Cos'è un insieme
Un **insieme** in Matematica è un raggruppamento di elementi di qualsiasi tipo, di tipo numerico, logico o concettuale, che può essere individuato mediante una caratteristica comune agli elementi che gli appartengono oppure per semplice elencazione degli elementi dell'insieme.

Come scrivere gli insiemi

Generalmente gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto: $\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \ldots..,\ \mathrm{Z}$ mentre per gli elementi si utilizzano le lettere minuscole $\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \ldots..,\ \mathrm{z}$.

Per indicare che un elemento a **appartiene all'insieme** A scriveremo:

$$a \in A$$

e leggeremo: "a appartiene all'insieme A", mentre per indicare che un elemento **non appartiene all'insieme** si utilizza la scrittura:

$$a \notin A$$

Ad esempio indicato con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali allora:

$$5 \in \mathbb{N},\ \ 137 \in \mathbb{N},\ \ -3 \notin \mathbb{N},\ \ \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

Insiemi finiti ed insiemi infiniti

Com'è facilmente intuibile:

- **un insieme si dice finito se contiene un numero finito di elementi**

- **un insieme si dirà infinito se ha infiniti elementi.**

Così ad esempio l'insieme dei numeri dispari o l'insieme dei punti di una retta sono insiemi infiniti mentre l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano o l'insieme delle città italiane sono insiemi finiti.

Nel caso in cui un insieme contiene un solo elemento esso si dirà **insieme unitario**. Tali sono ad esempio:

- l'insieme delle consonanti della parola "*aiuola*";

- l'insieme dei numeri pari compresi tra 13 e 15

Rappresentazione di insiemi per elencazione o estensiva

La **rappresentazione per elencazione** di un insieme, detta anche *rappresentazione estensiva*, è un tipo di rappresentazione che prevede di indicare tutti gli elementi che appartengono ad un insieme semplicemente elencandoli uno ad uno.

Esempi sulla rappresentazione di insiemi per elencazione

1) Sia A l'insieme delle lettere della parola "*bracciale*". Allora:

$$A = \{b,\ r,\ a,\ c,\ i,\ l,\ e\}$$

è la rappresentazione per elencazione dell'insieme A.

Osservate bene che abbiamo riportato le lettere "*a*" e "*c*" una sola volta nella rappresentazione estensiva dell'insieme, anche se compaiono ciascuna due volte nella parola "bracciale"; questo perché, come già detto nella lezione sul concetto di insieme, gli elementi devono essere tutti distinti tra loro.

2) Sia B l'insieme dei numeri naturali pari compresi tra 11 e 23. Scriveremo:

$$B = \{12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ 22\}$$

Rappresentazione di insiemi per caratteristica o intensiva

La **rappresentazione per caratteristica** di un insieme, detta anche *rappresentazione intensiva*, è un tipo di rappresentazione che prevede di individuare tutti gli elementi di un insieme indicando una o più caratteristiche comuni a tutti gli elementi dell'insieme.

Se ci troviamo a dover rappresentare un insieme con molti o addirittura infiniti elementi il modo più corretto di procedere è utilizzare la **rappresentazione per caratteristica** o **rappresentazione intensiva degli insiemi**.

Esempi sulla rappresentazione di insiemi per caratteristica

1) Rappresentare per caratteristica l'insieme A dei fiumi d'Italia. Basta scrivere:

A={x | x è un fiume d'Italia}

che si leggerà: "A è uguale all'insieme degli x tali che x è un fiume d'Italia".

2) La rappresentazione intensiva dell'insieme M dei multipli di 7 sarà:

C={x | x è un multiplo di 7}

3) L'insieme B dei numeri naturali compresi tra 12 e 784 lo rappresenteremo per caratteristica come:

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ 12 \leq x \leq 784\}$$

oppure

B={x | x è un numero naturale compreso tra 12 e 784}

Sottoinsiemi propri e impropri

I **sottoinsiemi** di un insieme E sono definiti come insiemi che contengono una parte degli elementi dell'insieme E, o eventualmente tutti. Un **sottoinsieme proprio** è un sottoinsieme che contiene solo una parte degli elementi di E, mentre un **sottoinsieme improprio** può essere solamente vuoto o coincidere con E.

