

Levine, Krehbiel, Berenson

**Statistica II ed.**

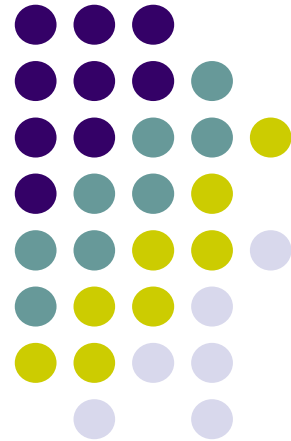
Casa editrice: Pearson

# Capitolo 10

## Test basati su due campioni e ANOVA a una via

Insegnamento: Statistica  
Corsi di Laurea Triennale in Economia

Dipartimento di Economia e Management, Università di Ferrara  
Docenti: Prof. Stefano Bonnini, Dott.ssa Valentina Mini



# Argomenti

- Confronto tra le medie di due popolazioni indipendenti
- Confronto tra le medie di due popolazioni non indipendenti
- Confronto tra le proporzioni di due popolazioni
- Test  $F$  per la differenza tra due varianze
- Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

# Confronto tra medie di due pop. indipendenti

- Consideriamo due popolazioni indipendenti e supponiamo di estrarre un campione di ampiezza  $n_1$  dalla prima popolazione di ampiezza  $n_2$  dalla seconda popolazione
- Siano  $\mu_1$  e  $\mu_2$  le medie che caratterizzano rispettivamente la prima e la seconda popolazione e si assumano i due scarti quadratici medi  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  come noti
- Si vuole verificare l'ipotesi nulla che le medie delle due popolazioni (indipendenti) sono uguali tra loro

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad (\mu_1 - \mu_2 = 0)$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \quad (\mu_1 - \mu_2 \neq 0)$$

- A questo scopo viene definita la **statistica test Z per la differenza tra le due medie**

# Confronto tra medie di due pop. indipendenti

## Test Z per la differenza fra due medie

La statistica test in questo caso è:

$$(7.1) \quad Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

dove:

$\bar{X}_1$  = media degli elementi del campione estratto dalla popolazione 1

$\mu_1$  = media della popolazione 1

$\sigma_1^2$  = varianza della popolazione 1

$n_1$  = ampiezza del campione estratto dalla popolazione 1

$\bar{X}_2$  = media degli elementi del campione estratto dalla popolazione 2

$\mu_2$  = media della popolazione 2

$\sigma_2^2$  = varianza della popolazione 2

$n_2$  = ampiezza del campione estratto dalla popolazione 2

# Confronto tra medie di due pop. indipendenti

- Se si assume che i due campioni siano estratti casualmente ed indipendentemente da due popolazioni normali la statistica  $Z$  ha distribuzione normale
- Se le due popolazioni non hanno distribuzione normale il test  $Z$  può essere utilizzato con ampiezza campionarie sufficientemente elevate (in virtù del teorema del limite centrale)
- In molti casi le varianze delle due popolazioni non sono note. Se si assume l'ipotesi di omogeneità della varianze ( $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$ ), per verificare se c'è una differenza significativa tra le medie delle due popolazioni è possibile utilizzare il **test  $t$  basato sulle varianze campionarie combinate**
- Il test  $t$  è appropriato se le popolazioni hanno distribuzione normale oppure, in caso contrario, se le ampiezze campionarie sono sufficientemente elevate

# Confronto tra medie di due pop. indipendenti

## Test $t$ per la differenza fra due medie basato sulle varianze campionarie ponderate

La statistica test in questo caso è:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad (7.2)$$

dove

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

e

$S_p^2$  = varianza ponderata

$\bar{X}_1$  = media degli elementi del campione estratto dalla popolazione 1

$S_1^2$  = varianza degli elementi del campione estratto dalla popolazione 1

$n_1$  = ampiezza del campione estratto dalla popolazione 1

$\bar{X}_2$  = media degli elementi del campione estratto dalla popolazione 2

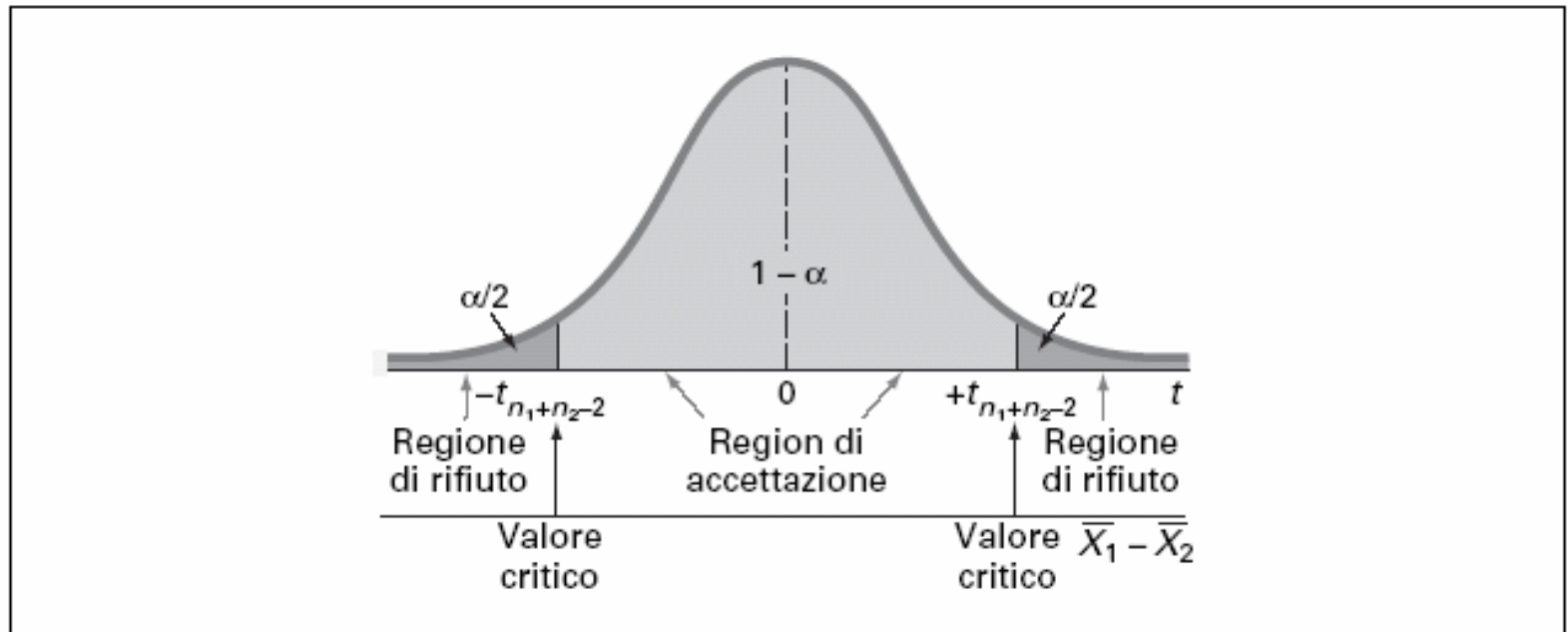
$S_2^2$  = varianza degli elementi del campione estratto dalla popolazione 2

$n_2$  = ampiezza del campione estratto dalla popolazione 2

Si dimostra che la statistica test  $t$  sotto l'ipotesi nulla si distribuisce secondo una  $t$  di Student con  $n_1 + n_2 - 2$  gradi di libertà.

