ESERCIZI DI METODI QUANTITATIVI PER L'ECONOMIA
DIP. DI ECONOMIA E MANAGEMENT DI FERRARA
A.A. 2017/2018

File esercizi n. 4

Ottimizzazione libera: funzioni convesse o concave

Esercizio 1. Si determinino, se esistono, gli estremi delle seguenti funzioni sui loro domini naturali (da indicare) e le loro quote e specificare eventualmente se si tratti estremi globali:

(i) $f(x,y) = 4 - x^2 - (y+2)^2$;

(ii) $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2x^2 + 4xy$;

(iii) $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z$

Soluzione. (i) $D = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{A} = (0,-2)$ max, con $f(\mathbf{A}) = 4$, globale perché f é (strettamente) concava;

(ii) $D = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{A} = (-2/3,-2)$ max locale, $\mathbf{B} = (2,-2)$ min locale, $f(\mathbf{A}) = 40/27$, $f(\mathbf{B}) = -8$;

(iii) $D = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{A} = (1,0,1)$ min, $f(\mathbf{A}) = -4$, globale perché f é (strettamente) convessa.

Esercizio 2. Si determini l'unico estremo della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita con la legge

$$f(x,y) = x^2 + y(y-1)^2,$$

mostrando che non puó essere globale su tutto il dominio. Trovare poi un sottodominio $C \subset \mathbb{R}^2$ tale da rendere l'estremo trovato globale una volta ristretta la f a tale sottodominio.

Soluzione. L'unico estremo è $\mathbf{A} = (0,1)$, con $f(\mathbf{A}) = 0$, min locale rispetto al dominio naturale, perché, ad esempio, $f(0,-1) = -4$. La funzione è convessa sul sottodominio (che è un semipiano del piano cartesiano)

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \frac{2}{3},\, x \in \mathbb{R}\}$$

e se considero $f : C \to \mathbb{R}$, allora $\mathbf{A}$ è minimo globale.

Esercizio 3. Si determini l'unico estremo della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita con la legge

$$f(x, y) = -x^2 + y(y-1)^2.$$

mostrando che non puó essere globale su tutto il dominio. Trovare poi un sottodominio $C \subset \mathbb{R}^2$ tale da rendere l'estremo trovato globale una volta ristretta la f a tale sottodominio.

Soluzione. L'unico estremo è $\mathbf{B} = (0, 1/3)$, con $f(\mathbf{B}) = 4/27$, max locale rispetto al dominio naturale, perché, ad esempio, $f(0, 2) = 2$.
La funzione è concava sul sottodominio (che è un semipiano del piano cartesiano)

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \frac{2}{3},\ x \in \mathbb{R}\}$$

e se considero $f : C \to \mathbb{R}$, allora $\mathbf{A}$ è massimo globale.

Esercizio 4. Si determini per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita con la legge

$$f(x, y) = x^2 + \alpha xy + y^2 - 4$$

ammette estremi globali.

Soluzione. Per $\alpha \in [-2, 2]$ la funzione data é convessa, quindi i suoi punti stazionari, che sono dati dal solo punto $O = (0, 0)$ nel caso $\alpha \in]-2, 2[$ e da tutti i punti del tipo $\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$, se $\alpha = -2$ oppure da tutti i punti del tipo $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$, se $\alpha = 2$, sono minimi globali, cosa che non succede se $\alpha < -2$ oppure $\alpha > 2$. In tali casi, infatti, l'unico punto stazionario, ossia l'origine, é punto sella.

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 2(x-y)^2 + 2$$

determinare sul suo dominio "naturale" gli estremi, precisando se siano locali o globali.

