Metodi Matematici per l'Economia anno 2017/2018
Gruppo B

Docente: Giacomo Dimarco

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Ferrara

VNIVERSITÀ
DEGLI·STVDI
DI·FERRARA

https://sites.google.com/a/unife.it/giacomo-dimarco-home-page/
giacomo.dimarco@unife.it

Corso di Laurea in Economia

Obiettivi

Obiettivi Formativi

Obiettivo del corso è presentare gli argomenti di base della Matematica particolarmente rilevanti per gli studi economici.

In particolare gli obiettivi che ci si pone riguardano l'acquisizione in ambito matematico di

- Conoscenze ovvero il risultato dell'assimilazione di informazioni.
- Abilità ovvero le capacità di applicare le conoscenze per portare a termine compiti e risolvere problemi.
- Competenze ovvero la capacità di usare in un determinato contesto conoscenze, abilità e capacità.

Motivazioni

- Alcuni dei settori e dei corsi dove lo strumento matematico è fondamentale sono:
  - Finanza
  - Matematica finanziaria
  - Economia politica
  - Analisi Statistica
  - Econometria
- Queste discipline possono richiedere competenze di matematica molto avanzate.
- L'equazione di Black e Scholes descrive l'andamento del prezzo di strumenti finanziari:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

  dove V è il prezzo dell'opzione, S il valore del sottostante, σ la volatilità e r il tasso di sconto.
- Questa teoria ha fatto vincere il premio Nobel a Scholes e Morton nel 1997.

Motivazioni II

- La teoria dei giochi è la scienza matematica che costruisce modelli di situazioni di conflitto per proporne soluzioni competitive e cooperative.
- John Nash vince il premio Nobel nel 1994 per i suoi risultati relativi alla teoria dei Giochi.
- Dal 1994 a oggi sono stati conferiti undici premi Nobel per l'economia a studiosi che hanno lavorato nel campo della teoria dei giochi.
- Nel Dilemma del prigioniero due sospettati, A e B, sono arrestati. La polizia dopo aver rinchiuso i prigionieri in celle diverse interroga entrambi. Se uno solo confessa, l'altro sconterà 10 anni di detenzione mentre chi ha confessato sarà libero. Se entrambi non confessanno scontano un solo anno di carcere. Se, invece, confesseranno entrambi la pena sarà pari a 5 anni di carcere.

	confessa	non confessa
confessa	(5,5)	(0,10)
non confessa	(10,0)	(1,1)

Programma del corso: obiettivi, conoscenze, prerequisti

- Obiettivo del corso è presentare gli argomenti di base della Matematica particolarmente rilevanti per gli studi economici. Vengono introdotti gli elementi essenziali per il calcolo elementare e l'algebra lineare, con particolare riferimento allo studio di funzioni reali di una variabile reale, derivate, integrali, matrici e sistemi lineari.
- Al termine del corso lo studente è in grado di:
  - Calcolare i limiti delle funzioni più importanti ed utilizzare gli elementi fondamentali del calcolo differenziale, integrale e dell'algebra lineare.
  - Applicare queste conoscenze alla risoluzione di semplici problemi teorico-pratici ed alla formulazione ed interpretazione dei modelli matematici dell'economia, dell'azienda e della finanza.
- Scopo è fornire degli strumenti e apprendere il ragionamento logico deduttivo. Esso consiste nel produrre una conclusione a partire da una serie di premesse.
- Prerequisiti: sono richieste le conoscenze di base dell'algebra elementare con particolare riferimento a disequazioni di primo e secondo grado, disequazioni con radici, logaritmi ed esponenziali.

Programma (di massima) del corso

- Nozioni di base (10 ore).
  Teoria degli insiemi, insiemi numerici, potenze, radicali e logaritmi. Disequazioni. Geometria analitica. Estremo superiore ed inferiore. Intervalli. Progressioni. Principio di induzione.
- Parte Prima (16 ore).
  Teoria delle funzioni reali di una variabile reale: Concetto di funzione e di grafico. Funzioni iniettive e biunivoche, inverse, monotone, massimi e minimi. Funzioni concave e convesse. Funzioni elementari: potenze, radici, logaritmi; esponenziali. Composizioni, traslazione, scalatura, contrazione e dilatazione. Successioni.
  Limiti: concetto di limite, limiti di successioni, successioni convergenti e divergenti. Limiti di funzioni. Asintoti. Operazioni sui limiti. Limite della funzione composta. Forme indeterminate. Limiti notevoli. Funzioni continue. Teorema di Weierstrass, dei valori intermedi e di esistenza degli zeri.

Programma (di massima) del corso II

- Parte Seconda (10 ore).
  Teoria del calcolo differenziale: Concetto di derivata. Continuità delle funzioni derivabili. Derivazione delle somme, dei prodotti, dei quozienti, di funzioni composte. Massimi e minimi locali e assoluti. Teorema di Fermat, Teorema di Lagrange, test di monotonia. Derivate di ordine superiore al primo. Funzioni concave e convesse, punti di flesso, test al secondo ordine. Asintoti. Studio di funzione. Teorema de l'Hospital.
- Parte terza (10 ore).
  Cenni di teoria dell'integrazione: Nozione di primitiva e di integrale indefinito. Integrale di Riemann. Interpretazione geometrica dell'integrale. Linearità dell'integrale. Integrali immediati. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Integrazione di semplici funzioni.
- Parte quarta (10 ore).
  Algebra Lineare: Generalità su vettori e matrici. Dipendenza e indipendenza lineare. Determinante di una matrice, rango. Sistemi lineari. Teoremi di Cramer e di Rouché-Capelli.

Metodi didattici, modalità di apprendimento e testi

- Metodi didattici: Lezioni frontali ed esercitazioni. La frequenza non è obbligatoria ma è fortemente consigliata.
- Modalità di apprendimento: Esame Scritto.
  - L'obiettivo della prova d'esame è verificare il livello di raggiungimento degli obiettivi formativi.
  - La prova scritta consiste di tre quesiti riguardanti gli argomenti teorici, le applicazioni e gli esercizi trattati nel corso. Il voto finale è dato dalla somma dei punteggi delle singole parti.
  - Per superare l'esame è necessario acquisire il punteggio minimo di 18. Si hanno a disposizione 6 appelli durante l'anno accademico, due per sessione.
- Testi consigliati:
  - L. Peccati, S. Salsa, A. Squellati: Matematica per l'economia e l'azienda, Egea, Milano, 2004, Terza edizione.
  - G.Aletti, G.Naldi, L.Pareschi, Calcolo differenziale e Algebra lineare, McGraw-Hill, 2005.
  - M. C. Patria, Manuale di MAT&MATICA, corso di base per studenti di economia, Pitagora, 2013.
  - Slide o appunti del docente.

