I **radicali** in Matematica sono numeri definiti mediante radici con indice intero. I radicali possono essere espressi sotto forma di potenze con esponente fratto mediante una semplice regola, e godono di alcune proprietà che ne semplificano il calcolo.

Definizione di radicale

Consideriamo un numero *a* e un numero naturale *n* positivo. Per dare una definizione corretta di **radicale** con indice *n*, o **radice n-esima** di *a*

$$\sqrt[n]{a}$$

dobbiamo distinguere due casi:

- se *n* è un numero dispari, si dice radice *n*-esima di *a* quel numero *b* che, elevato ad *n*, ci restituisce *a*

$$\text{se n dispari}: \quad \sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a, \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- se *n* è un numero pari, consideriamo un numero positivo *a*. Chiamiamo radice *n*-esima di *a* quel **numero positivo** *b* che, elevato ad *n*, ci restituisce *a*

$$\text{se n pari}: \quad \sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a, \quad \text{con } a \geq 0, \ b \geq 0$$

In entrambi i casi *a* si chiama **radicando**, *n* si dice **indice di radice** e √ è detto **simbolo di radice**.

Esempio

La radice terza di 8 è 2. Infatti in accordo con la definizione risulta

$$\sqrt[3]{8} = 2 \ \text{ in quanto } \ 2^3 = 8$$

Condizione di realtà dei radicali

Un'altra condizione posta nella definizione dei radicali con indice pari, detta **condizione di realtà**, prevede che anche il radicando sia maggiore o uguale zero.

In generale, se l'indice della radice è pari allora il radicando deve essere maggiore o uguale a zero; se invece l'indice della radice è dispari allora il radicando può avere segno qualsiasi.

Ad esempio la radice quadrata di un numero negativo non è definita, mentre la radice cubica esiste sempre. Per fissare le idee:

$$\sqrt{-64} \ \text{ non esiste mentre } \ \sqrt[3]{-64} = -4$$

Perché si impone la condizione di realtà nella definizione dei radicali ad indice pari? La si richiede per far sì che la definizione abbia senso. Se riscriviamo la definizione

$$\text{se n pari}: \quad \sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a, \quad \text{con } a \geq 0,\ b \geq 0$$

poiché una qualsiasi potenza con esponente pari non può essere negativa, prendendo *n* pari in $b^n = a$dobbiamo richiedere necessariamente che sia $a > 0$. Tutto qui.

Radicali come potenze con esponente fratto

È utile sapere che esiste un ulteriore modo per indicare una qualsiasi radice n-esima. Vale infatti la seguente **relazione tra radicali e potenze**:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 1$$

Tramite la quale possiamo esprimere la radice ennesima tramite **potenze con esponente razionale**. Possiamo generalizzare la precedente formula come:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \text{con } n, m \in \mathbb{N}$$

Se volessimo esprimere a parole questa relazione, potremmo dire che l'indice del radicale diventa il denominatore dell'esponente della potenza, mentre l'esponente del radicando diventa il numeratore della potenza.

Attenzione agli esponenti negativi

Per definizione si pone:

$$a^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Ad esempio

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{8}$$

Somma e differenza di radicali

Le operazioni di addizione e sottrazione tra radicali possono avvenire solo se essi sono **simili**, cioè se hanno stesso indice e stesso radicando e, in tal caso, la somma/differenza sarà un nuovo radicale che avrà come radice la stessa radice e come coefficiente la somma dei coefficienti.

