1/2, \sqrt{3}/2)$.
Attraverso le quote, ossia $f(\mathbf{P}_1) = f(\mathbf{P}_2) = 9/16$, $f(\mathbf{P}_3) = 1/16$ e $f(\mathbf{P}_4) = f(\mathbf{P}_5) = 0$, scopriamo che sicuramente $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ sono i punti di massimo globale, mentre $\mathbf{P}_4$ e $\mathbf{P}_5$ sono di minimo globale. Per scoprire se $\mathbf{P}_3$ possa essere punto di massimo locale, devo passare alla matrice Hessiana orlata data da

$$H(\lambda, x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2y^2 + 1 + 2\lambda & -4xy \\ 2y & -4xy & -2x^2 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

Siccome, in questo caso, dobbiamo determinare il segno del determinante di tale matrice in un punto pieno di zeri, conviene calcolarci la matrice direttamente in $\mathbf{P}_3$. Dunque, si ha che

$$H(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante é $|H(0,0,1)| = 4$, quindi, dalla teoria, sappiamo che $\mathbf{P}_3$ é effettivamente punto di massimo locale.
In conclusione, le soluzioni cercate sono i punti $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ (massimi globali) e $\mathbf{P}_3$ (massimo locale). Provate voi a determinare i punti soluzione in termini delle originarie tre variabili.