

Definizione di monomio

Un monomio è un'espressione matematica che consiste in un prodotto di fattori qualsiasi, siano essi numerici o letterali. I fattori letterali hanno per esponente un [numero naturale](#).

Un esempio?

$$4x^2$$

Il fattore numerico (4) prende il nome di [coefficiente](#) o parte numerica, mentre il fattore letterale (x^2) costituisce la cosiddetta parte letterale.

La definizione di monomio presenta tre diversi ingredienti:

- 1) la parte numerica può essere costituita da un qualsiasi numero;
- 2) la parte numerica deve essere moltiplicata per la parte letterale;
- 3) nella parte letterale possono esserci solamente moltiplicazioni.

Esempi sui monomi

$$3x^2yz^3$$

è un monomio in cui 3 è il coefficiente numerico mentre x^2yz^3 è la parte letterale.

$$-abc$$

è un monomio che ha per coefficiente numerico -1 (che è un [numero relativo](#)) mentre abc è la parte letterale.

OPERAZIONI TRA MONOMI

Le operazioni tra monomi sono le principali operazioni algebriche (somma, sottrazione, prodotto, divisione, elevamento a potenza) riferite al calcolo letterale con i [monomi](#).

Come svolgere le operazioni con i monomi

Le operazioni tra monomi su cui ci concentreremo sono le seguenti:

- 1) somma di monomi;
- 2) moltiplicazione tra monomi;
- 3) potenza di un monomio;
- 4) divisione tra monomi.

.

Somma di monomi

Diciamo sin da subito che è possibile sommare solamente monomi simili. In particolare la somma di monomi simili è un monomio che ha

- come [coefficiente numerico](#): la somma dei coefficienti numerici dei monomi della somma;

- come parte letterale: la stessa parte letterale dei monomi di partenza.

Se i monomi non sono simili non è possibile effettuare la somma e lasceremo gli addendi così come sono scritti.

Esempio

$$xy + 3xy + \frac{1}{2}xy - 2xy$$

I monomi che compongono l'espressione sono simili perché hanno tutti la stessa parte letterale, quindi possiamo sommare i coefficienti numerici:

$$\left(1 + 3 + \frac{1}{2} - 2\right) xy$$

Effettuiamo le operazioni dentro la parentesi e otteniamo

$$\left(\frac{2 + 6 + 1 - 4}{2}\right) xy = \frac{5}{2}xy$$

Facile, no? :) Ripetiamo ancora una volta la somma tra due monomi è possibile se e solo se i monomi sono simili, in caso contrario i termini rimarranno così come sono.

Se volete approfondire e per consultare altri esempi, potete leggere qui: [somma e differenza di monomi](#).

Prodotto tra monomi

A differenza della somma, il prodotto tra monomi è sempre possibile. Moltiplicare due monomi tra loro vuol dire prendere il monomio che ha:

- coefficiente numerico dato dal prodotto dei coefficienti numerici;

- parte letterale data da tutte le lettere dei singoli monomi, ciascuna con esponente uguale alla somma degli esponenti delle singole lettere.

La moltiplicazione tra monomi è più difficile a dirsi che a farsi, fidatevi! ;)

Esempio

$$2x^3y \cdot 3xy^2z$$

Il monomio prodotto ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti

$$2x^3y \cdot 3xy^2z = 2 \times 3 \dots = 6 \dots$$

Ora calcoliamo la parte letterale del monomio prodotto. Essa conterrà sicuramente le lettere x, y, z, ma noi siamo interessati anche agli esponenti:

$$2x^3y \cdot 3xy^2z = 6x^?y^?z^?$$

Cosa dobbiamo mettere al posto dei punti interrogativi? L'esponente della lettera x è data dalla somma dell'esponente della x presente nel primo fattore e la x nel secondo fattore, quindi $3+1=4$

$$2x^3y \cdot 3xy^2z = 6x^4y^?z^?$$

La lettera y ha esponente $1+2=3$ dove 1 e 2 sono rispettivamente l'esponente della lettera y presente nel primo fattore e secondo fattore

$$2x^3y \cdot 3xy^2z = 6x^4y^3z^?$$

L'esponente di z è dato da $0+1=1$ dove 0 e 1 sono gli esponenti della z nel primo e nel secondo monomio fattore

$$2x^3y \cdot 3xy^2z = 6x^4y^3z^1 = 6x^4y^3z$$

A ben vedere non abbiamo fatto nulla di particolare, infatti abbiamo solamente applicato le [proprietà delle potenze](#).

