ESERCIZI DI METODI QUANTITATIVI PER L'ECONOMIA
DIP. DI ECONOMIA E MANAGEMENT DI FERRARA
A.A. 2017/2018

Esercizi 2: algebra lineare

Determinanti e minori

Esercizio 1. Date le matrici

$$\mathbf{A}=\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 9 \\ \hline 3 & 14 \\ \hline\end{array}$$

$$\mathbf{B}=\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & -2 \\ \hline -3 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$\mathbf{C}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -3 & 6 \\ \hline 7 & 0 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 2 \\ \hline\end{array}$$

si calcolino i loro determinanti.

Soluzione. I determinanti delle 3 matrici sono nell'ordine $1, -4, 201$.

Esercizio 2. Date le matrici

$$\mathbf{A}=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 7 \\ \hline 5 & 10 \\ \hline\end{array}$$

$$\mathbf{B}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 4 & 1 \\ \hline 1 & -5 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 0 \\ \hline\end{array}$$

si calcolino i loro minori di NW.

Soluzione. Si ha che $NW(\mathbf{A}) = \{1, -25\}$, $NW(\mathbf{B}) = \{-1, 1, 59\}$.

Esercizio 3. Data la matrice

$$\mathbf{A}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline \alpha-1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & \alpha-1 & 9 \\ \hline 0 & 1 & 3 \\ \hline\end{array}$$

trovare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ essa è singolare.

Soluzione. Per $\alpha = 1, 4$.

Esercizio 4. Data la matrice

$$\mathbf{A}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & -5 & 4 \\ \hline 0 & 7 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 9 \\ \hline\end{array}$$

calcolare i suoi minori principali.

Soluzione. Si ha che $MP(\mathbf{A}) = \{2, 7, 9, 14, 10, 63, 70\}$.

Esercizio 5. Data la matrice

$$\mathbf{A}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

calcolare il suo determinante e il minore complementare dell'elemento a_{23}.

Soluzione. Il suo determinante é 3 e il minore richiesto é zero.

Esercizio 6. Data la matrice

$$\mathbf{A}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

calcolare i suoi minori di NW e il minore complementare dell'elemento a_{21}.

Soluzione. Si ha che $NW(\mathbf{A}) = \{1, -2, 2\}$ e il minore complementare dell'elemento a_{21} é -3.

Esercizio 7. Data la matrice

$$\mathbf{A}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline \alpha & 1 & 0 \\ \hline 2 & \alpha-1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 3-\alpha \\ \hline \end{array}$$

trovare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ essa presenta tutti i minori di NW strettamente positivi. Verificare poi che, per questi stessi valori di α, anche tutti i minori principali di A sono strettamente positivi.

Soluzione. Si ha che $NW(\mathbf{A}) = \{\alpha, \alpha^2 - \alpha - 2, (3 - \alpha) \cdot (\alpha^2 - \alpha - 2)\}$. Si puó dedurre facilmente che la contemporanea stretta positivitá di tutti e 3 i minori di NW di $\mathbf{A}$ puó sussistere se e solo se $2 < \alpha < 3$. Essendo i minori principali distinti da quelli di NW dati da $\{\alpha - 1,\ 3 - \alpha,\ \alpha \cdot (3 - \alpha), (\alpha - 1) \cdot (3 - \alpha)\}$, è chiaro come anche questi siano tutti strettamente positivi per $\alpha \in\ ]2, 3[$.

Esercizio 8. Data la matrice

$$\mathbf{A}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 4 & 0 \\ \hline \end{array}$$

trovare il determinante.

Soluzione. Il determinante di $\mathbf{A}$ é -2.