Definizione di sottoinsieme

Siano A e E due insiemi. Diremo che A è un **sottoinsieme** di E se ogni elemento di A appartiene ad E. Volendoci esprimere in matematichese:

$$A \text{ sottoinsieme di E} \iff \forall x \in A :\ x \in E$$

e leggeremo: per definizione A è un sottoinsieme di E se e solo se, per ogni x appartenente all'insieme A, risulta che x appartiene all'insieme E.

In simboli scriveremo

$$A \subseteq E$$

Possiamo dividere i sottoinsiemi di un insieme in due categorie: i **sottoinsiemi propri** ed i **sottoinsiemi impropri**. Vediamoli nel dettaglio.

Sottoinsiemi propri

Immaginiamo di avere un insieme E, ed un qualsiasi sottoinsieme A costituito da elementi di E.

Diciamo che $A \subseteq E$ è un **sottoinsieme proprio** di E, o che A è contenuto propriamente in E o ancora che A è incluso propriamente in E, se tutti gli elementi di A appartengono ad E e se esiste almeno un elemento di E che non appartiene ad A.

In questo caso useremo una notazione più specifica e scriveremo

$$A \subset E$$

In simboli

$$A \subset E \iff \forall x \in A: \; x \in E \; \wedge \; \exists \overline{x} \in E: \; \overline{x} \notin A$$

dove il simbolo $\wedge$ ha il significato di congiunzione logica "e". In parole povere, un sottoinsieme proprio A di E è un insieme contenuto in E, che però non può coincidere con E.

Esempi di sottoinsiemi propri

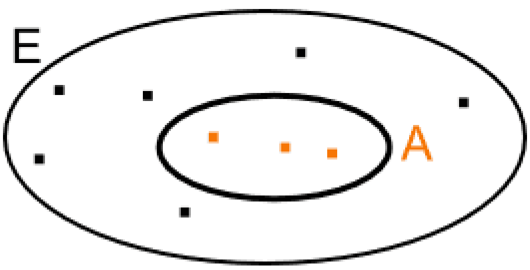
1) Se prendiamo $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, allora sono sottoinsiemi propri di E

$$\{1\}, \; \{3, 4, 5\}, \; \{1, 2, 3, 4\}, \; \{4, 5\}.$$

Non è invece contenuto propriamente in E l'insieme E stesso.

Notiamo che in base alla definizione di sottoinsieme $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ è un sottoinsieme di sé stesso, che però coincide con sé stesso, quindi **non** possiamo scrivere $E \subset E$, perché non esiste alcun elemento di E che non sia contenuto in E (ovviamente!).

2) Se consideriamo due insiemi come quelli in figura



si vede subito che A è contenuto in E, ma non contiene tutti gli elementi di E ed è dunque un suo sottoinsieme proprio: $A \subset E$.

Sottoinsiemi impropri

Questa definizione è un po' più delicata, ma non è comunque difficile: si definisce **sottoinsieme improprio** di E un qualsiasi sottoinsieme A, costituito da elementi di E, tale che ogni elemento appartenente ad E appartiene anche ad A.

In questo caso scriviamo

$$A \subseteq E$$

e diciamo che A è **contenuto impropriamente** in E, o che A è incluso impropriamente in E.

Si capisce subito che un insieme E è sempre sottoinsieme improprio di sé stesso: $E \subseteq E$. In realtà, però, questa non è l'unica possibilità: per fare in modo che una definizione sia consistente in Matematica, essa deve abbracciare qualsiasi caso possibile.

Consideriamo allora il caso dell'insieme vuoto $E = \emptyset$ e rileggiamo la definizione. Possiamo vedere facilmente che anche l'insieme vuoto è un sottoinsieme improprio di sé stesso. Infatti ogni elemento di $\emptyset$, cioè nessun elemento, appartiene ad $E = \emptyset$. Il nulla che appartiene a $\emptyset$appartiene anche ad $E = \emptyset$. ;)

Per far quadrare la definizione si è soliti considerare per convenzione anche l'insieme vuoto come un sottoinsieme improprio di qualsiasi insieme. In questo modo, comunque si considera un insieme E, **abbiamo sempre e solamente due sottoinsiemi impropri**

$$A = \emptyset \quad \text{oppure} \quad A = E$$

Esempi di sottoinsiemi impropri

Dato $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, gli unici due sottoinsiemi impropri sono $A = E$e $A = \emptyset$.