Potenza di un monomio

Per elevare alla potenza n-esima un monomio bisogna elevare a potenza il coefficiente e moltiplicare per n gli esponenti dei fattori letterali. In pratica si tratta di usare la proprietà per le [potenze di potenze](#).

Esempio

$$(-2x^2yz)^2 = (-2)^2 x^{2 \cdot 2} y^{1 \cdot 2} z^{1 \cdot 2} = 4x^4y^2z^2.$$

Divisione tra monomi

La divisione tra monomi richiede la condizione di divisibilità tra monomi.

Un monomio (dividendo) si dice divisibile per un secondo monomio (divisore) se esiste un ulteriore monomio (quoziente) che moltiplicato per il secondo dà il primo.

Con tale ipotesi possiamo definire la divisione tra due monomi divisibili e diversi da zero. Esso è un monomio che ha:

- coefficiente numerico dato dal quoziente dei coefficienti numerici;
- parte letterale data dal rapporto delle lettere omonime tra loro. Per gli esponenti ci si comporta ancora una volta applicando le proprietà delle potenze.

Esempio

$$3x^3y^2z : 3xy^2$$

La parte letterale del monomio quoziente è $3:3=1$, mentre la parte letterale si ricava nel modo seguente:

$$3x^3y^2z : 3xy^2 = x^{3-1}y^{2-2}z^{1-0} = x^2y^0z = x^2z.$$

sono polinomi:

$$11x^2y + 3xy^{-1} + 7, \quad \frac{1}{1+x^2}, \quad x^{6/5} - 6ax + 1.$$

È ben noto come si fanno la somma e il prodotto di due polinomi. Ricordiamo la procedura su qualche esempio:

Esempi 3.5

$$\bullet (3a^2x^4 - x^3 + 5x^2y) + (2x^3 - 4x^2y + x^2) = 3a^2x^4 + x^3 + x^2y + x^2$$

$$\bullet x(xy + 2) = x^2y + 2x$$

$$\bullet (x - 2) \cdot (x - y) = x \cdot (x - y) - 2 \cdot (x - y) = x^2 - xy - 2x + 2y$$

$$\bullet (3a^2 - 5y) \cdot (2x^2 + b) = (3a^2 - 5y) \cdot 2x^2 + (3a^2 - 5y) \cdot b =$$

$$= 3a^2 \cdot 2x^2 - 5y \cdot 2x^2 + 3a^2 \cdot b - 5y \cdot b = 6a^2x^2 - 10x^2y + 3a^2b - 5by$$

NOTA Somma e prodotto di polinomi vengono quindi svolti pensando ai polinomi come espressioni. Ciò significa che, se diciamo che due polinomi sono uguali, devono essere uguali i valori che si ottengono dai due polinomi quando alle lettere si sostituiscono numeri e, per essere sicuri che questo succeda, dobbiamo interpretare i monomi come prodotti di potenze, i polinomi come loro somma e operare sui polinomi usando le proprietà che valgono per la somma e il prodotto di numeri:

- le proprietà commutativa e associativa della somma,
- le proprietà commutativa e associativa del prodotto, • la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

Prodotti notevoli

Ricordiamo:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Un'applicazione dei prodotti notevoli è la cosiddetta "razionalizzazione del denominatore", di cui riportiamo qui un esempio

$$\frac{2}{3 - \sqrt{5}} = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5}) \cdot (3 + \sqrt{5})} = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{(3 + \sqrt{5})}{2}$$

Ovviamente, se serve, si può applicare la procedura a rovescio. Vedremo subito un'altra applicazione.

Scomposizione in fattori

Si scompone un polinomio in fattori quando lo si esprime come prodotto di polinomi di grado più basso. Non tutti i polinomi sono scomponibili in fattori: ad esempio $a^2 + 1$ non si può scrivere come prodotto di due polinomi di primo grado a coefficienti reali.

