ESERCIZI DI METODI QUANTITATIVI PER L'ECONOMIA
DIP. DI ECONOMIA E MANAGEMENT DI FERRARA
A.A. 2017/2018

File 1: funzioni di input vettoriale, gradiente, punti stazionari

Esercizio 1. Assegnate le funzioni, a due variabili di input, con leggi date da

$$\text{(i)}\ \ f(x,y) = x - \frac{y}{1+x-y};$$
$$\text{(ii)}\ \ f(x,y) = \sqrt{xy} - \frac{x+y}{x-y};$$
$$\text{(iii)}\ \ f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{1+y^2}\right) + \sqrt{x^2-y};$$
$$\text{(iv)}\ \ f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$
$$\text{(v)}\ \ f(x,y) = \sqrt{y^2-x^4}$$

determinare i loro domini naturali e rappresentarli graficamente sul piano cartesiano. Dire poi se sono aperti o chiusi.

Soluzione. (i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \neq 1+x\}$: aperto; graficamente, si tratta del piano cartesiano esclusa una retta.

(ii) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, ((x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)) \wedge (x \neq y)\}$: nè aperto nè chiuso; graficamente, si tratta del primo e del terzo quadrante del piano compresi gli assi, ma esclusa la bisettrice degli stessi quadranti.

(iii) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0 \wedge y \leq x^2\}$: nè aperto nè chiuso; graficamente, si tratta dei punti che stanno sotto la parabola $y = x^2$ solo per i punti del semiasse positivo delle ascisse.

(iv) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 4 \wedge x < 1 \vee x > 2\}$: nè aperto nè chiuso. Graficamente, si tratta di un cerchio di centro l'origine e raggio 2 escluso il settore "destro" costituito dai punti di ascissa maggiori o uguali a 1.

(v) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \leq -x^2 \ \vee \ y \geq x^2\}$: chiuso. Graficamente, si tratta di tutta la regione del piano cartesiano delimitata inferiormente dalla parabola di equazione $y = x^2$ e dalla sua "simmetrica" rispetto alla parabola $y = -x^2$.

Esercizio 2. Calcolate le derivate parziali delle seguenti funzioni:

$$\text{(i)}\ \ f(x,y) = 5y^5 + 4x^4y + 3x^2y^3 + 2xy^4 + 2x + 3y + 5;$$

$$\text{(ii)}\ \ f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2y^2+1};$$

$$\text{(iii)}\ \ f(x,y,z) = \ln((2x+y)^2+1) - \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}};$$

$$\text{(iv)}\ \ f(x,y) = xy(x^2 - xy + y);$$

$$\text{(v)}\ \ f(x,y) = x - \sqrt{x^2+y^2}.$$

Soluzione. (i) $f_x(x,y) = 16x^3y + 6xy^3 + 2y^4 + 2$; $f_y(x,y) = 25y^4 + 4x^4 + 9x^2y^2 + 8xy^3 + 3$;

(ii) $f_x(x,y) = y^2 \cdot \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$; $f_y(x,y) = x \cdot \frac{2y}{(1+x^2y^2)^2}$;

(iii) $f_x(x,y,z) = 4 \cdot \frac{2x+y}{1+(2x+y)^2} + \frac{xz}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$; $f_y(x,y,z) = 2 \cdot \frac{2x+y}{1+(2x+y)^2} + \frac{yz}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$; $f_z(x,y,z) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$;

(iv) $f_x(x,y) = y(x^2 - xy + y) + xy(2x - y)$; $f_y(x,y) = x(x^2 - xy + y) + xy(1 - x)$;

(v) $f_x(x,y) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $f_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Esercizio 3. Calcolate il gradiente delle seguenti funzioni sul loro dominio naturale:

$$\text{(a)}\ \ f(x,y) = y^2 \cdot \exp(-x);$$

$$\text{(b)}\ \ f(x,y) = \exp\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$\text{(c)}\ \ f(x,y,z) = x^2 - 2yz + z^3.$$

$$\text{(d)}\ \ f(x,y) = \ln(x^2 - xy).$$

Soluzione. (a) $\nabla f = (-y^2 \exp(-x), 2y^{\cdot} \exp(-x))$ su $D = \mathbb{R}^2$;

(b) $\nabla f = \left(\frac{1}{y}\exp\left(\frac{x}{y}\right), -\frac{x}{y^2}\exp\left(\frac{x}{y}\right)\right)$ su $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 0\}$;

(c) $\nabla f = (2x, -2z, -2y + 3z^2)$ su $D = \mathbb{R}^3$.

(d) $\nabla f = (\frac{2x-y}{x^2-xy}, \frac{-x}{x^2-xy})$ su

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, ((x < 0 \wedge y > x) \vee (x > 0 \wedge y < x))\}.$$

Esercizio 4. Calcolare i punti stazionari della funzione
$$f(x,y) = \frac{2}{3}x^3 - 8x + y^2 - 6y.$$
Calcolare poi le loro quote, ossia il valore di f in quei punti.

Soluzione. Il dominio è tutto il piano cartesiano. Il gradiente di f è $\nabla f(x,y) = (2x^2 - 8, 2y - 6)$ e i punti stazionari sono $A = (2,3)$ e $B = (-2,3)$. Infine $f(A) = -59/3$; $f(B) = 5/3$.