Valutazioni della didattica

- Le conoscenze preliminari possedute sono risultate sufficienti per la comprensione degli argomenti trattati in questo corso?
- Il carico di studio di questo insegnamento è proporzionato ai crediti assegnati?
- Il materiale didattico è adeguato per lo studio della materia?
- Le modalità di esame sono state definite in modo chiaro?
- La materia si studia bene anche senza frequentare? (solo studenti non frequentanti)
- Gli orari di svolgimento di lezioni, esercitazioni e altre eventuali attività didattiche sono rispettati?
- Il docente stimola/motiva l'interesse verso la disciplina?
- Il docente espone gli argomenti in modo chiaro?
- Le attività didattiche integrative risultano utili ai fini dell'apprendimento?
- Il programma dell'insegnamento svolto è stato coerente con quanto dichiarato sul sito web del Corso di Studio?
- Il docente è effettivamente reperibile per chiarimenti e spiegazioni?
- Sei interessato agli argomenti dell'insegnamento?

Consigli utili, informazioni e spiegazioni

- Pagina Web del corso: http://www.unife.it/economia/economia/insegnamenti/metodi-matematici-per-leconomia/programmi-a-a-2017-2018/metodi-matematici-per-leconomia-gruppo-b
- Orario di ricevimento: Lunedi pomeriggio dalle 14.30 alle 16.30. Oppure su appuntamento.
- Tutor: Ricevimento. Orario da definire.
- Domande frequenti 1: Non capisco la matematica.
- Domande frequenti 2: Perchè studiamo queste cose? Non servono a niente.
- Come passare l'esame: Studiare. Fare esercizi (tanti).
- Orari delle lezioni: Lunedì, Martedì e Mercoledì 11.00-13.00.
- Regole di comportamento: Siete liberi di frequentare o non frequentare le lezioni. In aula per rispetto verso tutti è richiesto silenzio.
- Copiare durante un esame è reato.

Insiemi, sottoinsiemi, operazioni

- Nel linguaggio corrente usiamo la parola "insieme" per denotare una certa entità composta di oggetti elementari.
- Gli oggetti che costituiscono un insieme sono detti i suoi *elementi*. Indicheremo solitamente gli insiemi con lettere maiuscole, A, B, C, $X, \dots$, mentre con lettere minuscole a, b, c, x, ..., denoteremo gli elementi che fanno parte di questi insiemi.
- Un insieme è definito assegnando i suoi elementi, tutti distinti l'uno dall'altro, che si dicono *appartenenti* all'insieme. Se a è un elemento di A, si scrive

$$a \in A,$$

e si legge "a appartiene all'insieme A", mentre se a non è un elemento di A, si scrive

$$a \notin A.$$

- Un insieme particolare è l'insieme privo di elementi, detto *insieme vuoto* e si indica con il simbolo $\varnothing$.
- Il modo più semplice per elencare tutti gli elementi di un insieme consiste nel racchiuderli tra parentesi graffe. Per esempio l'insieme A si può indicare con

$$A = \{ \ Lorenzo, \quad Giacomo, \quad Giovanni \ \}$$

oppure l'insieme X dei numeri naturali tra 0 e 4 si scrive

$$X = \{ \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4 \ \}.$$

- Si noti che l'ordine in cui sono elencati gli elementi non è essenziale. Naturalmente, vi sono casi in cui un insieme non può essere descritto completamente tramite l'elenco esplicito dei suoi elementi.
  Per esempio, se vogliamo indicare l'insieme dei numeri interi naturali non possiamo certamente scriverli tutti. In casi di questo tipo si ricorre spesso a simboli particolari, per indicare l'insieme dei numeri naturali si usa il simbolo $\mathbb{N}$. Possiamo quindi scrivere

$$\mathbb{N} = \{ \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ \dots \ \}.$$

Un modo differente per descrivere un insieme, a volte l'unico praticabile, consiste nel considerarlo come collezione di tutti gli elementi che appartengono a un certo insieme più grande E, per i quali vale una certa proprietà $\mathcal{P}$. Si scrive allora

$$\{\ x:\ x \in E \ \ e \ \ x \ \ verifica \ \ \mathcal{P}\ \},$$

e si legge "l'insieme degli x tali che x appartiene a E e vale $\mathcal{P}$". In alternativa si può utilizzare la scrittura più concisa

$$\{\ x \in E \ :\ x \ \ verifica \ \ \mathcal{P}\ \}.$$

Per esempio

$$A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\} \ = \ \{\ x \ :\ x \in \mathbb{N} \ \ e \ \ x < 5\ \}.$$

Si noti che non è essenziale la lettera che si sceglie per indicare la variabile (la x nell'esempio appena fatto), che viene anche chiamata variabile muta.

Sottoinsiemi

Abbiamo utilizzato la relazione di uguaglianza tra due insiemi. Dati due insiemi A e B, si dice che A è uguale a B, e si scrive $A = B$, quando A e B hanno gli stessi elementi (cioè A e B sono lo stesso insieme). Si dice invece che A è un sottoinsieme di B (oppure che A è incluso in B oppure che B include A) e si scrive

$$A \subseteq B,$$

se ogni elemento di A è anche elemento di B. Se inoltre esiste uno o più elementi di B che non appartengono ad A, si dice che A è incluso strettamente in B (oppure che B include strettamente A) e si scrive $A \subset B$.
Per esempio

$$\{x \in \mathbb{N} \ : \ x \ \ pari \ \} \subseteq \mathbb{N}, \quad \{0,2\} \subset \{0,2,4,6\}.$$

Si conviene di assumere che ogni insieme abbia l'insieme vuoto come suo sottoinsieme. Ogni insieme A non vuoto ha due sottoinsiemi detti impropri: A stesso e $\varnothing$. Gli altri sottoinsiemi sono detti propri.

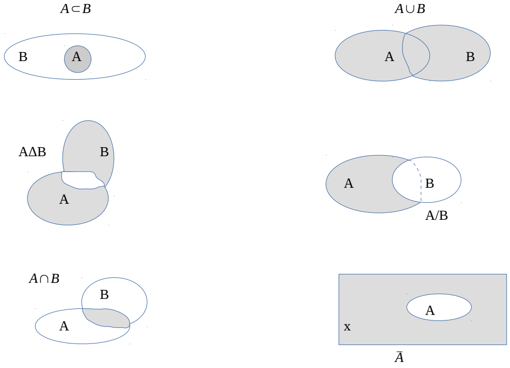
Unione, intersezione e altro

Non esiste l'insieme di tutti gli insiemi, per evitare insidiosi paradossi è opportuno riferirsi a un insieme non vuoto da considerarsi come un insieme ambiente e considerare solo sottoinsiemi di questo insieme "universo". Dati due insiemi A e B, si definiscono i seguenti insiemi.