Unione di due insiemi

L'**unione di due insiemi** è un'operazione che restituisce l'insieme contenente tutti gli elementi del primo insieme e del secondo insieme. In termini rigorosi, l'unione di due insiemi $A, B \subset E$è l'insieme definito da

$$A \cup B := \{x \in E \text{ tale che } x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

L'operazione di unione insiemistica è molto diversa rispetto all'intersezione: in quest'ultimo caso dobbiamo prendere gli elementi *comuni* ad entrambi gli insiemi. Nel caso dell'unione, invece, dobbiamo prendere l'insieme degli **elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi**.

.

Esempi di unione tra insiemi

E1) Prendiamo come insieme universo $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$e i sottoinsiemi

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{8, 10\}$

Abbiamo, ad esempio

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \cup D = \{1, 2, 3, 8, 10\}$

$C \cup D = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$

$C \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$.

E2) Consideriamo l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ e P, D rispettivamente l'insieme dei numeri pari e quello dei numeri dispari. Prendiamo poi

$A = \{n \in \mathbb{N} \text{ tale che } n \leq 10\}, \ B = \{15, 16\}$

Allora

$A \cup P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \text{ e gli altri numeri pari}\}$

$A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \text{ e gli altri numeri dispari}\}$

$P \cup D = \mathbb{N}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 16\}$

E3) (Per chi è almeno in quinta liceo!) Dati gli intervalli reali $A = [1, 3]$, $B = [1, 5)$, $C = (4, 10]$, $D = (0, 1]$ abbiamo

$A \cup B = [1, 5)$

$B \cup C = [1, 10]$

$A \cup D = (0, 3]$

Proprietà dell'unione tra insiemi

1) L'unione di un qualsiasi insieme con l'insieme vuoto coincide con l'insieme stesso. Infatti, dato $A \subset E$, è sufficiente osservare che, prendendo elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi, dobbiamo limitarci a prendere gli elementi di A perché $\emptyset$ non ha elementi

$$A \cup \emptyset = A$$

2) L'unione di due insiemi inscatolati coincide con l'insieme più grande. Se abbiamo due insiemi $A, B \subset E$ con $A \subset B$, allora

$$A \cup B = B$$

3) L'unione di un qualsiasi insieme con sé stesso è l'insieme stesso. Per qualsiasi insieme $A \subset E$ risulta che

$$A \cup A = A$$

4) L'unione di un qualsiasi insieme con l'insieme universo coincide con l'insieme universo. Dato $A \subset E$, allora

$$A \cup E = E$$

La precedente proprietà è un semplice applicazione della 2).

5) L'unione tra insiemi è un'operazione insiemistica commutativa. Ossia non ha importanza l'ordine con cui si scrivono gli elementi dell'unione; dati $A, B \subset E$ risulta che

$$A \cup B = B \cup A$$

6) L'unione di due insiemi qualsiasi contiene entrambi gli insiemi. In simboli, dati $A, B \subset E$, abbiamo che

$$A \subseteq A \cup B, \ \ B \subseteq A \cup B$$

7) L'unione è un'operazione associativa. Dati $A, B, C \in E$, possiamo equivalentemente considerare

$$A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$$

Intersezione

L'**intersezione di due insiemi** è un'operazione che permette di individuare l'insieme degli elementi che appartengono ad entrambi gli insiemi dati. Più precisamente: prendiamo due insiemi $A, B \subset E$, dove E indica l'insieme universo, e definiamo l'intersezione tra A, B come

$$A \cap B := \{x \in E \text{ tale che } x \in A \text{ e } x \in B\}$$

È importante notare che, a differenza dell'unione insiemistica, nel caso dell'intersezione tra insiemi bisogna limitarsi a considerare solamente **gli elementi che sono in comune tra i due insiemi**.