# Confronto tra medie di due pop. indipendenti

Regione di rifiuto e di accettazione per la differenza tra due medie utilizzando la statistica test  $t$  basata sulle varianze combinate (test a due code)

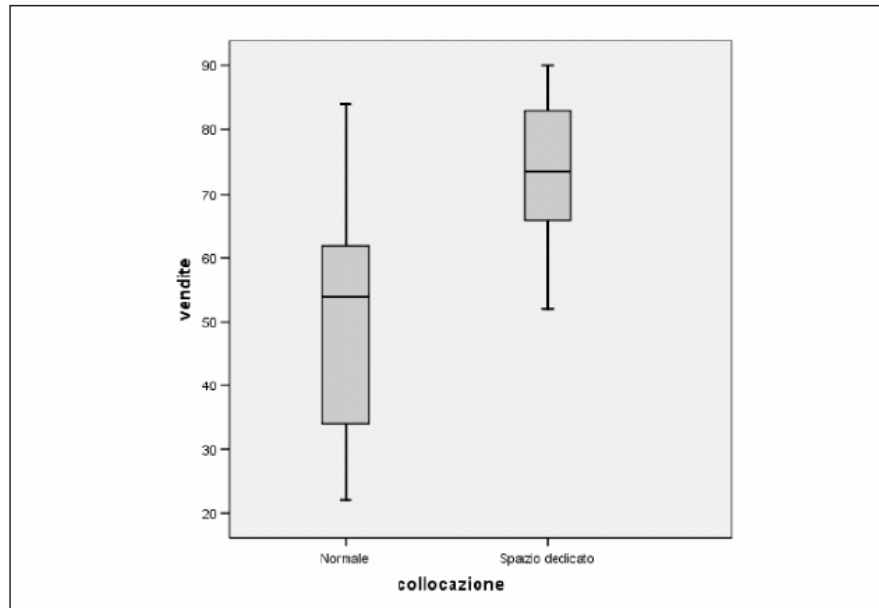


Quando l'assunzione dell'omogeneità delle varianze non è plausibile occorre fare riferimento al **test  $t$  con varianze diverse** (ricorrendo all'Excel o ad altri software statistici)

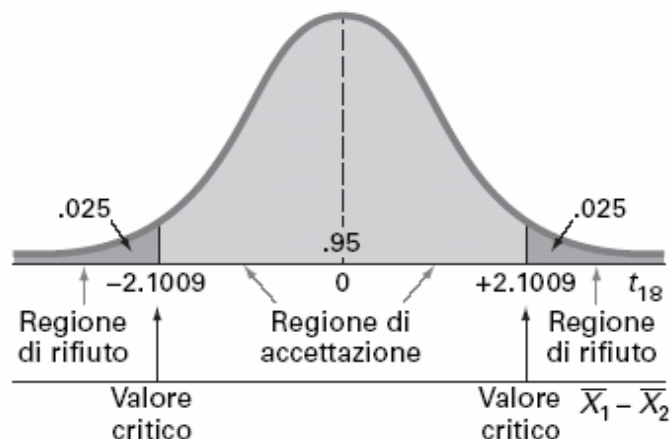
# Confronto tra medie di due pop. indipendenti

Esempio: confronto tra le vendite settimanali (numero di pezzi venduti) della BLK cola in due gruppi di supermercati, dove il primo adotta la collocazione a scaffale mentre il secondo utilizza uno spazio dedicato

| Collocazione |    |    |    |    |                 |    |    |    |    |
|--------------|----|----|----|----|-----------------|----|----|----|----|
| Scaffale     |    |    |    |    | Spazio dedicato |    |    |    |    |
| 22           | 34 | 52 | 62 | 30 | 52              | 71 | 76 | 54 | 67 |
| 40           | 64 | 84 | 56 | 59 | 83              | 66 | 90 | 77 | 84 |



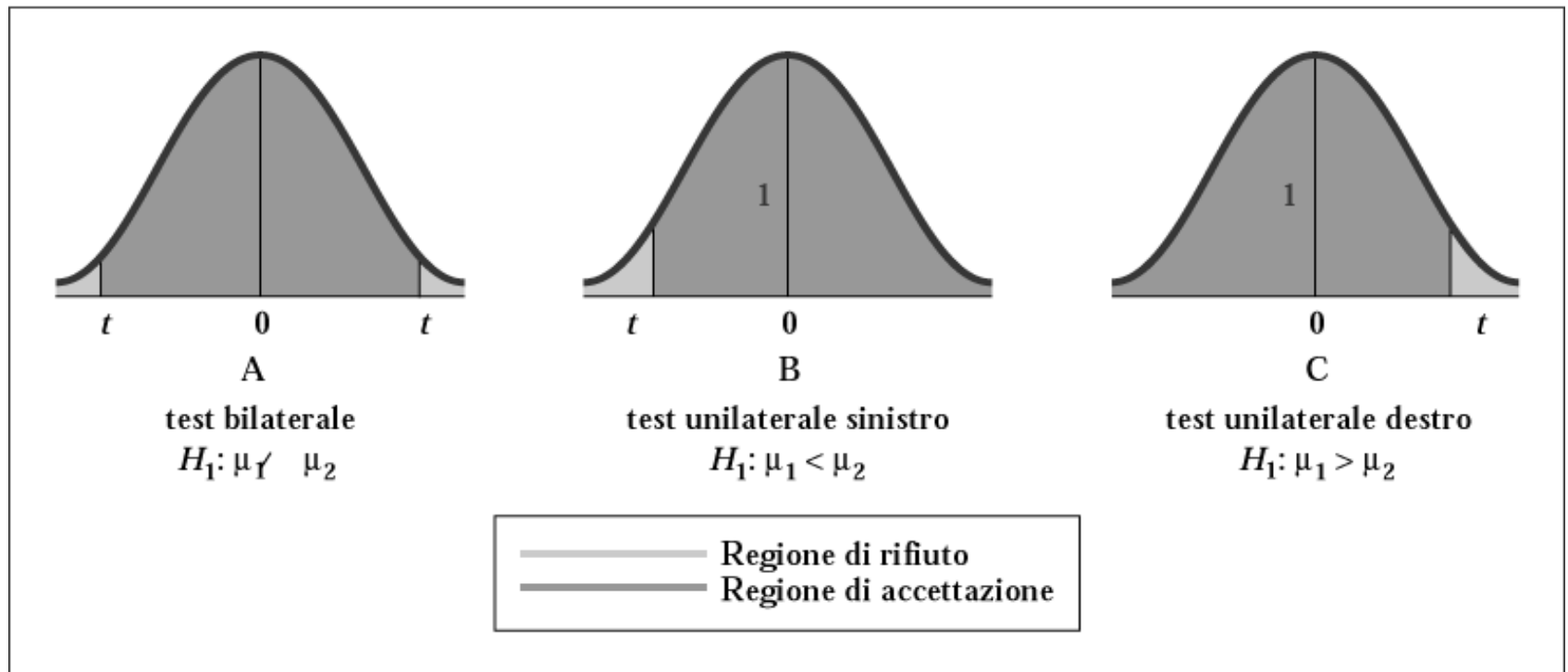
# Confronto tra medie di due pop. indipendenti



|    | A                                                     | B               | C                      |
|----|-------------------------------------------------------|-----------------|------------------------|
| 1  | <b>Test t: due campioni assumendo uguale varianza</b> |                 |                        |
| 2  |                                                       |                 |                        |
| 3  |                                                       | <i>Scaffale</i> | <i>Spazio dedicato</i> |
| 4  | <b>Media</b>                                          | 50,3            | 72                     |
| 5  | <b>Varianza</b>                                       | 350,6778        | 157,3333               |
| 6  | <b>Osservazioni</b>                                   | 10              | 10                     |
| 7  | <b>Varianza complessiva</b>                           | 254,0056        |                        |
| 8  | <b>Differenza ipotizzata per le r</b>                 | 0               |                        |
| 9  | <b>gdl</b>                                            | 18              |                        |
| 10 | <b>Stat t</b>                                         | -3,0446         |                        |
| 11 | <b>P(T&lt;=t) una coda</b>                            | 0,0035          |                        |
| 12 | <b>t critico una coda</b>                             | 1,7341          |                        |
| 13 | <b>P(T&lt;=t) due code</b>                            | 0,0070          |                        |
| 14 | <b>t critico due code</b>                             | 2,1009          |                        |

# Confronto tra medie di due pop. indipendenti

In base al fatto che l'ipotesi alternativa sia nella forma A:  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$  oppure B:  $H_1: \mu_1 < \mu_2$  o C:  $H_1: \mu_1 > \mu_2$  si parla di test ad una coda e test a due code



# Intervallo di confidenza per la differenza tra le medie di due pop. indipendenti

Anziché (o oltre a) sottoporre a verifica l'ipotesi nulla secondo la quale due medie sono uguali, possiamo utilizzare l'equazione (10.3) per ottenere un intervallo di confidenza per la differenza tra le medie  $\mu_1$  e  $\mu_2$  delle due popolazioni:

## Intervallo di confidenza per la differenza ( $\mu_1 - \mu_2$ )

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{n_1+n_2-2; \alpha/2} \cdot \sqrt{S_p^2 (1/n_1 + 1/n_2)} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{n_1+n_2-2; \alpha/2} \sqrt{S_p^2 (1/n_1 + 1/n_2)} \quad (10.3)$$

dove  $t_{n_1+n_2-2; \alpha/2}$  è il valore critico a cui corrisponde un'area cumulata pari a  $(1-\alpha/2)$  della distribuzione t di Student con  $(n_1+n_2-2)$  gradi di libertà.