- *Insieme unione*, $A \cup B$, è l'insieme degli x che appartengono ad A oppure appartengono a B.
- *Insieme intersezione*, $A \cap B$, è l'insieme degli x che appartengono sia ad A che a B.
- *Insieme differenza*, $A \setminus B$, è l'insieme degli x che appartengono ad A ma non appartengono a B.
- *Insieme differenza simmetrica*, $A \triangle B$, è l'insieme degli x che appartengono ad A ma non a B, oppure appartengono a B ma non ad A.
- Per $A \subseteq X$, *insieme complementare*, di A rispetto a X, $\overline{A}$, è l'insieme degli x che appartengono a X ma non appartengono ad A.

Diagrammi di Eulero-Venn

Un diagramma di Eulero-Venn rappresenta gli insiemi come insiemi di punti del piano, una sorta di "patate bidimensionali". Nella Figura si mostra l'interpretazione grafica delle operazioni insiemistiche descritte e dei nuovi insiemi generati.



Prodotto Cartesiano

Dati due insiemi A e B possiamo prendere $a \in A$, $b \in B$ e considerare la coppia ordinata (a, b), in cui a è il primo elemento mentre b è il secondo elemento. Due coppie ordinate saranno uguali quando hanno ordinatamente uguali primo e secondo elemento.

- Si dice *prodotto cartesiano* di A e B e si indica con $A \times B$, l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A,\ b \in B$.
- Possiamo generalizzare la costruzione del prodotto cartesiano al caso di tre o più insiemi. In generale il prodotto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ di n insiemi $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ é costituito dalle $n-$ple ordinate di elementi $(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n)$ con $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_n \in A_n$.
- Se gli insiemi sono tutti uguali ad A il prodotto cartesiano è indicato con A^n.
- Per esempio, consideriamo gli insiemi $A = \{p, a, x\}$ e $B = \{1, 2\}$, abbiamo

$$A \times B = \{(p, 1),\ (p, 2),\ (a, 1),\ (a, 2),\ (x, 1),\ (x, 2)\ \},$$

mentre il prodotto cartesiano $B \times A$,

$$B \times A = \{(1, p),\ (1, a),\ (1, x),\ (2, p),\ (2, a),\ (2, x)\ \}.$$

In generale quindi $A \times B \neq B \times A$.

Proposizione (Proprietà insiemi)

Siano A, B, C *tre sottoinsiemi nel medesimo insieme ambiente* S, *allora*

i) *proprietà Booleane,*

$$A \cap \overline{A} = \varnothing, \quad A \cup \overline{A} = S;$$

ii) *proprietà associativa, commutativa, distributiva,*

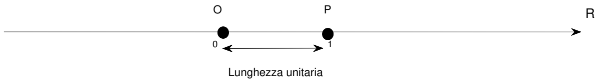
$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), & (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\ A \cap B &= B \cap A, & A \cup B &= B \cup A, \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C), & (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

iii) *leggi di De Morgan,*

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Numeri naturali

- L'insieme dei numeri naturali si indica con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
- Indicheremo con $\mathbb{N}^*$ l'insieme dei numeri naturali diversi da zero, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$.
- I numeri naturali possono essere rappresentati geometricamente come punti su una retta. A tale scopo si fissa un punto O sulla retta, che assoceremo al numero 0, e un secondo punto P diverso da O, che assoceremo al valore 1.



- Il verso di percorrenza positivo della retta è quello che porta dal punto O al punto P, mentre la lunghezza del segmento OP, che indicheremo con $\overline{OP}$, viene presa come unità di misura. Riportando i "multipli" del segmento OP sulla retta, secondo il verso positivo, otteniamo i punti associati ai numeri naturali.

Relazione d'ordine

- Nell'insieme $\mathbb{N}$ è possibile introdurre una relazione di ordine.
- Se esiste un numero naturale x che sommato ad $a \in \mathbb{N}$ fornisce il numero naturale b, si dice che a è minore o uguale a b e si scrive $a \leq b$ (se $a \leq b$ e $a \neq b$ si scrive $a < b$). Nel caso in cui a è maggiore o uguale a b si potrà scrivere anche $a \geq b$ (e $a > b$ nel caso in cui $a \neq b$).
- Sommando e moltiplicando numeri naturali si ottengono numeri naturali ed inoltre i numeri zero ed uno rappresentano l'*elemento neutro* rispettivamente per la somma, $\forall\, a \in \mathbb{N}$, $a + 0 = 0 + a = a$ e il prodotto $\forall\, a \in \mathbb{N}$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

I numeri interi

Se tentiamo di invertire l'operazione di somma ci accorgiamo che la cosa non è possibile restando in $\mathbb{N}$. Formalmente, dati $a, b \in \mathbb{N}$ l'equazione

$$a + x = b,$$

dove x rappresenta l'incognita, può essere priva di soluzione in $\mathbb{N}$. Per far in modo che equazioni di questo tipo abbiano sempre soluzione occorre ampliare l'insieme $\mathbb{N}$, definiamo quindi l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi

$$\mathbb{Z} \; = \; \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Anche in $\mathbb{Z}$ sussiste la stessa relazione d'ordine di $\mathbb{N}$, inoltre anche in $\mathbb{Z}$ lo zero si mantiene elemento neutro rispetto alla somma. In particolare la soluzione dell'equazione $a + x = 0$, con $a \in \mathbb{N}$ verrà denotata con $-a$. L'elemento che sommato ad a fornisce zero, quindi l'elemento $-a$, si chiama *opposto* di a.

Proprietá

Anche gli elementi di $\mathbb{Z}$ si possono rappresentare su una retta, i valori positivi saranno rappresentati come i numeri naturali mentre i valori negativi, cioè $a \in \mathbb{Z}$ e $a < 0$, saranno rappresentati muovendosi nella direzione negativa della retta e muovendosi con passo uguale alla lunghezza del segmento OP preso come unità di misura.

Le proprietà principali delle operazioni aritmetiche in $\mathbb{Z}$ (e negli insiemi numerici che considereremo in seguito) sono elencate di seguito

1) $\forall\, a, b, c, \quad (a + b) + c = a + (b + c)$, (proprietà associativa della somma);
2) $\forall\, a, b, \quad a + b = b + a$, (proprietà commutativa della somma);
3) $\forall\, a, b, c, \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, (proprietà distributiva);
4) $\forall\, a, b, c, \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, (proprietà associativa del prodotto);
5) $\forall\, a, b, \quad a \cdot b = b \cdot a$, (proprietà commutativa del prodotto).