Soluzione. Il dominio naturale é ovviamente $\mathbb{R}^2$. Le derivate parziali prime sono rispettivamente

$$f_x(x, y) = 4x^3 + 4(x - y)$$

e

$$f_y(x, y) = 4y^3 - 4(x - y).$$

Passando alla ricerca dei punti stazionari, ossia al sistema

$$\begin{cases} x^3 + x - y = 0 \\ y^3 - x + y = 0, \end{cases}$$

sommate la prima equazione con la seconda. In tal modo si ottiene l'equazione

$$x^3 + y^3 = 0,$$

che ha come soluzione $y = -x$. Ora, tornando ad esempio alla prima equazione del suddetto sistema, si trova $x^3 + 2x = 0$, che porta a $x(x^2 + 2) = 0$ che ha come unica soluzione $x = 0$. Pertanto, l'unico punto stazionario trovato é l'origine $O = (0, 0)$. Ora calcolate le derivate seconde, ossia $f_{xx} = 12x^2 + 4$, $f_{xy} = -4$, $f_{yy} = 12y^2 + 4$, quindi se voi voleste calcolare la matrice Hessiana direttamente nell'origine trovereste la matrice

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

che é evidentemente semidefinita positiva e pertanto non avreste alcuna risposta da questo metodo. Tuttavia, se calcolate il determinante della matrice Hessiana in un arbitrario punto (x, y) del piano cartesiano, si ottiene, dopo qualche elementare calcolo,

$$|H(x, x)| = 144x^2y^2 + 48x^2 + 48y^2,$$

che é ovviamente sempre maggiore o uguale a zero, visto che é somma di quantitá non negative. Se oltre a ció osserviamo che $NW_1(H(x, y)) = 12x^2 + 1 > 0$, possiamo concludere che l'Hessiana é definita (o tutt'al piú semidefinita) positiva su tutto il piano, quindi f é convessa e allora l'origine é un punto di minimo globale (unico).

Ottimizzazione con un vincolo di uguaglianza

Esercizio 6. Determinare gli estremi della funzione $f(x, y) = x^4 - 4x^2y$ sotto la condizione $x + y = 2$.

Soluzione. I punti $\mathbf{A} = (-4, 6)$, $\mathbf{B} = (0, 2)$ e $\mathbf{C} = (1, 1)$ sono rispettivamente di min vincolato globale, max vincolato locale e min vincolato locale. Il metodo piú conveniente é quello di esplicitare la variabile y nel vincolo e inserirla nella funzione obiettivo.

Esercizio 7. Determinare tutti i punti di massimo, locali e/o globali, della funzione $f(x,y) = x^2y$ sotto la condizione $2x^2 + y^2 = 3$.

Soluzione. I punti $\mathbf{A} = (0, -\sqrt{3})$ e $\mathbf{B} = (0, \sqrt{3})$ sono rispettivamente di max e min locale, mentre i punti $\mathbf{C} = (-1,-1), \mathbf{D} = (1,-1)$ sono di min globale e infine i punti $\mathbf{E} = (-1,1), \mathbf{D} = (1,1)$ sono di max globale. Il metodo piú conveniente é quello di esplicitare una variabile opportuna nel vincolo e inserirla nella funzione obiettivo, di cui peró dovete determinare il dominio con molta attenzione.

Esercizio 8. Determinare gli estremi della funzione $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4y$ sotto la condizione $x^2 + y^2 = 4$.

Soluzione. I punti $\mathbf{A} = (0,2)$ e $\mathbf{B} = (0,-2)$ sono rispettivamente di minimo e massimo globale. Il metodo piú conveniente é quello di esplicitare una variabile opportuna nel vincolo e inserirla nella funzione obiettivo.

Esercizio 9. Studiare il problema

$$\begin{cases} \min f(x,y) = x^2 - 5x - 5y \\ \text{sub: } x + y - xy = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Si noti che il sottodominio $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y-xy = 0\}$ su cui é ristretta la funzione obiettivo é non limitato, dunque Weierstrass non é applicabile. Adoperando il metodo della funzione Lagrangiana, si studia la funzione

$$L(\lambda, x, y) = f(x,y) + \lambda(x + y - xy).$$

Si vede facilmente che non vi sono punti non qualificati. La condizione necessaria porta al sistema

$$\begin{cases} x + y - xy = 0 \\ 2x - 5 + \lambda(1-y) = 0 \\ -5 + \lambda(1-x) = 0. \end{cases}$$

Per risolverlo, conviene ricavare λ dalla seconda e terza equazione e uguagliarle tra loro, poi inserirvi la y in funzione di x come ricavata dal vincolo. In tal modo, dovreste trovare un unico punto stazionario di L, ossia $\mathbf{A} = (5,0,0)$. La matrice orlata, ossia l'Hessiana della Lagrangiana, è abbastanza semplice da calcolare e si vede facilmente che il suo determinante, in corrispondenza del punto $\mathbf{A}$, è negativo, quindi l'origine è punto di minimo vincolato locale per la f.

