POTENZE

Le potenze sono moltiplicazioni ripetute, individuate da due numeri detti base ed esponente. Scriverean, ossia elevare il numero a (la base) a potenza con esponente n, significa moltiplicare la base per se stessa n volte.

Per esempio se doveste scrivere 2 moltiplicato per se stesso 5 volte, sarebbe scomodissimo scrivere ogni volta

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

L'elevamento a potenza serve per abbreviare questo tipo di scrittura: scriviamo normalmente il numero che vogliamo moltiplicare per sé stesso, e in alto a destra riportiamo il numero di volte per cui vogliamo moltiplicarlo con se stesso. In riferimento all'esempio, scriveremo quindi

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

Definizione di potenza di un numero

Chiamiamo potenza n-esima di un numero a la moltiplicazione di a per sé stesso n volte. Tale operazione si indica con $a^n$, dove a si dice base e n si dice esponente.

Qui di seguito spiegheremo in sintesi tutti i possibili casi per l'elevamento a potenza a seconda chea ed n appartengano ai vari insiemi numerici.

Quali valori può assumere l'esponente di una potenza?

Per i numeri naturali è semplice:

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 2 \cdot 2$$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Cosa succede se l'esponente di una potenza è zero?

$$\text{Se } a \text{ diverso da zero, allora } a^0 = 1$$

L'elevamento di qualunque base diversa da zero alla potenza zero (potenza zeresima) dà come risultato 1.

E se l'esponente è un numero naturale e la base della potenza è negativa?

Nel caso delle potenze con base negativa ci si comporta secondo la definizione, e si moltiplica la base per sé stessa tante volte quante lo chiede l'esponente

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$$

Si noti che possiamo dire subito qualcosa in più riguardo al segno del risultato, che deriva direttamente dalla regola dei segni per la moltiplicazione:

- se la base è negativa e l'esponente è dispari, allora la potenza avrà segno negativo;

- se la base è negativa e l'esponente è pari, allora la potenza avra segno positivo.

E se l'esponente della potenza è negativo?

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Elevare a potenza con esponente negativo significa prendere il reciproco della base con l'esponente cambiato di segno.

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$
$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$
$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$
$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

Potenze e radici - esponenti fratti (razionali)

Se  l'esponente n è una frazione, cioè un numero razionale del tipo , $\frac{p}{q}$ allora

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

In sostanza, se si ha una potenza ad esponente razionale (cioè l'esponente è una frazione), avremo che il denominatore di quella frazione è l'indice della radice, mentre il numeratore è l'esponente dell'argomento. In particolare

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

Qualche esempio con i numeri:

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3}$$

$$2^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{2^5}$$

Tabella di riepilogo sui vari tipi di potenze

| | |
|---|---|
| Potenze | $a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a$ ($n$ volte)<br>$a^0 = 1$ se $a \neq 0$ |
| Potenze con base negativa | $(-a)^n = a^n$ se $n$ pari<br>$(-a)^n = -a^n$ se $n$ dispari |
| Potenze con esponente negativo | $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ |
| Potenze con esponente razionale ($p, q$ interi) | $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ |
| Potenze con esponente irrazionale (definite solo per $a > 0$) | $a^s = e^{\log(a^s)} = e^{s\log(a)}$ |

PROPRIETÀ DELLE POTENZE

Le proprietà delle potenze sono semplici proprietà che legano le potenze alle principali operazioni algebriche e che permettono di semplificare notevolmente i calcoli, in qualsiasi ambito della Matematica.

Le proprietà delle potenze, infatti, servono spesso e volentieri per calcolare il valore delle espressioni numeriche e letterali, per risolvere equazioni, disequazioni...

Proprietà delle potenze e operazioni algebriche

riportiamo la tabella con tutte le proprietà delle potenze.

| | |
|---|---|
| Prodotto di potenze con la stessa base | $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ |
| Quoziente di potenze con la stessa base | $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ |
| Potenza di potenza | $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ |
| Prodotto di potenze con lo stesso esponente | $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ |
| Quoziente di potenze con lo stesso esponente | $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ |
| Somma o differenza di potenze | Niente, in generale |

1) Il prodotto di due potenze aventi la stessa base è una potenza avente come base la stessa base e come esponente la somma degli esponenti.

In simboli:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Cosa succede se abbiamo un prodotto di più di due potenze aventi la stessa base? Nulla di particolare, applichiamo questa regola a tutte le potenze coinvolte nella moltiplicazione:

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p \cdot a^q \cdot a^r \cdot a^s = a^{m+n+p+q+r+s}$$

Vediamo qualche esempio con i numeri:

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$$

$$3^5 \cdot 3^3 = 3^{5+3} = 3^8$$

$$\pi^2 \cdot \pi^9 = \pi^{2+9} = \pi^{11}$$

$$2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^6 = 2^{2+3+6} = 2^{11}$$

2) Il quoziente di due potenze aventi la stessa base è una potenza avente come base la stessa base e come esponente la differenza degli esponenti.

In simboli:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Alcuni esempi con i numeri:

$$\frac{2^2}{2^3} = 2^{2-3} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2$$

$$\frac{\pi^2}{\pi^9} = \pi^{2-9} = \pi^{-7}$$

Non è possibile dedurre questa proprietà da quella relativa al prodotto? Sì, è possibile, e capire come fare vi permetterà di memorizzare solo una proprietà invece di due e di essere sempre in grado di dedurre la proprietà riguardante il quoziente di potenze con uguale base, a partire dalla proprietà riguardante il prodotto di potenze.

Ricaviamo la proprietà delle potenze numero 2) a partire dalla 1)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$$

dove nel terzo passaggio abbiamo utilizzato la definizione di potenza con esponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

e nel passaggio successivo la proprietà per il prodotto di due potenze, cioè la 1).

3) La potenza di una potenza è ancora una volta una potenza avente come base la stessa base e come esponente il prodotto degli esponenti

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Qualche esempio:

$$\left(2^2\right)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$$

$$\left(3^3\right)^3 = 3^{3 \cdot 3} = 3^9$$

$$\left(5^9\right)^5 = 5^{9 \cdot 5} = 5^{45}$$

Perché vale questa proprietà?

$$\left(2^2\right)^3$$

Per la definizione di potenza che abbiamo dato, calcolare una potenza significa moltiplicare la base per se stessa un numero di volte pari all'esponente. Applicando la definizione in questo caso avremmo:

$$\left(2^2\right)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6 = 2^{2 \cdot 3}$$

4) Il prodotto di potenze aventi basi diverse ma esponenti uguali è una potenza che come base ha il prodotto delle basi e come esponente lo stesso esponente.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Questa proprietà si estende senza problemi al caso di prodotto di più di due potenze con basi diverse, ma esponenti uguali:

$$a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n \cdot e^n = (a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e)^n$$

Anche qui vediamo una manciata di esempi numerici

$$2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3$$

$$5^7 \cdot 12^7 = 60^7$$

$$3^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot 5^{-1} = (3 \cdot 2 \cdot 5)^{-1} = 30^{-1} = \frac{1}{30}$$

Nella proprietà appena esposta abbiamo anche usato le potenze a esponente negativo, dunque capite bene come quella proprietà si estenda al quoziente. Infatti...

5) Il quoziente di potenze aventi basi diverse e uguali esponenti è una potenza che come base ha il quoziente delle basi e come esponente lo stesso esponente.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Con i numeri:

$$\frac{2^3}{3^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$
$$\frac{5^5}{7^5} = \left(\frac{5}{7}\right)^5$$
$$\frac{63^3}{61^3} = \left(\frac{63}{61}\right)^3$$