ESERCIZI DI METODI QUANTITATIVI PER L'ECONOMIA
DIP. DI ECONOMIA E MANAGEMENT DI FERRARA
A.A. 2017/2018

Classificazione matrici simmetriche

Esercizio 1. Classificare le seguenti matrici simmetriche:

$$\mathbf{A}=\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & -1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{B}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{C}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{D}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 5 & -2 \\ \hline 0 & -2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{E}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 6 \\ \hline 3 & 6 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Soluzione. **A** def. pos. ; **B** ind. ; **C** semi def. neg. ; **D** semi def. pos.; **E** indefinita.

Esercizio 2. Classificare la seguente matrice simmetrica al variare di $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A}_t = \begin{array}{|c|c|}\hline t & -2 \\ \hline -2 & 3+t \\ \hline\end{array}$$

Soluzione. Def. neg. per $t < -4$; semidef. per $t = -4$; indefinita per $t \in \,]-4, 1[$; semidef. per $t = 1$; def. pos. per $t > 1$.

Esercizio 3. Classificare la seguente matrice sotto il vincolo $\overrightarrow{b}^T = (2 \ \ -1)$:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 1 & -5 \\ \hline\end{array}$$

Soluzione. Def. neg.

Esercizio 4. Classificare la seguente matrice sotto il vincolo $\overrightarrow{b}^T = (1 \ 1)$:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}$$

Soluzione. Def. neg.

Esercizio 5. Classificare la seguente matrice simmetrica sotto il vincolo $\overrightarrow{b}^T = (1 \ 1 \ 1)$:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 4 & 4 \\ \hline 0 & 5 & 6 \\ \hline\end{array}$$

Soluzione. Def. positiva.

Ottimizzazione libera

Esercizio 6. Si determinino gli estremi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita con la legge

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + \frac{1}{2}(x-y)^2 - x + y.$$

Soluzione. I punti stazionari sono

$$P_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big);\ P_2 = \Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big);\ P_3 = (-1,1);\ P_4 = (1/3, -1/3).$$

Si trova con l'Hessiana che gli unici estremi sono P_3 e P_4, rispettivamente massimo locale e minimo locale.

Esercizio 7. Si determinino gli estremi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita con la legge

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 8xy - 4x^2 - 4y^2.$$

Soluzione. I punti stazionari sono

$$P_1 = (0,0);\ P_2 = (2,-2);\ P_3 = (-2,2).$$

Si trova con l'Hessiana che P_2 e P_3 sono punti di minimo locale, ma nulla si puó dire, con tale metodo, sul punto P_1, perché in tale punto la matrice Hessiana é semidefinita. Se peró osservo che $f(P_1) = 0$, si ha che $\Delta f_{P_1}(h,k) := f(h,k) - f(0,0)$ coincide con $f(h,k)$.
Se consideriamo il primo caso particolare con $h = k$, ricavo che $\Delta f_{P_1}(h,h) = 2h^4 > 0$ per ogni $h \neq 0$, mentre nel secondo caso, se scelgo $k = 0$, trovo che $\Delta f_{P_1}(h,0) = h^4 - 4h^2 = h^2(h^2-4) < 0$ per ogni $h \neq 0$ sufficientemente piccolo. Pertanto, siccome trovo valori in ogni intorno di P_1 per cui si ha contemporaneamente che $\Delta f_{P_1} > 0$ e $\Delta f_{P_1} < 0$, si conclude che necessariamente P_1 é di sella.

Esercizio 8. Si determinino gli estremi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita con la legge

$$f(x,y) = (2-x)(2-y)(x+y-2),$$

motivando in modo preciso il fatto che non si tratta comunque di estremi globali.

Soluzione. $\mathbf{A} = (4/3, 4/3)$ max locale.

Esercizio 9. Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita con la legge

$$f(x, y) = xy \cdot e^{2x}$$

non ammette estremi.

Esercizio 10. Determinare gli estremi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita con la legge

$$f(x, y) = 2(x^2 + y^2 + 1) - (x^4 + y^4).$$

Soluzione. Si ha che $(0, 0)$ é minimo locale, $(0, \pm 1)$; $(\pm 1, 0)$ sono punti sella, mentre $(1, \pm 1)$, (-1 ± 1) sono massimi locali.