Esercizio 10. Determinare gli eventuali estremi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = (x-1)^2 y + (y-2)^2 - 4$$

sotto il vincolo

$$y = 9 - (x-1)^2.$$

Soluzione. Questo é un problema di ottimizzazione con due variabili libere e un vincolo di uguaglianza: il sottodominio K su cui é ristretta la funzione obiettivo f, determinata dal vincolo $h(x,y) = 0$, ove $h(x,y) = y - 9 + (x-1)^2$, risulta una parabola concava (ossia, rivolta verso il basso) con vertice in $V = (1,9)$ e passante per i punti $(-2,0)$ e $(4,0)$, quindi K non é limitato e il teorema di Weierstrass non é applicabile.
Applichiamo il metodo della Lagrangiana, data da

$$L(\lambda, x, y) = (x-1)^2 y + (y-2)^2 - 4 + \lambda(y - 9 + (x-1)^2).$$

La condizione di qualificazione dei vincoli (QV) mi porta a studiare il caso $(h_x, h_y) = (0,0)$, ossia

$$\begin{cases} 2(x-1) = 0 \\ 1 = 0, \end{cases}$$

che non puó avere alcuna soluzione, a causa della seconda equazione, quindi tutti i punti sono qualificati e gli eventuali candidati si trovano esclusivamente tra i punti stazionari della Lagrangiana.
Il sistema di primo ordine per trovare i punti stazionari della Lagrangiana é

$$\begin{cases} y - 9 + (x-1)^2 = 0 \\ 2(x-1)y + 2\lambda(x-1) = 0 \\ (x-1)^2 + 2(y-2) + \lambda = 0. \end{cases}$$

Se partiamo dalla seconda equazione, riscritta nella forma $2(x-1)(y+\lambda) = 0$, vediamo che ci sono due possibilitá: la prima é che $x = 1$, mentre la seconda é che $\lambda = -y$. Percorrendo la prima strada, vado nella prima equazione e trovo $y = 9$, mentre se ora vado nella terza equazione sostituendo $x = 1$ e $y = 9$ ricavo $\lambda = -14$. Il primo punto stazionario é quindi

$$A = (-14, 1, 9).$$

Se percorro l'altra strada, ora vado nella terza equazione e trovo facilmente $y = 4 - (x-1)^2$. Se ora effettuo tale sostituzione nella prima equazione, trovo subito $4 = 9$ ossia tale strada non mi conduce ad alcuna soluzione.
L'unico punto stazionario é allora il punto A. Tuttavia A é solo un candidato ad essere un estremo: per sapere se sia effettivamente tale, e di che tipo (minimo o

massimo), ho bisogno della matrice orlata. Dopo qualche semplice derivata della Lagrangiana, si trova che

$$H_L(\lambda, x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 2(x-1) & 1 \\ 2(x-1) & 2(y+\lambda) & 2(x-1) \\ 1 & 2(x-1) & 2 \end{bmatrix}$$

In particolare, la matrice orlata nel punto A diviene

$$H_L(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e il suo determinante é $|H_L(A)| = +10$. La teoria ci dice che se il determinante della matrice orlata é positivo, allora la matrice orlata (vincolata) é definita negativa, quindi il punto $A = (1, 9)$ (possiamo ora omettere la variabile ausiliaria) é l'unico estremo, esattamente un massimo locale (vincolato).
Si noti come, adoperando il metodo alternativo di far assorbire il vincolo dalla funzione obiettivo, facendo sparire la variabile x e ottenendo una funzione F nella sola variabile y, il problema divenga semplicissimo, ma solo facendo attenzione al dominio della F (lasciamo tale strada al lettore intraprendente).