I numeri razionali

- Proviamo ora a invertire l'operazione di moltiplicazione in $\mathbb{Z}$. Consideriamo per $a, b \in \mathbb{Z}$ l'equazione
$$ax = b,$$
con $a \neq 0$ e x incognita da determinare.
- Sappiamo che questa equazione ha soluzione in $\mathbb{Z}$ se e solo se b è un multiplo intero di a.
- Per rendere sempre risolvibile questa equazione dobbiamo ancora ampliare l'insieme in cui lavorare. Si definisce l'insieme dei *numeri razionali* e si indica con $\mathbb{Q}$ l'insieme delle coppie (p, q) con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.
- La coppia si indica come una frazione p/q e le operazioni aritmetiche vanno tradotte come operazioni tra coppie (tra frazioni). Il numero p si dice numeratore mentre il numero q si dice denominatore.
- Per evitare che i numeri razionali non siano univocamente determinati, si considerano equivalenti due numeri razionali p/q e p'/q' se $pq' = p'q$, ovverosia $pq' - p'q = 0$. Operativamente considereremo i numeri razionali $m/n \in \mathbb{Q}$ come frazioni ridotte ai minimi termini, ossia m ed n non hanno fattori comuni.

- Per ogni $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ esiste quindi un elemento, denotato con $1/x \ \in \mathbb{Q}$, tale che $x \cdot (1/x) = 1$.
- Tale elemento $(1/x)$ si chiama *reciproco* o *inverso* di x.
- Nella semplificazione ai minimi termini di una frazione il denominatore puó risultare uguale a 1. Per esempio $8/4 = 2/1$. In questo caso potremmo identificare il numero razionale $n/1$ con l'intero n. In questo senso l'insieme $\mathbb{Z}$ è contenuto in $\mathbb{Q}$, così come l'insieme $\mathbb{N}$ è contenuto in $\mathbb{Z}$, in simboli
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$
- Le operazioni tra numeri razionali si definiscono come
$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}, \qquad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}.$$
Le proprietà delle operazioni aritmetiche sono le stesse che per $\mathbb{Z}$.
- Per la relazione d'ordine, sia $x = p/q$ e $y = r/s$, supponiamo inoltre che i denominatori q ed s siano positivi (non è ovviamente limitativo). Rappresentiamo x e y tramite frazioni con il medesimo denominatore, $x = ps/qs, \ \ y = qr/qs$ a questo punto $x \leq y$ significa $ps \leq qr$. Per esempio $2/3 \leq 4/5$, perché $2 \cdot 5 = 10 \leq 3 \cdot 4 = 12$. Le definizioni per $<, \ \geq, \ >$ si affrontano in modo analogo.

(Rappresentazione decimale dei numeri razionali) Un numero razionale x ammette una rappresentazione decimale, ci limitiamo alla base $\beta = 10$, della forma

$$x = \pm \left(c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + c_1 10 + c_0 10^0 + c_{-1} 10^{-1} + c_{-2} 10^{-2} \ldots \right)$$

che può essere riscritta come $x = \pm c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0 . c_{-1} c_{-2} \ldots$ Per esempio

$$\frac{2}{5} = 0.4, \quad \frac{1}{16} = 0.0625, \quad \frac{1}{6} = 0.1666\ldots, \quad \frac{5}{11} = 0.454545\ldots$$

dove i puntini indicano che le cifre continuano indefinitivamente. Quando nella rappresentazione decimale di un numero razionale abbiamo infinite cifre decimali, c'è un gruppo di cifre che si ripete: tale gruppo costituisce il *periodo* della rappresentazione. Di solito si evidenzia tale gruppo sopralineando le cifre che lo costituiscono,

$$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}, \quad \frac{5}{11} = 0.\overline{45} \quad .$$

Si può dimostrare che ogni rappresentazione decimale di un numero razionale è periodica nel senso ora descritto, viceversa a ogni rappresentazione periodica si può associare una frazione che lo genera.

Numeri non razionali

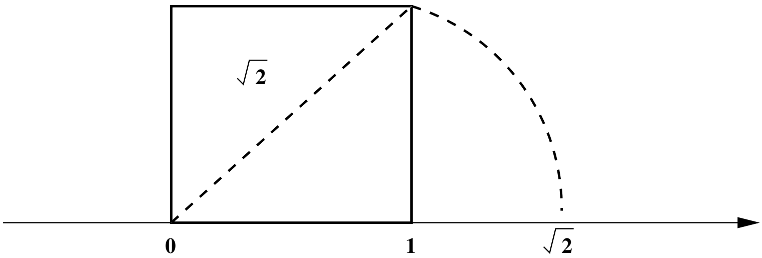


Figure: La diagonale di un quadrato unitario è incommensurabile rispetto al lato.

Consideriamo un quadrato di lato unitario (vedi Figura) e consideriamo la misura della diagonale. Indicando con x la lunghezza di tale diagonale, dal Teorema di Pitagora si ottiene

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Vale la seguente

Proposizione

Se il numero x soddisfa $x^2 = 2$ allora x non è un numero razionale.

Per assurdo, supponiamo che $x = p/q \in \mathbb{Q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ e p, q privi di fattori comuni. Elevando al quadrato x si ottiene

$$x^2 = x \cdot x = \frac{p^2}{q^2}.$$

Segue che $p^2 = 2q^2$, quindi p^2 è un numero pari, da cui si deduce che anche p è un numero pari. Pertanto $p = 2k$, per un certo intero positivo k. Ne segue che $p^2 = 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$. Quindi anche q^2 è un numero pari, ne segue che anche q è un numero pari. Siamo arrivati a dedurre che sia p che q sono numeri pari ed hanno quindi un fattore in comune, il numero 2, contraddicendo l'ipotesi che la frazione era ridotta ai minimi termini. L'assurdo è nato dall'aver supposto x razionale.

Numeri reali

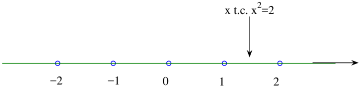


Figure: La retta dei numeri reali.