Inoltre anche quando un polinomio è esprimibile come prodotto di due (o più) altri polinomi di grado inferiore, non sempre è facile individuare tali polinomi fattori, poiché non esistono regole generali che permettano di effettuare sempre la scomposizione: ad esempio, come scomporre il polinomio $x^4 - x - 1$?

Comunque, da quanto abbiamo appena visto si deducono due possibili metodi di scomposizione: • il raccoglimento a fattor comune: ad esempio

$$x^2y + 2x = x(xy + 2):$$

(notiamo che abbiamo solo letto a ritroso l'uguaglianza scritta nel secondo degli esempi 3.5); oppure:

$$x^2 - xy - 2x + 2y = x \cdot (x - y) - 2 \cdot (x - y) = (x - 2) \cdot (x - y);$$

• la scomposizione mediante prodotti notevoli: ad esempio

$$4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1),$$

oppure

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

La scomposizione in fattori ha diversi usi: ne vedremo un'applicazione importante nelle lezioni sulle equazioni e sulle disequazioni. Inoltre la scomposizione è un metodo per:

• fare qualche conto più rapidamente: ad esempio

$$463^2 - 4 \cdot 231^2 = 463 + 462 = 925,$$

poiché la prima espressione è una differenza di quadrati, che si riscrive

$$(463 + 2 \cdot 231)(463 - 2 \cdot 231) = (463 + 462)(463 - 462)$$

• semplificare alcune espressioni (che possono non essere polinomi e anche non dare luogo, una volta semplificate, a polinomi): ad esempio,

$$\text{se } x + y \neq 0, \quad \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{(x - y) \cdot (x + y)}{x + y} = x - y;$$

oppure

$$\text{se } x \geq 0, \quad \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - 1.$$

Polinomi in una variabile

Nel seguito ci limiteremo a considerare polinomi in una variabile, come ad esempio:

$$x^2 + \sqrt{3}, \quad 3x^4 - \frac{2}{3}x + \pi, \quad -2x^3 + 5x^2 - 3x - 4.$$

Per parlare di questi polinomi in maniera generale è opportuno poter indicare i coefficienti con lettere (solitamente $a, b, \dots$) alle quali si pensa di dare dei valori arbitrari ma fissati (costanti), mentre si pensa la x come variabile, suscettibile di assumere qualunque valore.

Ad esempio, il generico polinomio di grado 3 potrà essere indicato con la scrittura:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

ove $a \neq 0$.

Talora denoteremo un polinomio nella variabile x con $P(x)$ e utilizzeremo il simbolo $P(k)$ per indicare il valore che si ottiene eseguendo su un numero reale k le operazioni indicate nel polinomio. Ad esempio, se $P(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x - 4$, allora $P(2) = -2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 4 = -6$.

Terminologia

- Se il polinomio è scritto come somma di monomi aventi tutti grado diverso rispetto a x , il monomio di grado 0 si dice termine noto.
- Il polinomio nullo (che sommato a ogni altro polinomio lo lascia invariato) si indica con 0.
- Due polinomi si dicono uguali se hanno uguali i coefficienti dei termini di ugual grado.

Esempio 3.6 Il polinomio $P(x) = (a+b)x^3 + bx^2 + 3x + b - c$ (considerato come polinomio nella variabile x):

- ha grado 3 se $a + b \neq 0$;
- ha termine noto $b - c$;
- è uguale a $2x^2 + 3x + 1$ se e solo se

$$a + b = 0 \quad \text{e} \quad b = 2 \quad \text{e} \quad b - c = 1,$$

cioè se e solo se: $a = -2$ e $b = 2$ e $c = 1$;

- non è uguale a $2x^2 + 4x + 1$ per nessun valore di a, b, c poiché il coefficiente di x in $P(x)$ è 3 e non 4.

Divisione di polinomi

Si dice che un polinomio $P(x)$ è divisibile per un polinomio $D(x) \neq 0$ se esiste un polinomio $Q(x)$ tale che

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x).$$

$P(x)$ si chiama dividendo, $D(x)$ si chiama divisore, $Q(x)$ si chiama quoziente nella divisione di $P(x)$ per $D(x)$.