# Confronto tra medie di 2 pop. non indipendenti

Ci sono situazioni in cui le due popolazioni poste a confronto non sono indipendenti di modo che il campione estratto dalla prima popolazione non è indipendente dal campione estratto dalla seconda:

1. **campioni appaiati** (individui o casi che condividono una stessa caratteristica)
2. **misurazioni ripetute** (stesso insieme di individui o casi)

L'attenzione si sposta sulla differenze tra i valori nei due campioni:

| Valore | Gruppo   |          | Differenza              |
|--------|----------|----------|-------------------------|
|        | 1        | 2        |                         |
| 1      | $X_{11}$ | $X_{21}$ | $D_1 = X_{11} - X_{21}$ |
| 2      | $X_{12}$ | $X_{22}$ | $D_2 = X_{12} - X_{22}$ |
| .      | .        | .        | .                       |
| .      | .        | .        | .                       |
| .      | .        | .        | .                       |
| $i$    | $X_{1i}$ | $X_{2i}$ | $D_i = X_{1i} - X_{2i}$ |
| .      | .        | .        | .                       |
| .      | .        | .        | .                       |
| .      | .        | .        | .                       |
| $n$    | $X_{1n}$ | $X_{2n}$ | $D_n = X_{1n} - X_{2n}$ |

# Confronto tra medie di 2 pop. non indipendenti

Quindi verificare l'ipotesi di uguaglianza delle medie  $\mu_1$  e  $\mu_2$  di due popolazioni non indipendenti equivale a verificare ipotesi di uguaglianza a zero della media della differenza  $D$  tra le due popolazioni, cioè  $H_0: \mu_D=0$ . Se lo scarto quadratico medio della popolazione delle differenze  $\sigma_D$  è noto, allora il test di riferimento è basato sulla statistica  $Z$ . In caso  $\sigma_D$  sia ignoto si può fare ricorso al **test  $t$  su campioni appaiati**.

## Statistica test $Z$ per la media delle differenze

$$Z = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\sigma_D / \sqrt{n}}, \text{ con } \bar{D} = 1/n \sum_{i=1}^n D_i \quad (10.4)$$

## Statistica test $t$ per la media delle differenze

$$t = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}, \text{ con } \bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n} \text{ e } S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{(n-1)}} \quad (10.5)$$

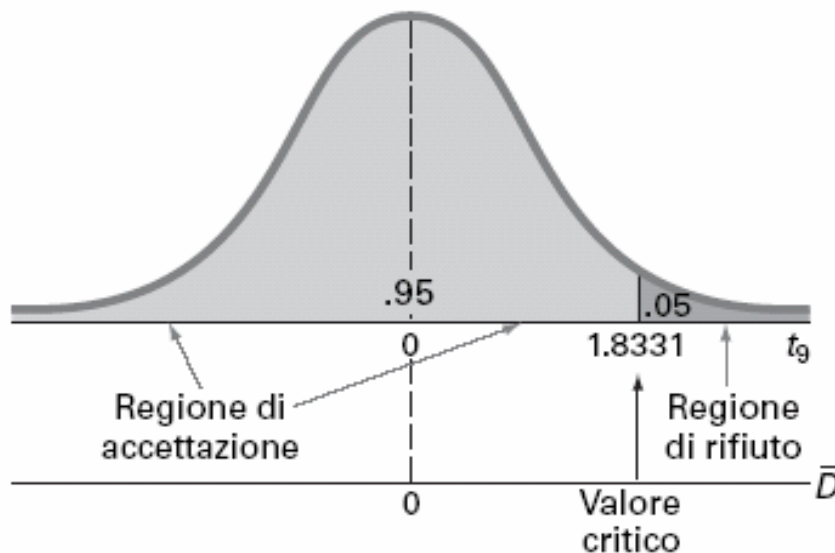
# Confronto tra medie di 2 pop. non indipendenti

Esempio: Misurazioni ripetute del tempo (in secondi) di elaborazione di un progetto utilizzando due diversi software

| Tempo di elaborazione (in secondi) |                      |                |                      |
|------------------------------------|----------------------|----------------|----------------------|
| Progetto                           | Software sul mercato | Nuovo software | Differenza ( $D_i$ ) |
| 1                                  | 9.98                 | 9.88           | +0.10                |
| 2                                  | 9.88                 | 9.86           | +0.02                |
| 3                                  | 9.84                 | 9.75           | +0.09                |
| 4                                  | 9.99                 | 9.80           | +0.19                |
| 5                                  | 9.94                 | 9.87           | +0.07                |
| 6                                  | 9.84                 | 9.84           | 0.00                 |
| 7                                  | 9.86                 | 9.87           | -0.01                |
| 8                                  | 10.12                | 9.86           | +0.26                |
| 9                                  | 9.90                 | 9.83           | +0.07                |
| 10                                 | 9.91                 | 9.86           | +0.05                |
|                                    |                      |                | +0.84                |

# Confronto tra medie di 2 pop. non indipendenti

Test  $t$  a una coda per la differenza tra le medie di due popolazioni non indipendenti a un livello di significatività pari a 0.05 e con 9 gradi di libertà



# Intervallo di confidenza per la differenza tra le medie di due pop. non indipendenti

Anziché (o oltre a) sottoporre a verifica l'ipotesi nulla secondo la quale due medie sono uguali, possiamo utilizzare l'equazione (10.6) per ottenere un intervallo di confidenza per la differenza  $\mu_D$ :

## Intervallo di confidenza per la differenza tra le medie di due popolazioni non indipendenti

$$\bar{D} - t_{n-1;\alpha/2} S_D / \sqrt{n} \leq \mu_D \leq \bar{D} + t_{n-1;\alpha/2} S_D / \sqrt{n} \quad (10.6)$$

dove  $t_{n-1;\alpha/2}$  è il valore critico a cui corrisponde un'area cumulata pari a  $(1-\alpha/2)$  della distribuzione t di Student con  $(n-1)$  gradi di libertà

# Confronto tra le proporzioni di due popolazioni

- Spesso si è interessati a effettuare confronti e ad analizzare differenze tra due popolazioni con riferimento alla proporzione di casi con una certa caratteristica
- Per confrontare due proporzioni sulla base dei risultati di due campioni si può ricorrere al **test Z per la differenza tra due proporzioni**, la cui statistica test ha distribuzione approssimativamente normale quando le ampiezza campionarie sono sufficientemente elevate

**Statistica Z per la differenza tra due proporzioni (10.7)**

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p}) \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \text{ con } \bar{p} = \frac{\bar{X}_1 + X_2}{n_1 + n_2}, p_1 = \frac{X_1}{n_1}, p_2 = \frac{X_2}{n_2}$$

# Confronto tra le proporzioni di due popolazioni

- A seconda di come è formulata l'ipotesi alternativa avremo un test a due code ( $H_1: \pi_1 \neq \pi_2$  ( $\pi_1 - \pi_2 \neq 0$ )) o un test a una coda (ipotesi direzionali:  $H_1: \pi_1 > \pi_2$  ( $\pi_1 - \pi_2 > 0$ ) oppure  $H_1: \pi_1 < \pi_2$  ( $\pi_1 - \pi_2 < 0$ ))

- Esempio

La catena di alberghi *TC Resort* è interessata a valutare se esiste differenza tra la proporzione di clienti che intendono visitare nuovamente due dei suoi alberghi. Vengono campionati 227 clienti nel primo albergo e 262 dal secondo di cui 163 si dicono disposti a ritornare nel primo campione, 154 nel secondo.