- Estendiamo quindi l'insieme dei numeri razionali in modo da avere una corrispondenza biunivoca con la retta.
- L'insieme numerico che si ottiene è l'insieme dei numeri reali indicato con $\mathbb{R}$.
- Dal punto di vista della rappresentazione decimale, i numeri reali possono dar luogo a qualsiasi allineamento di cifre dopo la virgola.
- Allineamenti finiti o periodici fanno ritrovare, dal punto di vista insiemistico, i numeri razionali. Rappresentazioni decimali illimitate e non periodiche danno luogo a numeri reali non razionali: i *numeri irrazionali*.
- La lunghezza della diagonale del quadrato unitario è un numero irrazionale x che verifica $x^2 = 2$ e che indicheremo con $\sqrt{2}$ le cui prime cifre sono

$$x = \sqrt{2} = 1.41421356237310\ldots$$

Esempio

(Numeri reali e numeri razionali)

- Sebbene i numeri razionali non coprano tutta la retta dei numeri reali $\mathbb{R}$ è vero che ci vanno molto vicini.
- Comunque si fissi una soglia di errore ammissibile, è possibile approssimare un numero reale con un numero razionale commettendo un errore più piccolo della soglia consentita.
- Supponiamo che la soglia sia della forma $1/q_0$ con $q_0 \in \mathbb{N}$ (ad esempio, per $q_0 = 1000$, l'errore ammesso è $1/1000$).
- Dividiamo la retta reale $\mathbb{R}$ in segmenti di lunghezza $1/q_0$ e consideriamo i punti della forma p/q_0 con $p \in \mathbb{Z}$.
- Dato che $\mathbb{R}$ può essere visto come l'unione dei segmenti con estremi p/q_0 e $(p+1)/q_0$ per $p \in \mathbb{Z}$, per ogni punto x di $\mathbb{R}$ esiste p_0 tale che
$$\frac{p_0}{q_0} \leq x \leq \frac{p_0+1}{q_0}$$
- Quindi è possibile approssimare il punto x con un razionale p_0/q_0 commettendo un errore minore di $1/q_0$.

- Il fatto che i punti razionali siano arbitrariamente vicini ad ogni punto x di $\mathbb{R}$ si esprime in simboli come segue

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ y \in \mathbb{Q} \text{ tale che } |x - y| < \varepsilon,$$

  e si esprime dicendo che l'insieme dei razionali è denso nell'insieme dei numeri reali.
- Dal punto di vista della misurazione concreta, la densità è una proprietà notevole! In linea di principio, tenendo conto che c'è sempre un errore di misurazione, ogni misura può essere compiuta in $\mathbb{Q}$: un qualsiasi elemento di $\mathbb{R}$ può essere individuato con un arbitrario grado di precisione usando punti razionali.
- Ad esempio, anche un qualsiasi computer ragiona sempre e solo con (un sottoinsieme dei) numeri razionali.
- I numeri reali possono essere rappresentati tramite una "successione di decimali".

Osservazione

I problemi relativi alle relazioni tra i diversi insiemi numerici hanno un risvolto applicativo estremamente attuale. Fatte le dovute semplificazioni, ogni calcolatrice tascabile è in grado infatti di gestire solo numeri aventi una rappresentazione decimale limitata (numeri macchina). Ne deriva che si commettono sempre errori di calcolo usando una calcolatrice numerica. Consideriamo il semplice calcolo

$$500\left(\frac{1}{1500}+\frac{2}{1500}\right)=1.$$

I numeri razionali $1/1500$ e $2/1500$ hanno i valori numerici decimali $0.000666\ldots$ e $0.001333\ldots$ e non possono essere rappresentati con un numero finito di cifre decimali, mentre il risultato 1 chiaramente sì. Se avessimo una calcolatrice basata solo su tre cifre decimali nell'eseguire il calcolo otteniamo

$$500(0.000+0.001)=0.5.$$

Ossia un'errore del 50%.

Proprietá

Riassumiamo le proprietà più importanti dell'insieme dei numeri reali.

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, questo dal punto di vista insiemistico.
- Le operazioni aritmetiche, con le loro proprietà, definite sui razionali si estendono ai reali.
- La relazione d'ordine $x \leq y$ dei numeri razionali si estende ai reali con analoghe proprietà. Definendo con $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}_-$ i sottoinsiemi dei numeri reali positivi e, rispettivamente, negativi, abbiamo $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_-$. Formalmente potremmo scrivere

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \quad x < y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+.$$

  L'ordinamento è totale nel senso che per ogni coppia $x, y \in \mathbb{R}$ vale una e una sola delle alternative $x < y$, $x = y$, $y < x$. Anziché scrivere $x \in \mathbb{R}_+$ si può scrivere $x > 0$, per $x \in \mathbb{R}_-$ si può invece abbreviare con $x < 0$.

Altre proprietà della relazione d'ordine (qui riportate nel caso $<$ ma analoghe al caso con $\leq$)

1) $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R},\ x < y \ \Rightarrow\ x + z < y + z;$
2) $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R},\ x < y,\ z > 0 \ \Rightarrow\ x \cdot z < y \cdot z;$
2) $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R},\ x < y,\ z < 0 \ \Rightarrow\ x \cdot z > y \cdot z;$
4) $\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ 0 < x < y \ \Rightarrow\ 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}.$

- I numeri razionali sono densi nei reali. Questo significa quanto già osservato: un numero reale può essere approssimato bene quanto vogliamo da un numero razionale. Ciò implica che tra due numeri reali qualunque esistono infiniti razionali.
- L'insieme dei numeri reali è completo. Questa proprietà traduce il fatto che a ogni punto della retta reale può essere associato uno e un solo numero reale. In altri termini, se disponiamo tutti i numeri reali seguendo la relazione d'ordine su una retta reale non lasciamo "buchi".
- La stessa ipotetica operazione con i razionali fornirebbe invece una retta piena di buchi, per esempio per $x = \sqrt{2}$ se ne incontrerebbe uno.

Potenze con esponente naturale

Definizione

Se $n \in \mathbb{N}$ *e* $n \neq 0$, *si chiama potenza n-esima del numero reale* a, *o potenza con base* a *ed esponente* n, *e si indica con il simbolo* a^n, *il prodottto di* n *fattori uguali ad* a

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n volte}}.$$

Se $a \neq 0$, *si attribuisce significato anche alla potenza con esponente nullo, ponendo* $a^0 = 1$.

Esempio

- $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
- $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$
- $1^n = 1$, per qualunque $n \in \mathbb{N}$.
- $0^7 = 0$, 0^0 è privo di significato.