Esercizio 11. Determinare gli estremi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = 2x^2 + y^3 - 7y$$

sotto il vincolo

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Soluzione. Dal punto di vista di una classificazione teorica, questo é un problema di ottimizzazione con due variabili libere e un vincolo di uguaglianza: utilizziamo una Lagrangiana con una variabile ausiliaria. Siccome il vincolo equivale alla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $r = 1$, il sottodominio K su cui insiste f é limitato, pertanto vale Weierstrass e dunque so che esiste un punto di max e uno di min globali.
Risolviamo tale esercizio con il metodo della Lagrangiana (che non ha punti non qualificati: provate voi a vederlo), ma, in realtá, sarebbe anche piú facile inserire il vincolo dentro la funzione obiettivo (lasciamo questa strada al lettore volenteroso).
La Lagrangiana é data da

$$L(\lambda, x, y) = 2x^2 + y^3 - 7y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Il sistema di primo ordine diventa

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x + 2\lambda x = 0 \\ 3y^2 - 7 + 2\lambda y = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $2x(2+\lambda) = 0$, quindi le uniche due soluzioni possibili sono $x = 0$ o $\lambda = -2$. Nel primo caso, andando nella prima equazione, ricaviamo $y = \pm 1$ e inserendo tali valori nella terza equazione troviamo facilmente i due valori corrispondenti di λ, ossia ± 2. Pertanto, i primi due punti stazionari della Lagrangiana sono $A = (2, 0, 1)$ e $B = (-2, 0, -1)$, di quote $f(A) = -6$ e $f(B) = 6$. Se invece percorriamo la strada $\lambda = -2$, andiamo prima nella terza equazione e troviamo $3y^2 - 4y - 7 = 0$ che risolta porta a $y_1 = -1$ e $y_2 = 7/3$. Infine, nella terza equazione, da y_1 ritrovo il punto B, mentre da y_2 trovo $x^2 + 49/9 = 0$ che non ha mai soluzione, pertanto questa strada non porta ad alcun nuovo punto stazionario. Se ora considero le quote, per Weierstrass, deduco che A è min globale vincolato e B di max globale vincolato.
Attenzione: si noti che se aveste calcolato la matrice orlata HL, nel punto B il determinante di $HL(B)$ sarebbe stato nullo, quindi con tale metodo non avreste potuto dedurre alcuna conclusione valida sulla natura del punto B.

Esercizio 12. Determinare il massimo della funzione $f : D \to \mathbb{R}$, ove $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$, definita come

$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$

sotto il vincolo

$$x + y + z^2 = 3.$$

Soluzione. Questo é un problema di ottimizzazione con tre variabili libere e un vincolo di uguaglianza, tuttavia fate attenzione al fatto che il dominio della funzione obiettivo non é $\mathbb{R}^3$ ma un sottodominio di $\mathbb{R}^3$ dato dai soli punti (x, y, z) che abbiano tutte e tre le componenti positive. In considerazione di questa ipotesi, il sottodominio K di D, dato da

$$K = \{(x, y, z) \in D : x + y + z^2 = 3\}$$

é sicuramente limitato in $\mathbb{R}^3$, in quanto se (x, y, z) deve appartenere a K, allora necessariamente $x, y \in]0, 3[$ e $z \in]0, \sqrt{3}[$. Pertanto, essendo applicabile il teorema di Weierstrass, sappiamo che esiste una soluzione globale in K. Applichiamo il metodo della Lagrangiana, data da

$$L(\lambda, x, y, z) = xy^2z^3 + \lambda(x + y + z^2 - 3).$$

La condizione di qualificazione dei vincoli (QV) mi porta a escludere il caso $(h_x, h_y, h_z) = (0, 0, 0)$, ove $h(x, y, z) = x + y + z^2 - 3$, che ovviamente qui non puó mai accadere,

visto che $(h_x, h_y, h_z) = (1, 1, 2z)$, quindi tutti i punti sono qualificati e i candidati si trovano esclusivamente tra i punti stazionari della lagrangiana.
Il sistema di primo ordine per trovare i punti stazionari della lagrangiana é

$$\begin{cases} x + y + z^2 - 3 = 0 \\ y^2 z^3 + \lambda = 0 \\ 2xyz^3 + \lambda = 0 \\ 3xy^2 z^2 + 2\lambda z = 0. \end{cases}$$