Esercizio 11. Mostrare che la funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{x + y - 1}$$

non ammette estremi sul suo dominio naturale D da determinarsi.

Soluzione. $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x\}$; controllate il fatto che non esistano punti stazionari sul dominio D.

Esercizio 12. (**Difficile**) Dimostrare che la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, ove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ z > 0\},$$

data da

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$$

ammette un solo punto di minimo.

Soluzione. $\mathbf{A} = (1/2, 1, 1)$.

Esercizio 13. (**Difficile**) Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, data da

$$f(x, y, z) = x^2(y - 2)^2(z + 1)^2,$$

ammette infiniti punti di minimo globale del tipo $(0, y, z)$ oppure $(x, 2, z)$ oppure $(x, y, -1)$.

Soluzione. I punti dati sono tutti stazionari. Non conviene qui calcolarsi la matrice Hessiana perché é facile vedere che in tutti i punti stazionari é semidefinita. Se peró si considera $f(x,y,z)-f(0,y,z)=f(x,y,z)$, si trova facilmente che $f(x,y,z)\geq 0$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, perché é un prodotto di quantitá positive, quindi ogni punto del tipo $(0,y,z)$ é di minimo globale e lo stesso si puó dire per i punti del secondo e terzo tipo.

Esercizio 14. Data la funzione

$$f(x,y)=(x-y)(x^2+y^2-1)$$

determinare sul suo dominio "naturale" tutti gli estremi, dimostrando che nessuno di essi é assoluto.

Soluzione. Il dominio naturale é ovviamente $\mathbb{R}^2$. Le derivate parziali prime sono rispettivamente

$$f_x(x,y)=x^2+y^2-1+2x(x-y)$$

e

$$f_y(x,y)=-x^2-y^2+1+2y(x-y).$$

Passando alla ricerca dei punti stazionari, ossia al sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-1+2x(x-y)=0 \\ -x^2-y^2+1+2y(x-y)=0, \end{cases}$$

sommate la prima equazione con la seconda. In tal modo si ottiene l'equazione

$$(x+y)(x-y)=0,$$

che ha come soluzione $x=y$ oppure $x=-y$. Nel primo caso, tornando ad esempio alla prima equazione del suddetto sistema, si trova $2x^2-1=0$, che porta a $x=\pm 1/\sqrt{2}$, quindi i primi due punti stazionari sono

$$A=\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\Big), B=\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Nel secondo caso, muovendovi analogamente, troverete i punti stazionari

$$C=\Big(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\Big), D=\Big(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\Big).$$

Ora calcolate le derivate seconde, ossia $f_{xx}=6x-2y$, $f_{xy}=2y-2x$, $f_{yy}=-6y+2x$, quindi il determinante della matrice hessiana, in un punto del tipo (x,x), come A e B, é

$$|H(x,x)|=-16\cdot x^2,$$

pertanto sia A che B sono punti sella. Invece, per i punti del tipo $(x, -x)$, come C e D, si ha che
$$|H(x, -x)| = 48 \cdot x^2,$$
mentre il primo minore di NW é $8x$, pertanto si ricava che nel caso di C la matrice Hessiana é definita positiva, ossia C é minimo locale e allo stesso modo si conclude che D é massimo locale. Tuttavia, notando che $f(x, 0) = x(x^2 - 1)$, é facile vedere che $f(x, 0) \to \infty$ per $x \to \infty$, mentre $f(x, 0) \to -\infty$ per $x \to -\infty$, dal che se ne deduce che nessuno degli estremi trovati é globale.

Esercizio 15. Data la funzione
$$f(x, y, z) = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2z^2 + y^2 + z$$
determinare se sul suo dominio "naturale" ammetta estremi, precisando eventualmente se siano locali o globali.