Adottando un livello di significatività pari a 0.05 si può affermare che nei due alberghi esiste una differenza tra la proporzione di coloro che sono disposti a ritornare?

# Confronto tra le proporzioni di due popolazioni

Le ipotesi da verificare sono:

$$H_0: \pi_1 = \pi_2 \quad \text{oppure} \quad \pi_1 - \pi_2 = 0$$

$$H_1: \pi_1 \neq \pi_2 \quad \text{oppure} \quad \pi_1 - \pi_2 \neq 0$$

Al livello di significatività 0.05, i valori critici della normale standardizzata sono  $-1.96$  e  $1.96$ , e la regola decisionale:

Rifiuta  $H_0$  se  $Z > + 1.96$

oppure  $Z < - 1.96$ ;

altrimenti accetta  $H_0$ .

$$p_{x_1} = \frac{X_1}{n_1} = \frac{163}{227} = 0.718 \quad p_{x_2} = \frac{X_2}{n_2} = \frac{154}{262} = 0.588$$

$$\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} = \frac{163 + 154}{227 + 262} = \frac{317}{489} = 0.648$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(0.718 - 0.588) - 0}{\sqrt{(0.648)(0.352)\left(\frac{1}{227} + \frac{1}{262}\right)}} = \frac{0.13}{\sqrt{(0.228)(0.0082)}} \\ &= \frac{0.13}{\sqrt{0.00187}} = \frac{0.13}{0.0432} = + 3.01 \end{aligned}$$

$Z = + 3,01 > +1,96$  perciò si rifiuta  $H_0$  concludendo che le percentuali sono diverse

# Intervallo di confidenza per la differenza tra due proporzioni

Anziché (o oltre a) sottoporre a verifica l'ipotesi nulla secondo la quale due proporzioni sono uguali, possiamo utilizzare l'equazione (10.8) per ottenere un intervallo di confidenza per la differenza tra le due proporzioni

## Intervallo di confidenza per la differenza tra due proporzioni

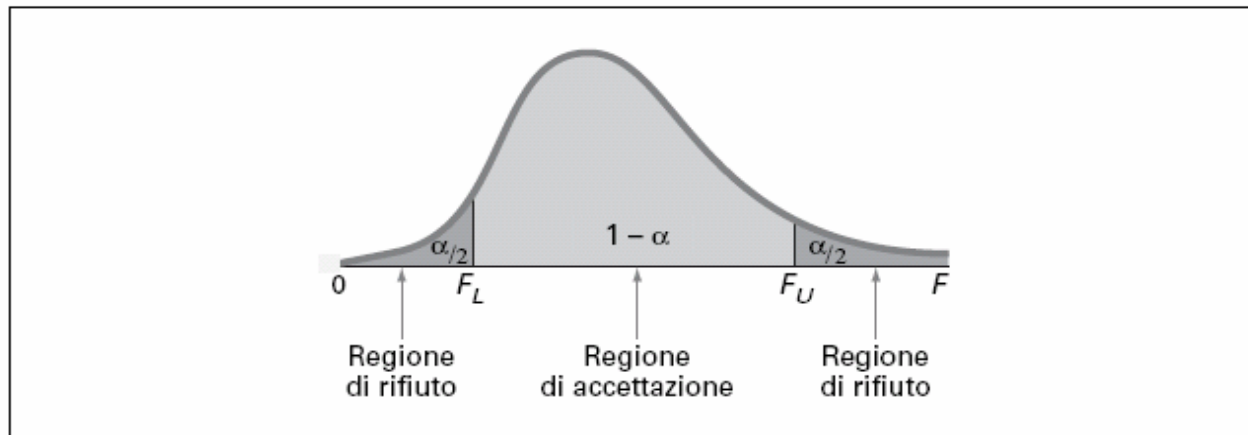
$$\begin{aligned} (p_1 - p_2) - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} &\leq (\pi_1 - \pi_2) \leq \\ &\leq (p_1 - p_2) + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \end{aligned} \quad (10.8)$$

# Test $F$ per la differenza tra due varianze

- Talvolta si pone il problema di valutare l'ipotesi di omogeneità delle varianze e a questo scopo è possibile considerare un test statistico per verificare  $H_0: \sigma^2_1 = \sigma^2_2$  contro l'ipotesi alternativa  $H_1: \sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$ . Questo test è basato sul rapporto delle due varianze campionarie

$$F = S^2_1 / S^2_2 \quad (10.9)$$

- La statistica test  $F$  segue una distribuzione  $F$  con  $(n_1-1)$  e  $(n_2-1)$  gradi di libertà rispettivamente a numeratore e a denominatore



# Test $F$ per la differenza tra due varianze

Esempio: determinazione del valore critico superiore  $F_U$  di una distribuzione  $F$  con 9 e 9 gradi di libertà corrispondente a un'area nella coda destra pari a 0.025.

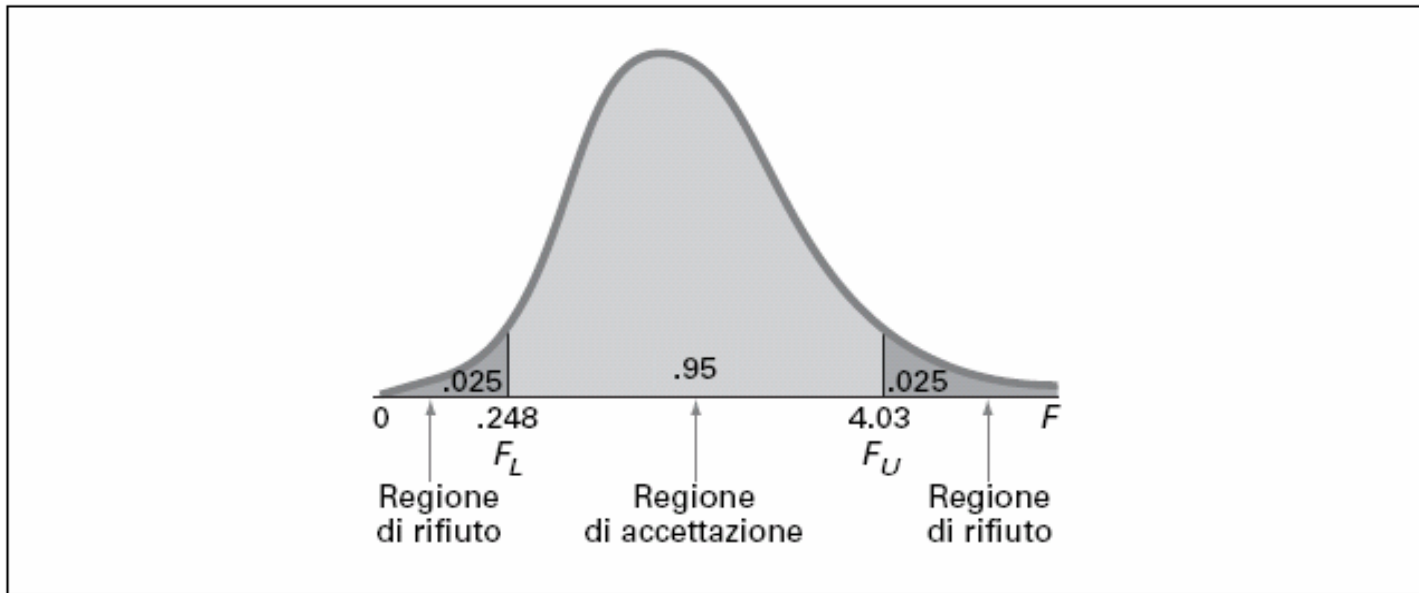
| Denominatore<br>$df_2$ | Numeratore $df_1$ |        |        |     |        |        |        |
|------------------------|-------------------|--------|--------|-----|--------|--------|--------|
|                        | 1                 | 2      | 3      | ... | 7      | 8      | 9      |
| 1                      | 647.80            | 799.50 | 864.20 | ... | 948.20 | 956.70 | 963.30 |
| 2                      | 38.51             | 39.00  | 39.17  | ... | 39.36  | 39.37  | 39.39  |
| 3                      | 17.44             | 16.04  | 15.44  | ... | 14.62  | 14.54  | 14.47  |
| .                      | .                 | .      | .      | .   | .      | .      | .      |
| .                      | .                 | .      | .      | .   | .      | .      | .      |
| .                      | .                 | .      | .      | .   | .      | .      | .      |
| 7                      | 8.07              | 6.54   | 5.89   | ... | 4.99   | 4.90   | 4.82   |
| 8                      | 7.57              | 6.06   | 5.42   | ... | 4.53   | 4.43   | 4.36   |
| 9                      | 7.21              | 5.71   | 5.08   | ... | 4.20   | 4.10   | 4.03   |