Se ricaviamo λ dalla seconda e terza equazione, troviamo $y^2z^3 = 2xyz^3$ che puó avere tre tipi di soluzione: $y = 0$, $z = 0$ oppure, nel terzo caso rimasto in cui $y, z \neq 0$, potendo dividere ambo i membri per y e z^3, si arriva a $y = 2x$. Siccome i primi due casi non sono accettabili, visto che tutte le variabili devono essere strettamente positive (si veda il dominio D), passiamo direttamente al terzo caso in cui $y = 2x$, con $x, y, z \neq 0$. Si noti allora che la quarta equazione la posso riscrivere piú semplicemente come

$$2\lambda + 3xy^2 z = 0,$$

visto che posso dividere per z, essendo per ipotesi $z \neq 0$. Se ora ricavo λ dalla terza e dalla quarta (cosí riscritta) equazione, trovo $2xyz^3 = \frac{3}{2}xy^2z$ e, dividendo ambo i membri per x, y, z si ottiene $4z^2 = 3y$, ossia, ricordando che $y = 2x$, $z^2 = \frac{3}{2}x$. A questo punto vado nella prima equazione mettendo $y = 2x$ e $z^2 = \frac{3}{2}x$ e si trova facilmente che $x = \frac{2}{3}$, pertanto otteniamo il punto stazionario dato da

$$\mathbf{A} \equiv \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1\right),$$

l'unico con componenti strettamente positive, di quota $f(\mathbf{A}) > 0$, perció tale punto é la soluzione cercata.

Esercizio 13. Determinare gli estremi della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4$ sotto la condizione $x^2 + y^2 = 1$.

Soluzione. Il metodo piú conveniente é quello di costruire la funzione Lagrangiana: si troveranno come unici punti stazionari

$$\mathbf{A} = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \mathbf{B} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Non c'è bisogno della matrice orlata: ricordatevi che in questo caso potete applicare Weierstrass e troverete che i suddetti punti sono rispettivamente di max e min globale vincolato. Notare che non vi sono punti non qualificati.

Esercizio 14. Determinare gli estremi della funzione $f(x, y) = xy$ sotto la condizione $x^2 + y^2 + xy = 1$.

Soluzione. Il metodo piú conveniente é quello di costruire la funzione Lagrangiana: si troveranno 4 punti stazionari dati da

$$\mathbf{A} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \ \mathbf{B} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \ \mathbf{C} = (1, -1) \text{ e } \mathbf{D} = (-1, 1).$$

Non c'è bisogno della matrice orlata: ricordatevi che in questo caso potete applicare Weierstrass (l'insieme K determinato dalla funzione di vincolo è una ellisse) e troverete che i punti **A** e **B** sono di max globale vincolato, mentre i punti **C** e **D** sono di min globale vincolato. Notare che non vi sono punti non qualificati.

Esercizio 15. Determinare gli estremi della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ sotto la condizione $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$.

Soluzione. I punti $\mathbf{A} = (-1, -2)$ e $\mathbf{B} = (3, 6)$ sono rispettivamente di min e max globale vincolato (vale Weierstrass e non vi sono punti non qualificati).

Esercizio 16. Tra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio unitario, determinare quello di area massima.

Soluzione. Si puó dimostrare che é il quadrato di lato $\sqrt{2}$: equivale al problema di trovare il massimo della funzione $f(x, y) = xy$ sotto il vincolo $x^2 + y^2 = 1$.

Esercizio 17. Studiare il problema

$$\begin{cases} \min f(x, y) = x + y \\ \text{sub: } xy - 1 = 0 \end{cases}$$

sotto l'ipotesi che la funzione f sia definita su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$.