Ad esempio, prendendo come dividendo $x^2 - 4$ e come divisore $x + 2$ si ha come quoziente $x - 2$, poiché

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2).$$

Dati due polinomi (diversi dal polinomio nullo) non è sempre vero che quello di grado maggiore è divisibile per l'altro; ad esempio $P(x) = x^2$ non è divisibile per $D(x) = x + 1$; risulta però

$$x^2 = (x + 1)(x - 1) + 1.$$

In generale vale il

Teorema 3.7 Dati due polinomi $P(x)$ e $D(x)$, con $D(x) \neq 0$, esistono (e sono unici) due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x) \text{ con il grado di } R(x) \text{ minore del grado di } D(x).$$

$R(x)$ prende il nome di resto nella divisione di $P(x)$ per $D(x)$.

La formula del teorema 3.7 si può riscrivere dicendo che esistono $Q(x)$ e $R(x)$ tali che

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \quad \text{con il grado di } R(x) \text{ minore del grado di } D(x).$$

Quindi ad esempio

$$\frac{x^2}{x + 1} = (x - 1) + \frac{1}{x + 1}.$$

REGOLA DI RUFFINI

La regola di Ruffini è una regola di scomposizione dei polinomi grazie alla quale è possibile effettuare la scomposizione di polinomi di grado qualsiasi sotto opportune ipotesi espresse dall'omonimo teorema di Ruffini.

L'importanza del metodo di Ruffini riguarda il fatto che esso funziona anche laddove le tecniche di scomposizione derivanti dai [prodotti notevoli](#) falliscono. Ne parliamo nel dettaglio qui di seguito, proponendo il metodo e mostrando come applicarlo negli esercizi mediante opportuni esempi.

La regola di Ruffini consente di ottenere una scomposizione in fattori di $P(x)$ del tipo

$$P(x) = Q(x)R(x)$$

dove $Q(x)$ e $R(x)$ sono polinomi rispettivamente di grado 1 e $(n-1)$.

La morale è questa: se avete un polinomio scomponibile di grado abbastanza alto (da 3 in su) e dovete scomporlo, Ruffini vi fornirà un metodo infallibile. Pur trattandosi di un metodo sicuro, ci sono però due avvertenze da tenere in considerazione:

- Ruffini non conviene per i polinomi scomponibili di grado 2, perché tutte le altre tecniche di scomposizione sono nettamente più rapide;
- se individuate un'alternativa a Ruffini, usatela. Se vi prefiggete l'obiettivo di scomporre un polinomio scomponibile e di grado maggiore o uguale a 3, e se individuate un altro metodo per effettuare la scomposizione, preferite sempre quest'ultimo. Ruffini è una macchina da guerra e funziona sempre, ma è un metodo certamente più dispendioso rispetto alle altre tecniche di scomposizione.

Come si scompone un polinomio con Ruffini?

Ora che sappiamo perché bisogna e conviene imparare la scomposizione di Ruffini, non ci resta che vedere come procedere.

Partiamo da un esempio e vediamo ogni singolo passaggio della regola generale: consideriamo il polinomio

$$P(x) = x^3 + 2x - 3$$

1) Ricerca di una radice per applicare la regola di Ruffini

Cerchiamo una radice particolare del polinomio. Per farlo consideriamo la [frazione](#) data dal termine noto diviso il [coefficiente direttivo](#), ossia il termine di grado massimo.

In generale, c'è un teorema dell'Algebra secondo cui dato un polinomio di grado n

$$G(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

per cercarne una radice particolare possiamo scrivere la frazione data dal rapporto tra termine noto ed il coefficiente del termine di grado massimo

$$\frac{a_0}{a_n}$$

Una sua radice particolare sarà della forma

$$\frac{p}{q}$$

dove p è un [divisore](#) del termine noto a0 e q è un divisore del coefficiente del termine di grado massimo an.

Nota bene: il risultato appena esposto è un teorema conosciuto con il nome di teorema delle radici razionali.