Esempi di intersezione tra insiemi

E1) Prendiamo come insieme universo $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e poi consideriamo

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{8, 10\}$

Si vede subito che

$A \cap B = \{3\}$

$A \cap D = \emptyset$

$C \cap D = \emptyset$

$C \cap B = \{3, 5\}$.

E2) Consideriamo l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ e P, D rispettivamente l'insieme dei numeri pari e quello dei numeri dispari. Prendiamo poi

$A = \{n \in \mathbb{N} \text{ tale che } n \leq 10\}$

Allora

$A \cap P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

$A \cap D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$P \cap D = \emptyset$(non esiste alcun numero naturale che sia pari e dispari).

E3) (Per chi è almeno in quinta liceo!) Dati gli intervalli reali

$A=[1,3]\ ,\ B=[1,5)\ ,\ C=(4,10]\ ,\ D=(0,1]$

abbiamo

$A \cap B = [1,3]$

$A \cap C = \emptyset$

$A \cap D = \{1\}$

$B \cap C = (4,5)$

Proprietà dell'intersezione tra insiemi

1) L'intersezione di un qualsiasi insieme con l'insieme vuoto è vuota. Capirne il motivo è facile: comunque si prende un insieme A, l'insieme vuoto $\emptyset$è privo di elementi e dunque non può avere alcun elemento in comune con A

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

2) L'intersezione tra due insiemi inscatolati coincide con l'insieme che è contenuto nell'altro. Se abbiamo cioè due insiemi $A, B \subset E$con $A \subset B$, allora

$$A \cap B = A$$

3) Insiemi disgiunti. Nel caso in cui due insiemi $A, B \subset E$non abbiano elementi in comune, e dunque abbiano **intersezione vuota**

$$A \cap B = \emptyset$$

allora diciamo che A, Bsono insiemi disgiunti.

4) L'intersezione di un qualsiasi insieme con l'insieme con sé stesso è l'insieme stesso. Per qualsiasi insieme $A \subset E$risulta che

$$A \cap A = A$$

5) L'intersezione di un qualsiasi insieme con l'insieme universo coincide con l'insieme dato. Dato $A \subset E$, allora

$$A \cap E = A$$

In realtà la precedente proprietà è un semplice applicazione della 2).

6) L'intersezione tra insiemi è un'operazione commutativa. In parole povere, dati $A, B \subset E$risulta che

$$A \cap B = B \cap A$$

7) L'intersezione di due insiemi qualsiasi è un sottoinsieme di entrambi gli insiemi. Comunque si considerano $A, B \subset E$, abbiamo che

$$A \cap B \subseteq A \quad \text{e} \quad A \cap B \subseteq B$$

8) L'intersezione è un'operazione associativa. Dati $A, B, C \in E$, possiamo equivalentemente considerare

$$A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$$

Insiemi numerici

Abbiamo gia` introdotto l'insieme dei numeri naturali N.

Denotiamo con Z l'insieme degli **interi relativi,** ossia dei numeri**:** 0,1,−1,2,−2,...

Denotiamo con Q l'insieme dei **numeri razionali.**

Ogni numero razionale pu`o essere rappresentato da una frazione della forma $\frac{a}{b}$ con $a,b \in$ Z, b = 06 .

Due frazioni $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{d}$ rappresentano lo stesso numero razionale quando $ad = bc$.

Quindi le frazioni $\frac{-14}{35}$ e $\frac{4}{-10}$ rappresentano lo stesso numero razionale che possiamo indicare piu` semplicemente con $-\frac{2}{5}$.

E spesso utile saper` **confrontare** due frazioni (ossia stabilire quale delle due `e maggiore). Siano $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ due frazioni con denominatore maggiore di zero (ossia $b > 0$ e $d > 0$). Diciamo che

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{se e solo se} \quad ad < bc.$$

Esempio 1.15 Confrontiamo le seguenti coppie di frazioni: $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{13}$ e $-\frac{2}{7}$, $-\frac{3}{11}$.