Soluzione. Si noti che il sottodominio $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy - 1 = 0\}$ su cui é ristretta la funzione obiettivo é non limitato (si tratta del ramo di una iperbole equilatera del primo quadrante), dunque Weierstrass non é applicabile. Adoperando il metodo della funzione Lagrangiana, si studia la funzione

$$L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda(xy - 1).$$

Si vede facilmente che non vi sono punti non qualificati (l'unico punto che annulla il gradiente della funzione di vincolo $h(x, y) = xy - 1$ é l'origine del piano che peró NON appartiene a K). La condizione necessaria porta al sistema

$$\begin{cases} xy = 1 \\ 1 + \lambda y = 0 \\ 1 + \lambda x = 0. \end{cases}$$

Per risolverlo, conviene ricavare λ dalla seconda e terza equazione e uguagliarle tra loro (ricordando che $x, y \neq 0$) ottenendo in tal modo

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x},$$

ossia $y = x$, che inserito nella prima equazione porta a $x^2 = 1$, la cui unica soluzione accettabile é $x = 1$, quindi l'unico punto stazionario é $A = (-1, 1, 1)$.
Ricordiamo che A é per ora solo un candidato ad essere un estremo: per sapere se sia effettivamente tale, e di che tipo (minimo o massimo), ho bisogno della matrice orlata. Dopo qualche semplice derivata della Lagrangiana, si trova che

$$H_L(\lambda, x, y) = \begin{bmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & \lambda \\ x & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

e il suo determinante é $|H_L(\lambda, x, y)| = 2\lambda xy$, che é negativo perché $x, y > 0$ e $\lambda < 0$.
La teoria ci dice che se il determinante della matrice orlata é negativo, allora la matrice orlata (vincolata) é definita positiva, quindi il punto $A = (1, 1)$ (possiamo ora omettere la variabile ausiliaria) é l'unica soluzione del mio problema, esattamente un minimo almeno locale (vincolato).

Esercizio 18. Determinare gli eventuali estremi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = y - x^2 - \frac{7}{4}x$$

sotto il vincolo

$$2x - y^2 = 0,$$

mostrando (se possibile) la natura (locale o globale) degli estremi trovati.

Soluzione. Questo é un problema di ottimizzazione con due variabili libere e un vincolo di uguaglianza.
Proseguiamo allora col metodo della Lagrangiana, osservando che il vincolo, nella forma

$$g(x, y) = 2x - y^2 = 0,$$

non corrisponde ad un sottodominio K limitato, perché rappresenta una parabola del piano cartesiano con asse di simmetria dato dall'asse x, pertanto Weierstrass non vale.
La condizione di qualificazione dei vincoli (QV) mi porta alla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 2 = 0 \\ g_y(x,y) = -2y = 0. \end{cases}$$

Tuttavia, é immediato vedere che il suddetto sistema non ha soluzioni, quindi tutti i punti sono qualificati e non vi sono altri candidati fuori dai punti stazionari della Lagrangiana.
La Lagrangiana é data da

$$L(\lambda, x, y) = y - x^2 - \frac{7}{4}x + \lambda(2x - y^2).$$

Il sistema di primo ordine diventa

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 0 \\ -2x - 7/4 + 2\lambda = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0. \end{cases}$$

Dalla terza equazione si deduce chiaramente che λ deve essere necessariamente diverso da zero e che $y = 1/(2\lambda)$. Inserisco tale risultato nel vincolo, ottenendo $x = 1/(8\lambda^2)$, e inserendo il tutto nella seconda equazione, dopo qualche facile passaggio algebrico, si arriva alla seguente equazione in λ:

$$8\lambda^3 - 7\lambda^2 - 1 = 0.$$

Usiamo Ruffini, adoperando il valore (facile) di $\lambda = 1$ per abbassare di grado l'equazione data, ottenendo

$$8\lambda^3 - 7\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(8\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

quindi si vede facilmente che l'unica soluzione é $\lambda = 1$, perché l'equazione

$$8\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

non ha soluzioni in quanto il suo Delta é negativo. Dunque si trova l'unico punto stazionario $A = (1/8, 1/2)$. Non essendo applicabile il teorema di Weierstrass, passiamo alla matrice Hessiana orlata per capire di che natura é il punto A.
Si ha che la matrice Hessiana é

$$\mathbf{H} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 2 & -2y \\ \hline 2 & -2 & 0 \\ \hline -2y & 0 & -2\lambda \\ \hline \end{array}$$