Fonte: estratto dalla Tavola E.5

Esiste un modo molto semplice per determinare il valore critico inferiore  $F_L$ :  $F_L = 1/F_U^*$ , dove  $F_U^*$  è il valore critico superiore della distribuzione  $F$  con gradi di libertà invertiti, cioè  $(n_2-1)$  a numeratore e  $(n_1-1)$  a denominatore

# Test $F$ per la differenza tra due varianze

Regioni di rifiuto e di accettazione per un test  $F$  a due code sull'uguaglianza tra due varianze a un livello di significatività pari a 0.05, con 9 e 9 gradi di libertà



Nella verifica di ipotesi sulla omogeneità delle varianze si ipotizza che le due popolazioni siano normali. La statistica  $F$  non è robusta rispetto a violazioni di questa assunzione

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- Finora abbiamo descritto test di ipotesi finalizzati alla verifica di ipotesi sulla differenza tra parametri di due popolazioni
- Spesso si presenta la necessità di prendere in considerazione esperimenti od osservazioni relative a più di due **gruppi** individuati sulla base di un **fattore** di interesse
- I gruppi sono quindi formati secondo i **livelli** assunti da un fattore, ad esempio
  - la temperatura di cottura di un oggetto in ceramica che assume diversi *livelli numerici* come 300°, 350°, 400°, 450° oppure
  - il fornitore che serve una azienda può assumere diversi *livelli qualitativi* come Fornitore 1, Fornitore 2, Fornitore 3, Fornitore 4

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- L'**analisi della varianza** (o **ANOVA**, **AN**alysis **Of** **V**ariance) è una tecnica che consente di confrontare da un punto di vista inferenziale le medie di più di due gruppi (popolazioni)
- Quando i gruppi sono definiti sulla base di un singolo fattore si parla di **analisi della varianza a un fattore o a una via**
- Questa procedura, basata su un test  $F$ , è una estensione a più gruppi del test  $t$  per verificare l'ipotesi sulla differenza tra le medie di due popolazioni indipendenti
- Anche se si parla di analisi della varianza in realtà l'oggetto di interesse sono le differenze tra medie nei diversi gruppi e proprio tramite l'analisi della variabilità all'interno dei gruppi e tra gruppi che siamo in grado di trarre delle conclusioni sulla differenza delle medie

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- La variabilità all'interno dei gruppi è considerata un **errore casuale**, mentre la **variabilità tra i gruppi** è attribuibile alle differenze tra i gruppi, ed è anche chiamata **effetto del trattamento**
- Ipotezziamo che  $c$  gruppi rappresentino popolazioni con distribuzione normale, caratterizzate tutte dalla stessa varianza e che le osservazioni campionarie siano estratte casualmente ed indipendentemente dai  $c$  gruppi
- In questo contesto l'ipotesi nulla che si è interessati a verificare è che le medie di tutti i gruppi siano uguali tra loro

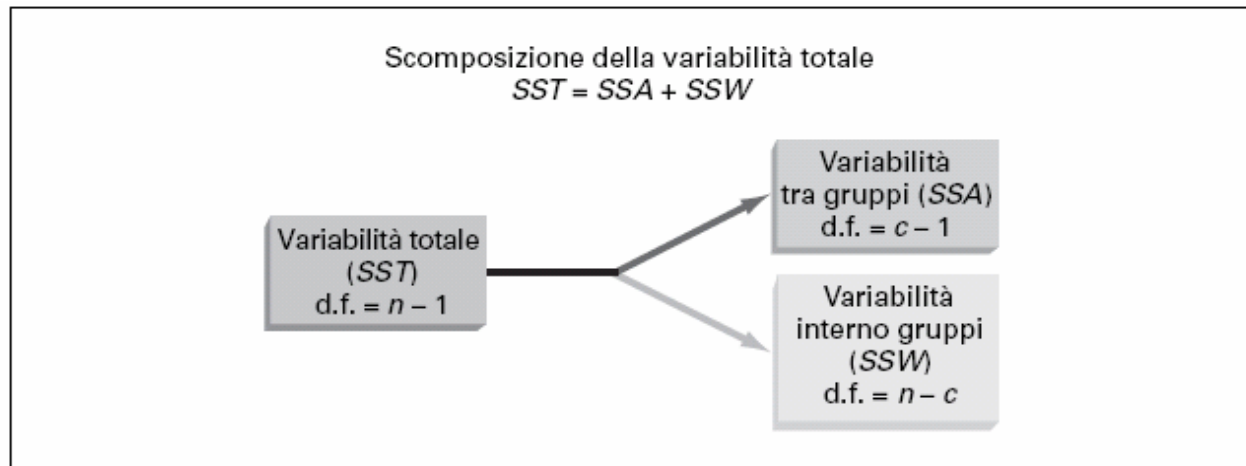
$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_c$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1: \text{non tutte le } \mu_j \text{ sono uguali tra loro (con } j=1, \dots, c)$$

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- Per verificare le due ipotesi considerate, la variabilità totale (misurata dalla **somma dei quadrati totale – SST**) viene scomposta in due componenti: una componente attribuibile alla differenza tra i gruppi (misurata dalla **somma dei quadrati tra i gruppi – SSA**) e una seconda componente che si riferisce alle differenze riscontrare all'interno del gruppi (misurata dalla **somma dei quadrati all'interno dei gruppi – SSW**)



# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- Poiché sotto l'ipotesi nulla si assume che le medie dei gruppi siano tutti uguali, la variabilità totale  $SST$  si ottiene sommando le differenze al quadrato di ciascuna osservazione e la media complessiva, indicata con  $\bar{\bar{X}}$

## Variabilità totale nell'ANOVA a una via

$$SST = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^{n_j} \left( X_{ij} - \bar{\bar{X}} \right)^2 \quad (10.11)$$

dove  $\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}}{n} = \text{media complessiva}, n = \sum_{j=1}^c n_j$

- $SST$  è caratterizzata da  $(n-1)$  gradi di libertà poiché ciascuna osservazione  $X_{ij}$  viene confrontata con la media campionaria complessiva  $\bar{\bar{X}}$

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- La variabilità tra gruppi SSA si ottiene sommando le differenze al quadrato tra le medie campionarie di ciascun gruppo,  $\bar{X}_j$ , e la media complessiva,  $\bar{\bar{X}}$ , dove ogni differenza è ponderata con l'ampiezza campionaria  $n_j$  del gruppo a cui è riferita

## Variabilità tra gruppi nell'ANOVA a una via

$$SSA = \sum_{j=1}^c n_j \left( \bar{X}_j - \bar{\bar{X}} \right)^2 \quad (10.12)$$

dove  $\bar{X}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}}{n_j}$  media campionaria nel  $j$ -esimo campione

- Poiché si tratta di confrontare  $c$  gruppi, SSA sarà caratterizzata da  $(c-1)$  gradi di libertà

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- Infine, la variabilità nei gruppi  $SSW$  si ottiene sommando le differenze al quadrato tra ciascuna osservazione e la media campionaria del gruppo a cui appartiene