- $\frac{3}{10} < \frac{4}{13}$ infatti $3 \cdot 13 = 39$, $4 \cdot 10 = 40$ e $39 < 40$.
- $-\frac{2}{7} < -\frac{3}{11}$ infatti $(-2) \cdot 11 = -22$, $(-3) \cdot 7 = -21$ e $-22 < -21$.

Ricordiamo che la **somma** e il **prodotto** di due frazioni si eseguono come segue

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Inoltre si ha: $\frac{a}{b} = 0$ se e solo se $a = 0$.

(Ricordiamo che il denominatore non puo` MAI essere uguale a zero.)

Data una frazione $\frac{a}{b}$ con a = 06 e b = 06 si dice **frazione reciproca** di $\frac{a}{b}$ la frazione $\frac{b}{a}$.

Abbiamo allora che

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Effettuare la **divisione** di $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ (con $c \neq 0$ e $d \neq 0$) significa moltiplicare $\frac{a}{b}$ per il reciproco di $\frac{c}{d}$, cioè:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Esempio 1.16 $$\frac{2}{5} - \frac{3}{4} : \frac{9}{2} = \frac{2}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{5} - \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 6 - 1 \cdot 5}{30} = \frac{12 - 5}{30} = \frac{7}{30}.$$

Esempio 1.17 Vogliamo determinare per quali interi $n > 0$ si ha che la differenza delle due frazioni

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

è minore di $\frac{1}{10}$. Deve essere

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{10},$$

ossia

$$n(n + 1) > 10$$

che è evidentemente verificata per $n \geq 3$.

Ogni numero razionale può essere rappresentato con sviluppo decimale *finito* o *infinito periodico*. Ad esempio:

$$-\frac{1}{4} = -0.25; \qquad \frac{7}{5} = 1.4; \qquad \frac{1}{3} = 0.\overline{3}; \qquad \frac{1}{6} = 0.1\overline{6}.$$

I numeri corrispondenti a sviluppi decimali *infiniti non periodici* come

$$\sqrt{2} = 1.414213562...; \qquad \pi = 3.141592654...$$

sono detti numeri **irrazionali**.

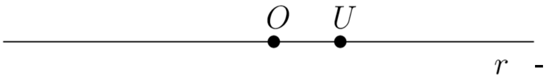
Definizione 1.18 L'unione dei numeri razionali e degli irrazionali costituisce l'insieme dei numeri **reali**, che viene indicato con R.

Una descrizione rigorosa dell'insieme dei numeri reali è al di là degli obiettivi di queste lezioni. Naturalmente si ha

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Dati i numeri reali a e b è sempre definita la somma $a + b$ (la sottrazione $a - b$) e la moltiplicazione $a \cdot b$ (e, se $b \neq 0$, la divisione $a : b$, che spesso si indica con la notazione $\frac{a}{b}$).
In particolare, dato il numero reale a, chiamiamo **opposto** di a il numero $-a$ e, se $a \neq 0$, chiamiamo **reciproco** di a il numero $\frac{1}{a}$.

È spesso comodo visualizzare i numeri reali come "punti di una retta". Per far questo consideriamo la retta r e su di essa fissiamo un punto O (origine), un segmento OU come unità di misura e un verso di percorrenza da considerarsi positivo: in questo modo abbiamo costruito una **retta orientata**.

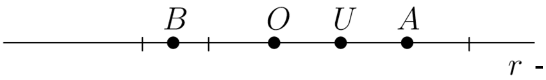


Sia ora a un numero reale non nullo: partendo da O ci muoviamo sulla retta orientata

- se $a > 0$ nel verso positivo della retta, di un segmento OA di lunghezza a;

- se $a < 0$ nel verso negativo della retta, di un segmento AO di lunghezza $-a$.

In entrambi i casi associamo al numero a l'estremo finale del segmento OA. (Al numero 0 associamo il punto O.) Così ad ogni numero reale abbiamo associato un punto della retta orientata. Ad esempio nella figura sottostante al numero 2 associamo il punto A, al numero reale $-\frac{3}{2}$ associamo il punto B.