Nel nostro esempio il termine noto è -3 e il coefficiente di x³ è 1, dunque cerchiamo i candidati al ruolo di radice del polinomio tra i divisori di

$$\frac{-3}{1} = -3$$

cioè

$$\{-1, 1, -3, 3\}$$

Come facciamo a capire quale di questi valori è una radice del polinomio? Consideriamo il polinomio P(x) e sostituiamo, separatamente, i valori al posto di x. Se la valutazione del polinomio risulta essere nulla, allora avremo trovato una radice; in caso contrario dovremo passare al valore successivo.

Nell'esempio abbiamo

$$P(x) = x^3 + 2x - 3$$

e dunque proviamo sostituire al posto di x, uno alla volta, i valori {-1, 1, -3, 3}.

Se x=-1, abbiamo

$$P(-1) = (-1)^3 + 2(-1) - 3 = -1 - 2 - 3 = -6$$

per avere una radice la valutazione del polinomio deve risultare zero, quindi x=-1 non è una radice del polinomio.

Proviamo con x=1

$$P(1) = (1)^3 + 2(1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$$

dato che la valutazione di P(x) in x=1 vale zero, abbiamo trovato una radice: x=1.

2) Applicazione del metodo: tabella di Ruffini

Ora procediamo con la regola di Ruffini: scriviamo una tabella fatta nel modo seguente

	coeff. del termine di grado massimo (3)	coeff. del termine di grado 2	coeff. del termine di grado 1	coeff. del termine di grado 0, termine noto
	1	0	2	-3
radice del polinomio	1			

Come vedete, nella prima riga compaiono i coefficienti dei termini del polinomio ordinati per grado. Nel nostro esempio mancava il termine di grado 2, quindi abbiamo aggiunto uno zero. La riga si conclude con il termine noto.

Nella seconda riga troviamo come primo elemento la radice del polinomio che abbiamo trovato inizialmente.

Fatto ciò possiamo dare il via all'applicazione della regola di Ruffini completando la tabella appena disegnata.

Nella terza ed ultima riga riportiamo in prima posizione il coefficiente del termine di grado massimo.

Procediamo poi con la compilazione della seconda e della terza riga. Moltiplichiamo l'elemento della terza riga (l'1 blu) per la radice (l'1 rosso) e riportiamo il risultato (l'1 verde) nella seconda riga, sulla colonna successiva. A questo punto, sulla seconda colonna, sommiamo il coefficiente della prima riga (lo 0) con l'elemento presente sulla seconda riga (l'1 verde), e riportiamo il risultato sulla terza riga.

	1	0	2	-3
1	1	$1 \cdot 1 = 1$		
	1	$0 + 1 = 1$		

Reiterando il procedimento arriviamo all'ultimo elemento a destra sulla terza riga, che rappresenta il resto della scomposizione. Se abbiamo effettuato i calcoli correttamente, allora questo termine deve valere necessariamente zero ed avremo una situazione come quella rappresentata nella figura seguente:

	coeff. del termine di grado massimo (3)	coeff. del termine di grado 2	coeff. del termine di grado 1	coeff. del termine di grado 0, termine noto
	1	0	2	-3
radice del polinomio → 1	1	$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot 3 = 3$
	1	$0 + 1 = 1$	$2 + 1 = 3$	$3 - 3 = 0$

il resto
deve essere
0!

3) Come si passa dalla tabella alla scomposizione del polinomio $P(x)=Q(x)R(x)$?

Ci viene in soccorso il teorema di Ruffini, il quale afferma che un polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x-a)$ se e solo se $P(a)=0$, ovvero se e solo se a è una radice del polinomio.

Cosa vuol dire? Molto semplicemente che, se abbiamo trovato una radice a del polinomio $P(x)$, esso sarà divisibile per il [binomio](#) $(x-a)$.

Nel nostro caso il polinomio di grado 1 sarà $(x-1)$, ossia $(x - \text{la radice trovata})$, mentre quello di grado $(n-1)$ (nel nostro esempio $3-1=2$) ha come coefficienti i numeri che compaiono nella terza riga della tabella:

$$1 \quad 1 \quad 3$$

Sappiamo che $R(x)$ ha grado 2, quindi non può essere che

$$x^2 + x + 3$$

Siamo arrivati alla scomposizione che volevamo!

$$P(x) = x^3 + 2x - 3 = (x - 1)(x^2 + x + 3)$$