Proprietà p1. Siano a, b due numeri reali e n, m due numeri naturali. Allora:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (se $a \neq 0$ e $n \geq m$).
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ (se $b \neq 0$)

Esempio

- $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^5 = -\frac{1}{1024}$
- $((-2)^2)^3 = (-2)^6 = 64 = ((-2)^3)^2$
- $\frac{2^7}{2^4} = 2^3 = 8$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3$
- $\frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Attenzione alle parentesi: in generale $(a^n)^m$ è diverso da $a^{(n)^m}$. Ad esempio, $(2^3)^2 = 2^6 = 64$ mentre $2^{3^2} = 2^9 = 512$.

Osserviamo che $\forall a \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ si ha che

- $a^n \geq 0$ se n è pari.
- a^n ha lo stesso segno di a se n è dispari.
- Se $a > 1$, si ha che $a^m < a^n$ con $0 \leq m < n$.
- Se $0 < a < 1$, si ha che $a^m > a^n$ con $0 \leq m < n$.
- Dati due numeri reali a, b con $0 \leq a < b$, si ha che $a^n < b^n$.
- Se anche una delle basi è negativa tutte le proprietà viste possono non essere vere.

Esempio

- $2^3 < 2^5$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^5$.
- $(-2)^3 = -2^3$ e $(-2)^5 = -2^5$. Poichè $2^3 < 2^5$ si ha che $-2^3 > -2^5$ e quindi $(-2)^3 > (-2)^5$.
- Prendiamo $(-2)^3$ e $(-2)^4$. La base è < 0. Poichè $(-2)^3 = -2^3$ e $(-2)^4 = 2^4$ abbiamo $(-2)^3 < (-2)^4$.
- Prendiamo $(-3)^3$ e $(-2)^3$. Si ha che $(-3)^3 < (-2)^3$ poichè $(-3)^3 = -3^3$, $(-2)^3 = -2^3$ e $2^3 < 3^3$.

Potenze con esponente intero

Dato un numero naturale $n \geq 1$, per ogni base $a \neq 0$ definiamo la potenza con esponente negativo a^{-n} come

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ovvero a^{-n} è il reciproco di a^n. Le proprietà p1 valgono ancora per $m, n \in \mathbb{Z}$.

Esempio

- $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-7} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$
- $(3^2)^{-1} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$
- $\left(\left(-\frac{5}{7}\right)^{-2}\right)^{-1} = \left(-\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$

Notazione e ordine di grandezza

- La moltiplicazione di un numero, espresso in forma decimale, per 10^n ha l'effetto di spostare il punto decimale di n posizioni verso destra se n è positivo, di n posizioni verso sinistra se n è negativo.
- Ad esempio, moltiplicando il numero 0.243 per 10^2, otteniamo 24.3. Moltiplicandolo invece per 10^{-2} otteniamo 0.00243.
- Spesso per utilizzare una notazione più compatta e significativa si fa uso di questa proprietà che ci consente di scrivere un numero evidenziandone l'ordine di grandezza.

Si procede così:

- Si cerca la prima cifra diversa da zero a partire da sinistra nella rappresentazione decimale di un numero a.
- Questa cifra prende il nome di significativa.

Notazione e ordine di grandezza

- Si conta di quanti posti e in che verso si deve spostare il punto decimale perchè la cifra significativa diventi la cifra dell'unità.
- Si scrive il numero a come prodotto di una potenza di 10 per un numero che ha la cifra significativa di a come cifra dell'unità.

Esempio: dato $a = 0.0031724$ e $b = 32015$, tali numeri si scrivono in questa notazione compatta detta notazione scientifica come $a = 3.1724 \cdot 10^{-3}$ e $b = 3.2015 \cdot 10^4$.

Il fattore 10^n che compare nella notazione scientifica permette di individuare l'ordine di grandezza del numero. Ad esempio

- $3.5 = 3.5 \cdot 10^0$ è dell'ordine dell'unità
- $3500 = 3.5 \cdot 10^3$ è dell'ordine delle migliaia, $1000 \leq 3500 < 10^4$
- $0.00264 = 2.64 \cdot 10^{-3}$ è dell'ordine dei millesimi, $\frac{1}{1000} \leq 0.00264 < 10^{-2}$.

Radici di numeri reali

- Ci chiediamo se, dati un numero reale non nullo a e un numero intero $n > 1$, esiste un numero reale b tale che sia $b^n = a$. Cioè se, dati a ed n, è possibile esprimere a come potenza n-esima di un altro numero b.
- Se $a < 0$ dovremo distinguere il caso in cui n è un numero pari da quello in cui è un numero dispari.
- Invece se $a > 0$ la risposta è sempre affermativa e possiamo anche chiedere che il numero b che stiamo cercando sia positivo.

Precisamente:

- se $a > 0$ esiste un unico numero $b > 0$ tale che $b^n = a$. Questo numero si chiama radice n-esima di a e si scrive $b = \sqrt[n]{a}$.
- Se $a < 0$ ed n è un numero pari non c'è nessun numero reale b tale che $b^n = a$. Infatti $b^n \geq 0$.
- Se $a < 0$ ed n è un numero dispari esiste un unico numero $b < 0$ tale che $b^n = a$, $b = -\sqrt[n]{-a}$. Denoteremo anche questo numero con $\sqrt[n]{a}$.
- Nella scrittura $\sqrt[n]{a}$, n è detto indice, a radicando.
- $\sqrt{a^2} = |a|$ e non a. Infatti qualunque sia il segno di a risulta $a^2 \geq 0$, perciò $\sqrt{a^2}$ esiste ed è un numero ≥ 0.

Potenze con esponente razionale

Dato il numero reale a >0 e due numeri interi $m, , n > 0$ risulta $(a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$. Definiamo quindi

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Poniamo inoltre

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Dati $a, b > 0 \in \mathbb{R}$ e m, n, p, q interi ≥ 1. Valgono le proprietà

- $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$
- $(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}}$
- $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}}$

Esempio

$3^{\frac{1}{6}} > 2^{\frac{1}{4}}$. Infatti $3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{12}} = 9^{\frac{1}{12}} > 2^{\frac{3}{12}} = 8^{\frac{1}{12}}$. Inoltre $\sqrt[3]{9} < \sqrt{5}$. Infatti $\sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{4}{6}} = 81^{\frac{1}{6}} < 5^{\frac{3}{6}} = 125^{\frac{1}{6}}$.