Il determinante della Hessiana nel punto A é dato da 10, quindi (si veda la teoria sulle matrici vincolate) A é un punto di massimo locale vincolato. Nulla si puó dire con questo metodo sul fatto che A possa anche essere globale. Per questo, occorre usare il metodo alternativo dell'esplicitazione di una delle due variabili nel vincolo e inserirla poi nella funzione obiettivo studiandola come funzione ad una sola variabile. Tenete conto che la funzione da studiare sarebbe stata

$$F(y) = y - y^4/4 - (7/8)y^2, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Ovviamente avreste trovato la stessa soluzione, col vantaggio che sarebbe apparsa immediatamente come globale, anche se lo studio della derivata prima della F sarebbe stato decisamente impegnativo.

Esercizio 19. Determinare (se esistono) gli estremi globali della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = x^3 + 2y^2$$

sotto il vincolo

$$x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Soluzione. Dal punto di vista di una classificazione teorica, questo é un problema di ottimizzazione con due variabili libere e un vincolo di uguaglianza. Siccome il vincolo equivale alla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $r = 2$, il sottodominio K su cui insiste f é limitato, vale Weierstrass e dunque so che esiste almeno un punto di max globale ed almeno uno di min globale.
Risolviamo tale esercizio con il metodo della Lagrangiana (lasciamo la strada del metodo dell'inserimento del vincolo nella funzione obiettivo al lettore volenteroso).

Per la qualificazione del vincolo, nella forma $g(x, y) = 0$ con $g(x, y) = x^2+y^2-4$, si ha che, essendo $g_x = 2x$ e $g_y = 2y$, il gradiente del vincolo si annulla solo nell'origine del piano cartesiano, che non é punto appartenente a K, dunque tutti i punti sono qualificati.
La Lagrangiana é data da

$$L(\lambda, x, y) = 2y^2 + x^3 + \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Il sistema di primo ordine diventa

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 3x^2 + 2\lambda x = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 0. \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ricava $2y(2+\lambda) = 0$, quindi le uniche due soluzioni possibili sono $y = 0$ o $\lambda = -2$. Nel primo caso, andando nella prima equazione, ricaviamo

$x = \pm 2$ e inserendo tali valori nella seconda equazione troviamo facilmente i due valori corrispondenti di λ, ossia ∓ 3. Pertanto, i primi due punti stazionari della Lagrangiana sono $\mathbf{A} = (3, -2, 0)$ e $\mathbf{B} = (-3, 2, 0)$ (per convenzione, la prima coordinata é λ mentre le altre due sono x e y), di quote $f(\mathbf{A}) = -8$ e $f(\mathbf{B}) = 8$. Se invece percorriamo la strada $\lambda = -2$, andiamo nella seconda equazione e troviamo $3x^2 - 4x = 0$ che risolta porta a $x_1 = 0$ e $x_2 = 4/3$. Conseguentemente, nella prima equazione, da x_1 trovo $y = \pm 2$, ossia altri due punti stazionari $\mathbf{C} = (-2, 0, -2)$ e $\mathbf{D} = (-2, 0, 2)$, di quote $f(\mathbf{C}) = f(\mathbf{D}) = 8$. Infine, se vado nella prima equazione con x_2, trovo $y = \pm 2\sqrt{5}/3$ e quindi gli ultimi due punti stazionari $\mathbf{E} = (-2, 4/3, -2\sqrt{5}/3)$ e $\mathbf{F} = (-2, 4/3, 2\sqrt{5}/3)$, di quote $f(\mathbf{E}) = f(\mathbf{F}) = 184/27$.

Se ora considero le quote, per Weierstrass, deduco che **B**,**C** e **D** sono max globali, mentre **A** é min globale.