## Variabilità all'interno dei gruppi nell'ANOVA a una via

$$SSW = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 \quad (10.13)$$

- Poiché ciascuno dei  $c$  gruppi contribuisce con  $(n_j-1)$  gradi di libertà,  $SSW$  avrà complessivamente  $(n-c) = \sum (n_j-1)$  gradi di libertà
- Dividendo ciascuna somma dei quadrati per i rispettivi gradi di libertà, si ottengono tre varianze, o **medie dei quadrati** –  **$MSA$**  (la media dei quadrati tra gruppi),  **$MSW$**  (la media dei quadrati all'interno dei gruppi) e  **$MST$**  (la media dei quadrati totale)

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- Se l'ipotesi nulla è vera e non ci sono differenze significative tra le medie dei gruppi, le tre medie dei quadrati –  $MSA$ ,  $MSW$  e  $MST$ , che sono esse stesse delle stime di varianze e rappresentano tutte stime della varianza globale della popolazione sottostante
- Quindi per verificare l'ipotesi nulla contro l'alternativa si fa riferimento alla **statistica test  $F$  per l'ANOVA a una via**, ottenuta come rapporto tra  $MSA$  e  $MSW$

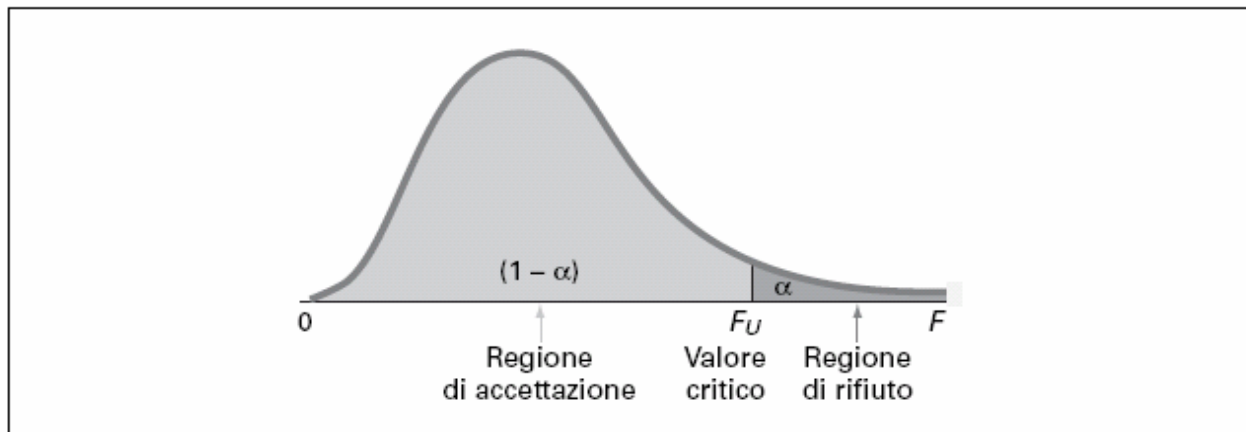
## Statistica test $F$ per l'ANOVA a una via

$$F = \frac{SSA / (n - c)}{SSW / (c - 1)} = \frac{MSA}{MSW} \quad (10.15)$$

- Se l'ipotesi nulla è vera, la realizzazione della statistica  $F$  dovrebbe essere approssimativamente 1, mentre se  $H_0$  è falsa ci aspettiamo valori significativ. superiori all'unità

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- La statistica  $F$  ha distribuzione  $F$  con  $(c-1)$  gradi di libertà al numeratore e  $(n-c)$  gradi di libertà al denominatore
- Quindi, fissato il livello di significatività  $\alpha$ , l'ipotesi nulla dovrà essere rifiutata se il valore osservato della statistica test è maggiore del valore critico  $F_U$  di una distribuzione  $F$  con  $(c-1)$  e  $(n-c)$  gradi di libertà



# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- I risultati del test  $F$  per l'ANOVA vengono solitamente riportati nella cosiddetta **tabella dell'ANOVA**

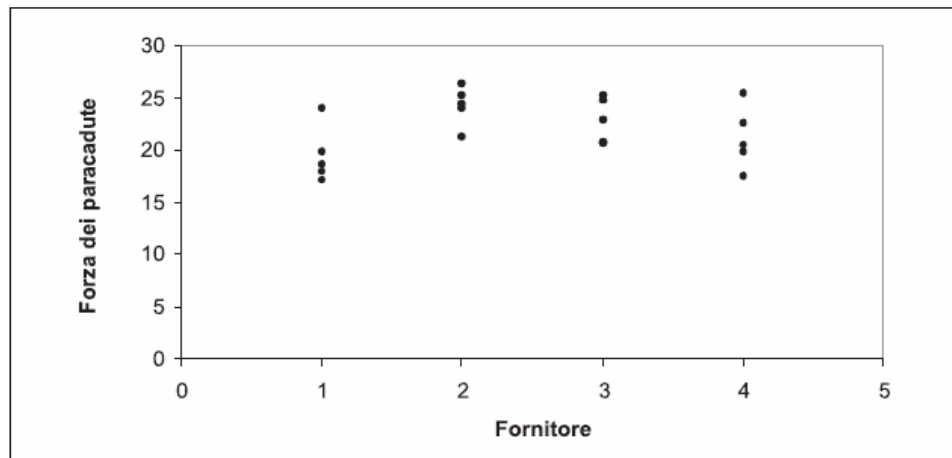
| Fonte                  | Gradi di libertà | Somme dei quadrati | Medie dei quadrati<br>(varianze) | $F$                   |
|------------------------|------------------|--------------------|----------------------------------|-----------------------|
| Tra i gruppi           | $c - 1$          | $SSA$              | $MSA = \frac{SSA}{c - 1}$        | $F = \frac{MSA}{MSW}$ |
| All'interno dei gruppi | $n - c$          | $SSW$              | $MSW = \frac{SSW}{n - c}$        |                       |

- Nella tabella dell'ANOVA viene solitamente riportato anche il  $p$ -value, cioè la probabilità di osservare un valore di  $F$  maggiore o uguale a quello osservato, nel caso l'ipotesi nulla sia vera. Come usuale, l'ipotesi nulla di uguaglianza tra le medie dei gruppi deve essere rifiutata quando il  $p$ -value è inferiore al livello di significatività scelto

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- Esempio: una azienda produttrice di paracadute, vuole confrontare la resistenza dei paracadute prodotti con fibre sintetiche acquistate da quattro diversi fornitori

|   | A | B                       | C           | D           | E           | F           |
|---|---|-------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 |   |                         | Fornitore 1 | Fornitore 2 | Fornitore 3 | Fornitore 4 |
| 2 |   |                         | 18,5        | 26,3        | 20,6        | 25,4        |
| 3 |   |                         | 24,0        | 25,3        | 25,2        | 19,9        |
| 4 |   |                         | 17,2        | 24,0        | 20,8        | 22,6        |
| 5 |   |                         | 19,9        | 21,2        | 24,7        | 17,5        |
| 6 |   |                         | 18,0        | 24,5        | 22,9        | 20,4        |
| 7 |   | Media                   | 19,52       | 24,26       | 22,84       | 21,16       |
| 8 |   | Scarto quadratico medio | 2,69        | 1,92        | 2,13        | 2,98        |

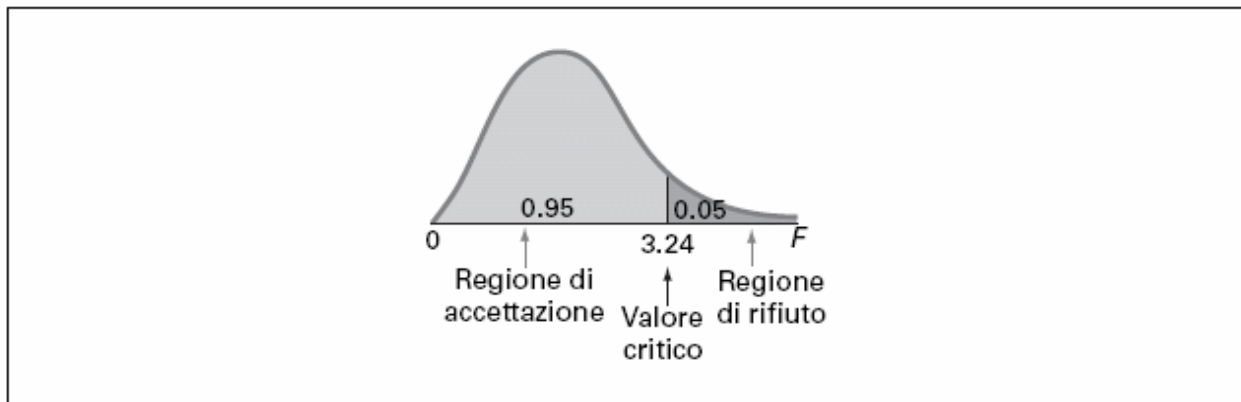


# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- Fissiamo  $\alpha=0.05$  e identifichiamo nelle tavole il valore critico di interesse

| Numeratore $df_1$   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |  |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--|
| Denominatore $df_2$ | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |  |
|                     | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    |  |
|                     | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    |  |
| 11                  | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 |  |
| 12                  | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 |  |
| 13                  | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 |  |
| 14                  | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 |  |
| 15                  | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 |  |
| 16                  | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 |  |

Fonte: estratto dalla Tavola E.5.



# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- Poiché il valore osservato della statistica test è  $F=3.46 < 3.24=F_U$  l'ipotesi nulla deve essere rifiutata e si conclude che la resistenza media dei paracadute varia in modo significativo a seconda del fornitore

|    | A                               | B         | C     | D       | E        | F                         | G      |
|----|---------------------------------|-----------|-------|---------|----------|---------------------------|--------|
| 1  | Analisi varianza: ad un fattore |           |       |         |          |                           |        |
| 2  |                                 |           |       |         |          |                           |        |
| 3  | RIEPILOGO                       |           |       |         |          |                           |        |
| 4  | Gruppi                          | Conteggio | Somma | Media   | Varianza |                           |        |
| 5  | Fornitore 1                     | 5         | 97,6  | 19,52   | 7,237    |                           |        |
| 6  | Fornitore 2                     | 5         | 121,3 | 24,26   | 3,683    |                           |        |
| 7  | Fornitore 3                     | 5         | 114,2 | 22,84   | 4,553    |                           |        |
| 8  | Fornitore 4                     | 5         | 105,8 | 21,16   | 8,903    |                           |        |
| 9  |                                 |           |       |         |          |                           |        |
| 10 |                                 |           |       |         |          |                           |        |
| 11 | ANALISI VARIANZA                |           |       |         |          |                           |        |
| 12 | Origine della variazione        | SQ        | gdl   | MQ      | F        | Valore di significatività | F crit |
| 13 | Tra gruppi                      | 63,2855   | 3     | 21,0952 | 3,4616   | 0,0414                    | 3,2389 |
| 14 | In gruppi                       | 97,504    | 16    | 6,094   |          |                           |        |
| 15 |                                 |           |       |         |          |                           |        |
| 16 | Totale                          | 160,7895  | 19    |         |          |                           |        |

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- **Procedura di Tukey-Cramer**

Quando si rifiuta l'ipotesi nulla del  $F$  per l'ANOVA, viene stabilito che ci sono almeno due medie significativa-mente diverse tra loro.

Per identificare quali sono i gruppi che effettivamente differiscono tra loro si deve utilizzare una ulteriore procedura che rientra nei cosiddetti metodi dei **confronti multipli**

Tra questi metodi, la procedura di Tukey-Cramer consente di effettuare simultaneamente confronti a due a due tra tutti i gruppi. A questo scopo si deve innanzi tutto calcolare  $c \times (c-1)/2$  differenze tra le medie campionarie di tutti i gruppi  $(\bar{X}_i, j \neq \bar{X}_j)$ , quindi calcolare il **range critico** (*ampiezza critica*) della procedura di Tukey-Cramer

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- **Procedura di Tukey-Cramer**

Se la differenza tra due medie campionarie è superiore al range critico, le corrispondenti medie dei gruppi (popolazioni) sono dichiarate significativamente diverse a livello di significatività  $\alpha$

**Calcolo del range critico per la procedura di Tukey-Cramer**

$$\text{Range critico} = Q_U \sqrt{\frac{MSW}{2} \left( \frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_{j'}} \right)} \quad (10.16)$$

dove  $Q_U$  è il valore critico **superiore della distribuzione del range studentizzato** con  $c$  gradi di libertà al numeratore e  $n-c$  gradi di libertà al denominatore

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- Esempio della procedura di Tukey-Cramer per il caso dei paracadute

| Numeratore   |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Denominatore | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
| .            | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    |
| .            | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    |
| .            | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    |
| 11           | 3.11 | 3.82 | 4.26 | 4.57 | 4.82 | 5.03 | 5.20 | 5.35 |
| 12           | 3.08 | 3.77 | 4.20 | 4.51 | 4.75 | 4.95 | 5.12 | 5.27 |
| 13           | 3.06 | 3.73 | 4.15 | 4.45 | 4.69 | 4.88 | 5.05 | 5.19 |
| 14           | 3.03 | 3.70 | 4.11 | 4.41 | 4.64 | 4.83 | 4.99 | 5.13 |
| 15           | 3.01 | 3.67 | 4.08 | 4.37 | 4.60 | 4.78 | 4.94 | 5.08 |
| 16           | 3.00 | 3.65 | 4.05 | 4.33 | 4.56 | 4.74 | 4.90 | 5.03 |

Fonte: estratto dalla Tavola E.8.

|    | A                                                       | B                  | C                  | D | E                   | F                        | G                       | H              | I                         | J |
|----|---------------------------------------------------------|--------------------|--------------------|---|---------------------|--------------------------|-------------------------|----------------|---------------------------|---|
| 1  | <b>Procedura di Tukey-Kramer per confronti multipli</b> |                    |                    |   |                     |                          |                         |                |                           |   |
| 2  |                                                         |                    |                    |   |                     |                          |                         |                |                           |   |
| 3  |                                                         | <b>Media</b>       | <b>Ampiezza</b>    |   |                     | <b>Differenza</b>        | <b>Std. Error</b>       | <b>Range</b>   |                           |   |
| 4  | <b>Gruppo</b>                                           | <b>Campionaria</b> | <b>Campionaria</b> |   | <b>Confronto</b>    | <b>(valore assoluto)</b> | <b>della differenza</b> | <b>critico</b> | <b>Risultati</b>          |   |
| 5  | 1                                                       | 19.52              | 5                  |   | Gruppo 1 e Gruppo 2 | 4.74                     | 1.1040                  | 4.4712         | Le medie sono diverse     |   |
| 6  | 2                                                       | 24.26              | 5                  |   | Gruppo 1 e Gruppo 3 | 3.32                     | 1.1040                  | 4.4712         | Le medie non sono diverse |   |
| 7  | 3                                                       | 22.84              | 5                  |   | Gruppo 1 e Gruppo 4 | 1.64                     | 1.1040                  | 4.4712         | Le medie non sono diverse |   |
| 8  | 4                                                       | 21.16              | 5                  |   | Gruppo 2 e Gruppo 3 | 1.42                     | 1.1040                  | 4.4712         | Le medie non sono diverse |   |
| 9  |                                                         |                    |                    |   | Gruppo 2 e Gruppo 4 | 3.1                      | 1.1040                  | 4.4712         | Le medie non sono diverse |   |
| 10 | Altri dati                                              |                    |                    |   | Gruppo 3 e Gruppo 4 | 1.68                     | 1.1040                  | 4.4712         | Le medie non sono diverse |   |
| 11 | Livello di significatività                              | 0.05               |                    |   |                     |                          |                         |                |                           |   |
| 12 | Numeratore: d.f.                                        | 4                  |                    |   |                     |                          |                         |                |                           |   |
| 13 | Denominatore: d.f.                                      | 16                 |                    |   |                     |                          |                         |                |                           |   |
| 14 | MSW                                                     | 6.194              |                    |   |                     |                          |                         |                |                           |   |
| 15 | Statistica Q                                            | 4.05               |                    |   |                     |                          |                         |                |                           |   |