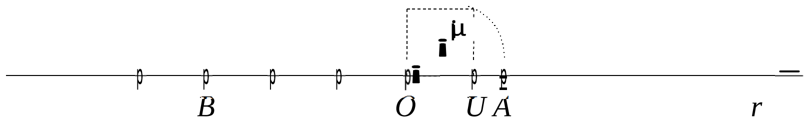


Viceversa, dato un punto A sulla retta orientata

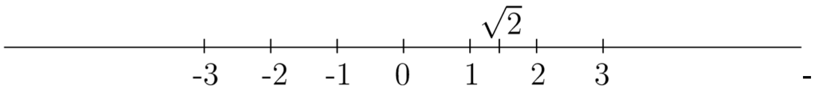
- se A segue O nel verso positivo della retta, associamo ad A il numero reale che esprime la misura del segmento OA rispetto all'unità di misura OU;

- se A precede O nel verso positivo della retta, associamo ad A l'opposto del numero reale che esprime la misura del segmento OA rispetto all'unità di misura OU.

Così ad ogni punto della retta orientata abbiamo associato uno (e un solo) numero reale.
Ad esempio nella figura sottostante al punto U associamo il numero reale 1, al punto A associamo $\sqrt{2}$ (OA è la diagonale del quadrato di lato OU), e al punto B associamo -3.



Questo ci permette di identificare i punti della retta orientata con i numeri reali e quindi spesso si pongono sulla retta direttamente i numeri invece dei punti. In questo contesto i numeri si chiamano **ascisse** dei punti corrispondenti.



La distanza (rispetto all'unità di misura fissata) di un punto A di ascissa a da O è sempre un numero non negativo dato da:

- a se $a \geq 0$;

- $-a$ se $a < 0$.

Abbiamo così introdotto il **modulo** (o valore assoluto) $|a|$ del numero reale a che è così definito:

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{se} \quad a < 0 \\ a & \text{se} \quad a \geq 0 \end{cases}$$

Ad esempio: $|-2| = -(-2) = 2; \quad |3| = 3; \quad \left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}; \quad |0.4| = 0.4; \quad |0| = 0$.

Concludendo $|a|$ rappresenta la distanza del punto di ascissa a dall'origine O, e quindi è sempre $|a| \geq 0$.
In generale, $|a - b|$ rappresenta la lunghezza del segmento di estremi A e B aventi ascisse a e b. Quindi è sempre $|a - b| = |b - a|$.

Esempio 1.19 L'insieme $A = \{a \in \mathbb{R}$ tali che $|a| < 2\}$ è costituito dai numeri reali che sono ascisse di punti a distanza minore di 2 dall'origine. Sono quindi tutti i numeri reali compresi tra -2 e 2. Ossia

$$A = \{a \in \mathbb{R} \text{ tali che } -2 < a < 2\}.$$

Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ della forma di quello dell'esempio precedente è un intervallo. Si chiamano **intervalli** i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}$ tali che $a < x < b\}$ intervallo limitato aperto
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}$ tali che $a \le x \le b\}$ intervallo limitato chiuso
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R}$ tali che $a \le x < b\}$ intervallo limitato chiuso a sinistra (e aperto a destra)
- $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R}$ tali che $x < b\}$ intervallo aperto illimitato (a sinistra) o semiretta
- $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}$ tali che $x \ge a\}$ intervallo illimitato (a destra) o semiretta
- $(a,b]$, $(-\infty,b]$, $(a,+\infty)$ sono definiti analogamente.

L'insieme A dell'esempio precedente `e quindi l'intervallo $(-2,2)$.

4. Proporzioni, scale e percentuali

Consideriamo un treno che viaggia alla velocit`a costante di 110 chilometri all'ora. Ovviamente in 30 minuti percorre 55 chilometri, in due ore 220. E se volessimo sapere in quanto tempo ha percorso 242 chilometri?
Osserviamo che il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato `e costante (purch`e spazi e tempi siano rispettivamente espressi nella stessa unit`a di misura), ossia

$$\frac{110}{60} = \frac{55}{30} = \frac{220}{120} = \dots$$

Quindi, detto T il tempo (in minuti) necessario a percorrere 242 chilometri si ha:

$$\frac{110}{60} = \frac{242}{T} \qquad \text{cio`e} \qquad 110 \cdot T = 60 \cdot 242 \qquad \text{cio`e} \qquad T = \frac{60 \cdot 242}{110} = 132,$$

ossia 2 ore e 12 minuti.