Esercizio 5. Calcolare i punti stazionari della funzione
$$f(x,y) = 4 - x^2 + \alpha x - (y+\alpha)^2,$$
ove α è un qualunque parametro reale. Calcolare poi le loro quote, ossia il valore di f in quei punti.

Soluzione. Il dominio è tutto il piano cartesiano. Il gradiente di f è $\nabla f(x,y) = (-2x+\alpha, -2(y+\alpha))$ e il punto stazionario, in funzione di α, è $A = (\alpha/2, -\alpha)$. Infine $f(A) = 4 + \alpha^2/4$.

Esercizio 6. (**Difficile**) Calcolare i punti stazionari della funzione
$$f(x,y) = xy(x^2 - xy + 8y).$$

Soluzione. Il dominio è tutto il piano cartesiano. Le derivate parziali sono
$$f_x(x,y) = y[x^2 - xy + 8y + x(2x-y)];\ f_y(x,y) = x[x^2 - xy + 8y + y(8-x)].$$
Pertanto, per cercare i punti stazionari, posso iniziare dalla prima equazione e porre $y = 0$, che inserito nella seconda equazione conduce facilmente a $x = 0$, ossia all'origine $O = (0,0)$, oppure porre
$$x^2 - xy + 8y + x(2x-y) = 0.$$
Dopo qualche calcolo, la precedente equazione porta a $y = \frac{3x^2}{2x-8}$, con $x \neq 4$ (per $x = 4$ si vede facilmente che non si hanno soluzioni) che inserito nella seconda equazione, dopo opportuni calcoli algebrici, conduce a
$$20x^2 - 2x^3 = 2x^2(10-x) = 0,$$
da cui segue immediatamente che $x = 10$ e, di conseguenza, $y = 25$, ossia il secondo ed ultimo punto stazionario $A = (10, 25)$.
In realtá, ci sarebbe un metodo piú veloce, ma anche piú arduo da individuare: una volta appurato che l'unica soluzione con $x = 0$ o $y = 0$ é l'origine, si puó assumere

che $xy \neq 0$ e moltiplicare f_x per x e f_y per y, poi si calcola la differenza $xf_x - yf_y$, data semplicemente da

$$xy(2x^2 - 8y) = 0,$$

da cui si ricava subito che $y = x^2/4$ che inserito di nuovo in f_x porta a $5x^2 - x^3/2 = 0$, ossia $x^2(5 - x/2) = 0$ che implica $x = 10$ e quindi di nuovo il punto A. In definitiva, i punti stazionari sono $O = (0,0)$ e $A = (10,25)$.

Esercizio 7. Calcolare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 9xy.$$

Soluzione. Il dominio è tutto il piano cartesiano. I punti stazionari sono $O = (0,0)$ e $A = (3,-3)$.

Esercizio 8. Calcolare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2x^2 + 4xy.$$

Soluzione. Il dominio è tutto il piano cartesiano. I punti stazionari sono $O = (0,0)$, $A = (0,-4)$, $B = (-\frac{2}{3},-2)$ e $C = (2,-2)$.

Esercizio 9. (**Difficile**) Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = (x^2 - 3y)^2$$

ammette infiniti punti stazionari dati da

$$\left\{ \left(\alpha, \frac{\alpha^2}{3} \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 10. (**Difficile**) Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \left(1 + \frac{x}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{y-x}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{6-y}{4}\right)$$

ammette i seguenti punti stazionari:

$$A = (-4,-8);\ B = (2,4);\ C = (-4,10);\ D = (14,10).$$

Calcolare poi le loro quote, ossia il valore di f in quei punti.
(**Molto difficile**) Mostrare che il punto C non puó essere un estremo per f, usando la definizione di punto di minimo o massimo (locale).

Esercizio 11. (Da testo esame 07.09.2017) Data la funzione
$$f(x,y) = 4y^3 + 2xy^2 + x^2y - y^2,$$
determinare sul suo dominio "naturale" i suoi due punti stazionari.

Soluzione. Il dominio naturale é ovviamente $\mathbb{R}^2$. Per la ricerca dei punti stazionari, si ha che
$$f_x(x,y) = 2y^2 + 2xy = 0$$
e
$$f_y(x,y) = 12y^2 + 4xy + x^2 - 2y = 0.$$
Se si parte dalla prima equazione, passando attraverso un semplice raccoglimento in fattori, si ha che $2y(y+x) = 0$. Pertanto, $y = 0$ oppure $y = -x$: dalla prima opzione, andando nella seconda equazione, si trova facilmente $x = 0$, ossia il primo punto stazionario $\mathbf{O} = (0,0)$. Se invece si percorre la seconda opzione $y = -x$, andando nella seconda equazione, si trova $9x^2 + 2x = 0$, ossia $x(9x+2) = 0$, che porta di nuovo al primo punto stazionario $\mathbf{O}$ nel caso $x = 0$, mentre al secondo punto stazionario $\mathbf{A} = (-2/9, 2/9)$ nel caso $x = -2/9$.