Potenze con esponente reale

È possibile estendere la definizione dell'operazione di elevamento a potenza anche ai casi in cui base ed esponente sono dei numeri reali dando quindi un senso all'espressione a^b con$b \in \mathbb{R}$. Osserviamo che

- Il numero a deve essere un numero reale positivo (diverso da zero).
- Per definire a^b si considerano numeri razionali r che approssimano b con precisione via via maggiore. Si calcolano poi le potenze (con esponente razionale) a^r che approssimano a^b.
- La potenza a^b è sempre un numero > 0 qualunque sia la base (reale positiva) a e l'esponente reale b.
- Per le potenze con base reale > 0 ed esponente reale, valgono le proprietà delle potenze:

$$a^b \cdot a^c = a^{bc} \quad a^c \cdot b^c = (ab)^c \quad (a^b)^c = a^{bc}$$

- Dato un qualunque esponente reale b e un numero reale positivo c, è sempre possibile trovare una (e una sola) base a tale che valga l'uguaglianza $a^b = c$. Tale base è $a = c^{\frac{1}{b}}$

Logaritmi

- Consideriamo l'uguaglianza $2^5 = 32$. Data la base 2 per ottenere 32 occorre usare l'esponente 5. Si dice allora che 5 è il logaritmo in base 2 di 32 e si scrive $5 = \log_2 32$.
- Nello stesso modo $log_3(1/9) = -2$, infatti $3^{-2} = 1/9$ e $\log_{1/3} 9 = -2$ poichè $(1/3)^{-2} = 9$.
- Per definire in generale il logaritmo consideriamo l'equazione $a^x = y$ dove l'incognita è x. Dove $a > 0$ e $a^x > 0$. Questo implica che se $y < 0$, $a^x = y$ non ammette soluzioni reali. Inoltre se $a = 1$, si ha $a^x = 1^x = 1, \forall x$ e quindi se $y \neq 1$ non ci sono soluzioni, mentre se $y = 1$ tutti i numeri reali sono soluzioni.
- Concludendo per avere esistenza e unicità della soluzione occorre scegliere: $a > 0,\ a \neq 1,\ y > 0$.

Teorema

Sotto le condizioni $a > 0,\ a \neq 1,\ y > 0$ l'equazione $a^x = y$ ha una sola soluzione reale che prende il nome di logaritmo in base a di y e s'indica con il simbolo $\log_a y$.

L'importanza dei logaritmi riposa su alcune proprietà che riassumiamo ($x, y > 0$, $a > 0,\ a \neq 1$):

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.
  Infatti poichè $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$, ponendo $b = \log_a x$, $c = \log_a y$, si ha $a^b = x, a^c = y$ e $a^{b+c} = xy$. Ora dalla definizione di logaritmo segue che $\log_a(xy) = b + c = \log_a x + \log_a y$.
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
  Infatti poichè $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$, ponendo $b = \log_a x$, $c = \log_a y$, si ha $a^b = x, a^c = y$ e $a^{b-c} = \frac{x}{y}$. Ora dalla definizione di logaritmo segue che $\log_a(\frac{x}{y}) = b - c = \log_a x - \log_a y$.
- $\log_a(x^k) = k \log_a x$.
  Infatti poichè $(a^b)^k = a^{bk}$, ponendo $b = \log_a x$, si ha $a^b = x, a^{bk} = x^k$. Dalla definizione di logaritmo segue che $k \log_a x = bk = \log_a x^k$.
- $\log_a x = \frac{log_b x}{\log_b a}$ $(b > 0, b \neq 1)$.
  Infatti $\log_b a \log_a x = \log_b a^{\log_a x} = \log_b x$.
- Per $a > 1$: $0 < x_1 < x_2$ se e solo se $\log_a x_1 < \log_a x_2$, per $0 < a < 1$: $0 < x_1 < x_2$ se e solo se $\log_a x_1 > \log_a x_2$

Valore assoluto o modulo

- Il valore assoluto è un concetto legato alla valutazione della distanza tra due punti.
- Dato un numero reale x chiamiamo valore assoluto o modulo di x il numero reale indicato con $|x|$ e definito come

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } \; x < 0 \\ x & \text{se } \; x \geq 0. \end{cases}$$

  Per esempio $|5| = 5, \quad |-7| = 7, \quad |0| = 0.$
- Fissato un numero reale positivo r, la condizione $|x| \leq r$ equivale al fatto che $x \in [-r, r]$, ovvero $-r \leq x \leq r$.
- Dati poi due punti $P, \; Q$ sulla retta reale, la misura della lunghezza del segmento PQ viene detta distanza di P da Q e indicata con $d(P, Q)$ o $\overline{PQ}$. Se x ed y sono i valori reali corrispondenti ai due punti P e Q, risulta

$$\overline{PQ} \; = \; |x - y|.$$

  In particolare se O è l'origine della retta, $\overline{PQ} = |x|$.

Valore assoluto o modulo II

Il valore assoluto ha le seguenti proprietà

1) $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$,
2) $|xy| = |x|\,|y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,
3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

La disuguaglianza nella 3) è importante e viene detta *disuguaglianza triangolare*. Per dimostrarla basta osservare che per ogni x, y in $\mathbb{R}$

$$-|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq y \leq |y|,$$

e quindi sommare membro a membro

$$-(|x| + |y|) \leq \; x + y \; \leq (|x| + |y|),$$

ottenendo esattamente la disuguaglianza 3).

Estremo superiore ed estremo inferiore

Cerchiamo di formalizzare la proprietà di completezza.

Definizione (Maggiorante)

Diremo che il numero reale $M \in \mathbb{R}$ *è un* maggiorante *per l'insieme* A *se* $a \leq M, \ \forall\, a \in A$*. L'insieme* A *si dice limitato superiormente (l.s.) se ammette maggioranti, illimitato superiormente se è privo di maggioranti.*

Definizione (Minorante)

Diremo che il numero reale $m \in \mathbb{R}$ *è un* minorante *per l'insieme* A *se* $m \leq a, \ \forall\, a \in A$*. L'insieme* A *si dice limitato inferiormente (l.i.) se ammette minoranti, illimitato inferiormente se è privo di minoranti.*

- Un insieme che è limitato sia superiormente che inferiormente si dice *limitato*.
- Per esempio $\mathbb{N}$ è l.i. ma non l.s., $B = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 1\}$ è l.s. ma non l.i., $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x = 1/2^n, \ n \in \mathbb{N}^*\} \ = \ \{1/2, 1/4, 1/8, ...\}$ è limitato.
- Per B tutti i numeri reali ≥ 1 sono maggioranti, il valore $M = 1$ è il più piccolo dei maggioranti.

Definizione (Massimo e minimo)

Diciamo che l'insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ *ammette massimo se esiste un elemento* $\overline{x} \in A$ *tale che*

$$x \leq \overline{x} \quad \forall x \in A.$$

L'elemento $\overline{x}$ *si dice massimo dell'insieme* A *e viene denotato con* $\max(A)$.
Analogamente l'insieme A *ammette minimo se esiste un elemento* $\underline{x} \in A$ *tale che*

$$\underline{x} \leq x \quad \forall x \in A.$$

L'elemento $\underline{x}$ *si dice minimo dell'insieme* A *e viene denotato con* $\min(A)$.