In generale, si usa esprimere l'uguaglianza dei rapporti: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ usando la scrittura

$$a : b = c : d$$

che si chiama **proporzione** e che si legge "*a* sta a *b* come *c* sta a *d*".

Esempio 1.20 La tariffa applicata per chiamate da un telefono pubblico `e a scatti e ogni scatto costa 10 centesimi di Euro. Per chiamate verso la Lituania la durata di ogni scatto `e di 8.2 secondi. Vogliamo calcolare il costo C (in centesimi di Euro) a minuto che quindi soddisfa la proporzione

$$10 : 8.2 = C : 60$$

Ricaviamo quindi che $C = \frac{6000}{82} \simeq 73.17$ centesimi di Euro.

Esempio 1.21 La detrazione fiscale per lavoro dipendente `e di 1150 Euro su base annuale (365 giorni di lavoro). Calcoliamo la detrazione $D$ spettante ad un lavoratore che ha lavorato 87 giorni nel corso dell'anno. Si avra`

$$1150 : 365 = D : 87$$

Ricaviamo quindi che $D = \frac{1\,150 \cdot 87}{365} \simeq 274.1$ Euro.

Nel linguaggio topografico dire che una cartina, o un atlante, "`e in scala 1 : 200000" significa che il rapporto tra le distanze riportate sulla carta e quelle reali `e $\frac{1}{200\,000}$.
Ossia, se su una cartina di questo tipo la distanza tra due paesi `e di 3.5 centimetri, la loro distanza effettiva $D$ (in centimetri!!) `e tale che

$$1 : 200000 = 3.5 : D$$

cio`e $D = 700000$ cm $= 7000$ m $= 7$ km.

Il rapporto tra due grandezze omogenee (ossia dello stesso tipo[1]) `e un numero che non dipende dall'unita` usata per misurare entrambe. Ad esempio, se, in una classe di 25 studenti, 3 hanno l'influenza, possiamo dire che i $\frac{3}{25}$ della classe `e ammalato.
Si usa spesso esprimere il rapporto di grandezze omogenee in forma **percentuale** ossia scrivendo la frazione in modo che il denominatore sia 100. Nell'esempio

$$\frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 0.12.$$

Piu` brevemente si scrive 12% e si dice la percentuale di ammalati `e il 12% (e si legge 12 *per cento*). Non sempre `e possibile esprimere un rapporto esattamente in forma percentuale, talvolta bisogna approssimarlo: ad esempio

$\frac{1}{3}$ = 33% *circa* e si scrive $\frac{1}{3} \simeq 33\%$.

Esempio 1.22 Il fondo di investimento "SoldiPiu`" nel 2000 ha guadagnato il 25%, mentre nel 2001 ha perso il 20%. Vogliamo calcolare quale `e stato il rendimento su base biennale.
Supponiamo che la somma investita all'inizio del 2000 fosse *C*. Alla fine del primo anno la somma `e aumentata del 25% ossia `e

$$C + \frac{25}{100} \cdot C = \frac{5}{4} \cdot C.$$

Nel 2001 quest'ultima `e diminuita del 20% ossia `e diventata:

$$\left(\frac{5}{4} \cdot C\right) - \frac{20}{100}\left(\frac{5}{4} \cdot C\right) = \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{4} \cdot C\right) = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{4} \cdot C\right) = C.$$

Quindi il rendimento biennale `e stato nullo, ossia il bilancio biennale `e stato di perfetto pareggio.

Esempio 1.23 Il fondo di investimento"SoldiPiu` Plus" ha perso nell'ultimo anno il 17.5%. Sapendo che ora le quote in possesso valgono 66000 Euro, quale era il capitale investito l'anno scorso? Detto *C* il capitale iniziale, sappiamo che dopo la perdita del 17.5% il capitale `e diventato

$$C - \frac{175}{1\,000} \cdot C = \frac{33}{40} \cdot C = 66\,000$$

quindi $C = \frac{40}{33} \cdot$ 66000 =80000 Euro.