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- Procedura di Tukey-Cramer

| Numeratore   |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Denominatore | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
| .            | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    |
| .            | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    |
| .            | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    | .    |
| 11           | 3.11 | 3.82 | 4.26 | 4.57 | 4.82 | 5.03 | 5.20 | 5.35 |
| 12           | 3.08 | 3.77 | 4.20 | 4.51 | 4.75 | 4.95 | 5.12 | 5.27 |
| 13           | 3.06 | 3.73 | 4.15 | 4.45 | 4.69 | 4.88 | 5.05 | 5.19 |
| 14           | 3.03 | 3.70 | 4.11 | 4.41 | 4.64 | 4.83 | 4.99 | 5.13 |
| 15           | 3.01 | 3.67 | 4.08 | 4.37 | 4.60 | 4.78 | 4.94 | 5.08 |
| 16           | 3.00 | 3.65 | 4.05 | 4.33 | 4.56 | 4.74 | 4.90 | 5.03 |

Fonte: estratto dalla Tavola E.8.

|    | A                                                | B           | C           | D | E                   | F                 | G                | H       | I                         | J |
|----|--------------------------------------------------|-------------|-------------|---|---------------------|-------------------|------------------|---------|---------------------------|---|
| 1  | Procedura di Tukey-Kramer per confronti multipli |             |             |   |                     |                   |                  |         |                           |   |
| 2  |                                                  |             |             |   |                     |                   |                  |         |                           |   |
| 3  |                                                  | Media       | Ampiezza    |   |                     | Differenza        | Std. Error       | Range   |                           |   |
| 4  | Gruppo                                           | Campionaria | Campionaria |   | Confronto           | (valore assoluto) | della differenza | critico | Risultati                 |   |
| 5  | 1                                                | 19,52       | 5           |   | Gruppo 1 e Gruppo 2 | 4,74              | 1,1040           | 4,4712  | Le medie sono diverse     |   |
| 6  | 2                                                | 24,26       | 5           |   | Gruppo 1 e Gruppo 3 | 3,32              | 1,1040           | 4,4712  | Le medie non sono diverse |   |
| 7  | 3                                                | 22,84       | 5           |   | Gruppo 1 e Gruppo 4 | 1,64              | 1,1040           | 4,4712  | Le medie non sono diverse |   |
| 8  | 4                                                | 21,16       | 5           |   | Gruppo 2 e Gruppo 3 | 1,42              | 1,1040           | 4,4712  | Le medie non sono diverse |   |
| 9  |                                                  |             |             |   | Gruppo 2 e Gruppo 4 | 3,1               | 1,1040           | 4,4712  | Le medie non sono diverse |   |
| 10 | Altri dati                                       |             |             |   | Gruppo 3 e Gruppo 4 | 1,68              | 1,1040           | 4,4712  | Le medie non sono diverse |   |
| 11 | Livello di significatività                       | 0,05        |             |   |                     |                   |                  |         |                           |   |
| 12 | Numeratore: d.f.                                 | 4           |             |   |                     |                   |                  |         |                           |   |
| 13 | Denominatore: d.f.                               | 16          |             |   |                     |                   |                  |         |                           |   |
| 14 | MSV                                              | 6,094       |             |   |                     |                   |                  |         |                           |   |
| 15 | Statistica Q                                     | 4,05        |             |   |                     |                   |                  |         |                           |   |

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- **Assunzioni alla base del test  $F$  per l'ANOVA a una via**

Prima di applicare un test di ipotesi è sempre necessario valutare se le assunzioni di base del test possono o meno essere ragionevolmente soddisfatte. Le ipotesi alla base del test  $F$  per l'ANOVA a una via sono essenzialmente tre:

- casualità e indipendenza
- normalità
- omogeneità delle varianze

L'ultima ipotesi stabilisce che le varianze nei gruppi sono tra loro uguali ( $\sigma^2_1 = \sigma^2_2 = \dots = \sigma^2_c$ ). Nel caso di campioni con ampiezza simile le inferenze basate sulla distribuzione  $F$  non sono molto influenzate da eventuali differenze tra varianze, al contrario se le ampiezze sono diverse tra loro il problema potrebbe essere serio

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- **Test di Levene per l'omogeneità delle varianze**

Questa procedura inferenziale è stata sviluppata per verificare l'ipotesi nulla  $H_0: \sigma^2_1 = \sigma^2_2 = \dots = \sigma^2_c$  contro l'ipotesi alternativa  $H_1$ : non tutte le varianze sono uguali.

Per verificare tale ipotesi si calcola la differenza in valore assoluto tra ogni osservazione e la mediana campionaria del gruppo di appartenenza e su questi dati si conduce l'ANOVA a una via.

Per l'esempio dei paracadute si considera

| Fornitore 1           | Fornitore 2           | Fornitore 3           | Fornitore 4           |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Mediana = 18.5        | Mediana = 24.5        | Mediana = 22.9        | Mediana = 20.4        |
| $ 18.5 - 18.5  = 0.0$ | $ 26.3 - 24.5  = 1.8$ | $ 20.6 - 22.9  = 2.3$ | $ 25.4 - 20.4  = 5.0$ |
| $ 24.0 - 18.5  = 5.5$ | $ 25.3 - 24.5  = 0.8$ | $ 25.2 - 22.9  = 2.3$ | $ 19.9 - 20.4  = 0.5$ |
| $ 17.2 - 18.5  = 1.3$ | $ 24.0 - 24.5  = 0.5$ | $ 20.8 - 22.9  = 2.1$ | $ 22.6 - 20.4  = 2.2$ |
| $ 19.9 - 18.5  = 1.4$ | $ 21.2 - 24.5  = 3.3$ | $ 24.7 - 22.9  = 1.8$ | $ 17.5 - 20.4  = 2.9$ |
| $ 18.0 - 18.5  = 0.5$ | $ 24.5 - 24.5  = 0.0$ | $ 22.9 - 22.9  = 0.0$ | $ 20.4 - 20.4  = 0.0$ |

# Analisi della varianza (ANOVA) ad una via

- Test di Levene per l'esempio dei paracadute

|    | A                                      | B                | C            | D            | E               | F                                | G             |
|----|----------------------------------------|------------------|--------------|--------------|-----------------|----------------------------------|---------------|
| 1  | <b>Analisi varianza: ad un fattore</b> |                  |              |              |                 |                                  |               |
| 2  |                                        |                  |              |              |                 |                                  |               |
| 3  | <b>RIEPILOGO</b>                       |                  |              |              |                 |                                  |               |
| 4  | <b>Gruppi</b>                          | <b>Conteggio</b> | <b>Somma</b> | <b>Media</b> | <b>Varianza</b> |                                  |               |
| 5  | Fornitore 1                            | 5                | 8,7          | 1,74         | 4,753           |                                  |               |
| 6  | Fornitore 2                            | 5                | 6,4          | 1,28         | 1,707           |                                  |               |
| 7  | Fornitore 3                            | 5                | 8,5          | 1,7          | 0,945           |                                  |               |
| 8  | Fornitore 4                            | 5                | 10,6         | 2,12         | 4,007           |                                  |               |
| 9  |                                        |                  |              |              |                 |                                  |               |
| 10 |                                        |                  |              |              |                 |                                  |               |
| 11 | <b>ANALISI VARIANZA</b>                |                  |              |              |                 |                                  |               |
| 12 | <b>Origine della variazione</b>        | <b>SQ</b>        | <b>gdl</b>   | <b>MQ</b>    | <b>F</b>        | <b>Valore di significatività</b> | <b>F crit</b> |
| 13 | Tra gruppi                             | 1,77             | 3            | 0,59         | 0,2068          | 0,8902                           | 3,2389        |
| 14 | In gruppi                              | 45,648           | 16           | 2,853        |                 |                                  |               |
| 15 |                                        |                  |              |              |                 |                                  |               |
| 16 | Totale                                 | 47,418           | 19           |              |                 |                                  |               |

| Fonte                    | Gradi di libertà | Somme dei quadrati | Medie dei quadrati<br>(varianze) | F     | p-value |
|--------------------------|------------------|--------------------|----------------------------------|-------|---------|
| Tra le catene            | 4                | 6536               | 1634.0                           | 12.51 | 0.0000  |
| All'interno delle catene | 95               | 12407              | 130.6                            |       |         |

# Riepilogo