Vediamo un esempio:

$$3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

Riordiniamo l'espressione avvicinando i termini simili

$$3\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4\sqrt{3}$$

Sommiamone i coefficienti:

$$(3-5+1)\sqrt{2}+(2+4)\sqrt{3}$$

ossia

$$-\sqrt{2}+6\sqrt{3}$$

e, in definitiva

$$3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+\sqrt{2}=-\sqrt{2}+6\sqrt{3}$$

Prodotto di radicali con lo stesso indice

Il prodotto di due radici che hanno lo stesso indice è una radice che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi:

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

Esempio

$$\sqrt[3]{8\times 27}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{27}=2\times 3=6$$

Quoziente di due radicali con lo stesso indice: il quoziente di due radici aventi lo stesso indice è una radice che ha per radicando il quoziente dei radicandi e per indice lo stesso indice.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad b \neq 0$$

Leggendo la formula al contrario: la radice del quoziente è il quoziente delle radici.

Proprietà invariantiva dei radicali

Moltiplicando per uno stesso valore l'indice della radice e l'esponente del **radicando non negativo**, il risultato della radice non cambia.

In formule matematiche avremo:

$$\sqrt[n\cdot s]{a^{m\cdot s}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \forall a \geq 0$$

La formula può anche essere letta al contrario, da destra a sinistra, se risulta necessario. Lo studente più diligente si chiederà come mai è richiesto che il radicando sia non negativo; per capirne il motivo basta osservare che con radicandi negativi incapperemmo in possibili contraddizioni

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{(-2)^2} \neq \sqrt[3]{-2}$$

Grazie alla proprietà invariantiva dei radicali potremo moltiplicare/dividere tra loro radici con indici diversi, il trucco è fare in modo di ricondurci a radici che hanno lo stesso indice, ecco come fare!

Riduzione di due radicali allo stesso indice

Una tecnica utilissima che ci permette di moltiplicare e dividere tra loro due radicali con indici di radice diversi è la cosiddetta riduzione allo stesso indice. Prima vediamo il metodo a parole, poi lo applichiamo ad un esempio.

- Consideriamo due radici con due indici distinti $\sqrt[n]{a}, \quad \sqrt[m]{b}$.

- Calcoliamo il minimo comune multiplo tra *n* ed *m*. Esso diventerà l'indice comune a tutte le radici.

- Dividiamo il nuovo indice per i rispettivi indici delle radici, ed eleviamo i radicandi ai rispettivi quozienti.

In questo modo otterremo nuove radici equivalenti a quelle date.

Esempio

Proponiamoci di ridurre allo stesso indice i radicali

$\sqrt[3]{8}, \quad \sqrt[4]{16}$.

Il minimo comune multiplo tra 3 e 4 è 12 e diventerà il nuovo indice delle radici:

$\sqrt[12]{\ldots}, \quad \sqrt[12]{\ldots}$

Dividiamo 12 per 3 e otteniamo 4, che è l'esponente del primo radicando. Dividiamo 12 per 4 e ricaviamo 3, che è l'esponente del secondo radicando

$$\sqrt[12]{8^4}, \qquad \sqrt[12]{16^3}$$

Moltiplicazione e divisione di radicali con indici diversi

Per effettuare il prodotto e il quoziente di radici con indici diversi le riduciamo allo stesso indice, dopodiché utilizzeremo le proprietà per la moltiplicazione e divisione di radicali con lo stesso indice.

Esempio

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[2]{3} =$$

riduciamo i radicali allo stesso indice

$$= \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{27} =$$

utilizzando la proprietà dei radicali per la moltiplicazione che abbiamo visto in precedenza

$$= \sqrt[6]{4 \times 27} = \sqrt[6]{108}$$

Potenza di un radicale

Vale la relazione

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \forall a \geq 0, \text{ con } n, m \in \mathbb{N}$$

Possiamo quindi dire che la potenza *m*-esima di una radice che ha indice *n* e radicando *a* è una radice che ha per indice *n* e per radicando la potenza a^m.

Radice di radice

La radice *m*-esima di una radice *n*-esima con radicando *a* è una radice che ha per indice il prodotto degli indici e per radicando *a*:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a} \quad \text{con } m, n \in \mathbb{N}$$

Esempi

$$(\sqrt[3]{3})^2 = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[12]{3}$$