Soluzione. Il dominio naturale é ovviamente $\mathbb{R}^3$. Le derivate parziali prime sono rispettivamente
$$f_x(x, y, z) = x - xz^2,$$
$$f_y(x, y, z) = 2y^2,$$
$$f_z(x, y, z) = -x^2z + 1 = 0.$$
I punti stazionari sono $A = (-1, 0, 1)$ e $B = (1, 0, 1)$ (basta partire dalla prima equazione riscritta nella forma $x(1 - z^2) = 0$), mentre le derivate seconde sono
$$f_{xx} = 1 - z^2,\ f_{xy} = 0,\ f_{xz} = -2xz,\ f_{yy} = 2,\ f_{yz} = 0,\ f_{zz} = -x^2.$$
Pertanto, la matrice Hessiana é
$$H(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 - z^2 & 0 & -2xz \\ 0 & 2 & 0 \\ -2xz & 0 & -x^2 \end{bmatrix}$$
Mostriamo che A non é un estremo e lo stesso ragionamento dimostra che anche B é un punto sella. L'Hessiana in A é
$$H(-1, 0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
quindi é immediato vedere che $NW_1(H(A)) = \{0, 2, -1\}$, pertanto ho minori principali di primo ordine (dispari) sia positivi che negativi, dal che se ne conclude che tale matrice é necessariamente indefinita.

Esercizio 16. Data la funzione

$$f(x,y) = 4y^3 + 2xy^2 + x^2y - y^2,$$

determinare sul suo dominio "naturale" i suoi due punti stazionari e mostrare la natura (compreso l'aspetto locale/globale) di almeno uno di essi.

Soluzione. Il dominio naturale é ovviamente $\mathbb{R}^2$. Per la ricerca dei punti stazionari, si ha che

$$f_x(x,y) = 2y^2 + 2xy = 0$$

e

$$f_y(x,y) = 12y^2 + 4xy + x^2 - 2y = 0.$$

Se si parte dalla prima equazione, passando attraverso un semplice raccoglimento in fattori, si ha che $2y(y+x) = 0$. Pertanto, $y = 0$ oppure $y = -x$: dalla prima opzione, andando nella seconda equazione, si trova facilmente $x = 0$, ossia il primo punto stazionario $\mathbf{O} = (0,0)$. Se invece si percorre la seconda opzione $y = -x$, andando nella seconda equazione, si trova $9x^2 + 2x = 0$, ossia $x(9x+2) = 0$, che porta di nuovo al primo punto stazionario $\mathbf{O}$ nel caso $x = 0$, mentre al secondo punto stazionario $\mathbf{A} = (-2/9, 2/9)$ nel caso $x = -2/9$.
Ora calcolo le derivate seconde, ossia $f_{xx} = 2y$, $f_{xy} = 4y + 2x$, $f_{yy} = 24y + 4x - 2$. Pertanto, la matrice Hessiana nel punto stazionario $\mathbf{O}$ é data da

$$H(\mathbf{O}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ossia é chiaramente semidefinita, quindi con tale metodo non é possibile determinare la natura di tale punto stazionario. Passiamo al punto stazionario $\mathbf{A}$, in corrispondenza del quale la matrice Hessiana é

$$H(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 4/9 & 4/9 \\ 4/9 & 22/9 \end{bmatrix}$$

e siccome il determinate é chiaramente positivo (e lo stesso il primo minore di NW), il punto $\mathbf{A}$ é di minimo almeno locale.
Infine, per far vedere che $\mathbf{A}$ non puó essere globale, considerate ad esempio la restrizione di f sul semiasse negativo delle y: si ha che

$$f(0,y) = 4y^3 - y^2 = y^3\Big(4 - \frac{1}{y}\Big) \to -\infty \quad \text{per } y \to -\infty.$$

Se aveste scelto di mostrare la natura dell'origine, siccome il metodo dell'Hessiana non funziona, proviamo che $\mathbf{O}$ é un punto sella facendo vedere che

$$\Delta f(h,k) = f(h,k) - f(0,0) = f(h,k) = 4k^3 + 2hk^2 + h^2k - k^2$$

muta segno per diverse scelte di h, k comunque piccoli. Infatti, preso un qualunque intorno dell'origine e considerato un punto del tipo (h, k) con $h = 0$ risulta facilmente

$$\Delta f(0, k) = 4k^3 - k^2 = k^2(4k - 1),$$

che é sempre negativo, perché k^2 é sempre positivo, mentre $4k - 1$ é sempre negativo per k piccoli (se fate tendere k a zero, $4k - 1 \to -1$). Invece, se scegliete un punto del tipo (h, h^2) per $h > 0$, si ha che

$$\Delta f(h, h^2) = 4h^6 + 2h^5 = h^5(4h + 2)$$

e questa volta il tutto é positivo, perché $h^5 > 0$ segue da $h > 0$, mentre $4h + 2$ é sempre positivo per $h > 0$.