L'insieme $A = \{1/2, 1/4, 1/8, ...\}$ ha massimo $\max(A) = 1/2$ ma non ammette minimo, pur essendo inferiormente limitato. Notiamo che il valore $x = 0$ ha un ruolo particolare, non appartiene ad A, è un minorante per A e non ci sono minoranti più grandi di lui.

Definizione (Estremo superiore e inferiore)

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme s.l., chiamiamo estremo superiore di A il più piccolo dei maggioranti di A, denotato $\sup(A)$. Analogamente, se $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto i.l., chiamiamo estremo inferiore di A il più grande dei minoranti di A, denotato $\inf(A)$.

- $\sup(A)$ e $\inf(A)$ esistono sempre? La questione è tutt'altro che ovvia, la risposta è affermativa nell'ambito dei numeri reali e caratterizza il fatto che tale insieme sia completo. Osserviamo che il numero $S = \sup(A)$, quando esiste, è caratterizzato dalle seguenti condizioni
  - i) $\forall x \in A$, $x \leq S$ (S è un maggiorante);
  - ii) $\forall r \in \mathbb{R}$, $r < S$, $\exists x \in A$ tale che $x > r$ (S è il più piccolo dei maggioranti).
- Se l'insieme non è superiormente limitato si conviene denotare l'estremo superiore con il simbolo $+\infty$.
- In modo simile, se A non è inferiormente limitato si conviene definire $\inf(A) = -\infty$.

Teorema (Completezza di $\mathbb{R}$)

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, se A è superiormente (inferiormente) limitato allora A possiede estremo superiore (inferiore).

Intervalli

Esempio

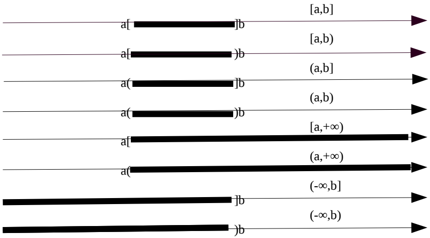
Consideriamo l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 \leq 2\}$. La completezza di $\mathbb{R}$ ci assicura che esiste $S = \sup(A)$. Non può essere $S^2 < 2$, altrimenti potrei trovare un razionale r tale che $S^2 < r^2 < 2$, per la densità dei razionali. Necessariamente deve accadere che $S^2 = 2$ (anche $S^2 > 2$ deve essere scartato altrimenti potrei trovare un maggiorante più piccolo). Dato che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ si ottiene che A non ammette sup.

- Un sottoinsieme I non vuoto della retta reale tale che $\forall x, y \in I$ tutti i punti compresi tra x ed y appartengono ancora ad I si chiama intervallo. Per esempio l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 6\}$ è un intervallo, mentre l'insieme $B = \{x \in \mathbb{R}, \ x \neq 0\}$ non è un intervallo. Tra gli intervalli limitati, se $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ abbiamo
  - intervallo chiuso $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$,
  - intervallo aperto a destra (semiaperto) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$,
  - intervallo aperto a sinistra (semiaperto) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$,
  - intervallo aperto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$.

Intervalli

Tutti gli intervalli limitati descritti hanno come estremo inferiore a e come estremo superiore b, la lunghezza di tutti gli intervalli è uguale a $(b-a)$. Tra gli intervalli illimitati abbiamo

- intervallo chiuso illimitato superiormente $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x\}$,
- intervallo aperto illimitato superiormente $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x\}$,
- intervallo chiuso illimitato inferiormente $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq a\}$,
- intervallo aperto illimitato inferiormente $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < a\}$.



- I simboli $-\infty$ e $+\infty$ non indicano numeri reali, indicano solo che non vi è nessuna limitazione.
- Con questi simboli possiamo estendere la retta reale alla retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}}$

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \ +\infty\}$$

- L'intersezione di un qualsiasi numero di intervalli è un intervallo oppure l'insieme vuoto.

Definizione (Intorno)

Dato un punto $x \in \mathbb{R}$, si chiama intorno di x ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene un intervallo aperto $(x - r, x + r)$ con $r > 0$.

Principio di induzione

Esempio

Consideriamo una famiglia di proposizioni $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ (Ossia una famiglia di affermazioni ognuna delle quali può essere solo vera o falsa). Se questa famiglia verifica

(1) $P(0)$ è vera;

(2) $\forall\, n$ dall'ipotesi che $P(n)$ è vera segue che $P(n+1)$ è vera;

allora $P(n)$ è vera per ogni intero naturale n.
Sia, per esempio, $P(n) =$"la somma dei numeri naturali non superiori a $n \in \mathbb{N}$ vale $n(n+1)/2$". Abbiamo,

- *base dell'induzione*, per $n = 0$ l'affermazione è vera: ho solo il numero intero $n = 0$, la somma vale zero, anche la formula fornisce zero quando si pone $n = 0$.

Principio di induzione

Esempio

- *Passo induttivo.* Supponiamo che per un assegnato intero n la $P(n)$ sia vera, quindi
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n \;=\; \frac{n(n+1)}{2}.$$
Consideriamo la somma dei primi $n+1$ interi naturali, si ottiene
$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n+1) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + (n+1),$$
dove abbiamo applicato l'ipotesi $P(n)$. Segue che
$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$
e l'ultima espressione risulta essere l'espressione proposta per la somma con il parametro posto uguale a $(n+1)$. Dunque, se $P(n)$ è vera anche $P(n+1)$ è vera. La proposizione $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Progressioni

Supponiamo di voler indicare la somma degli interi da 1 a 50:
$1 + 2 + 3 + ... + 49 + 50$, dove i puntini indicano che si deve continuare a sommare anche i numeri da 4 al 48. Un modo alternativo e più compatto di scrivere la stessa somma è

$$\sum_{n=1}^{50} n.$$

In generale, data una sequenza finita di termini $a_1, a_2, .., a_n$, si sceglie un indice (per esempio s) e si scrive $\sum_{s=1}^{m} a_s$. a_s si chiama termine generale. Il valore della somma non dipende dal nome che si sceglie per l'indice, che si dice muto.

Esempio

- La somma $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + .. + \frac{1}{n^2}$ si scrive

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s^2} \qquad \text{oppure} \qquad \sum_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\mathrm{t}^2}$$

Esempio

- L'espressione $(-1)^k$ è utile per gestire le alternanze di segno.

$$(-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{se k pari} \\ -1 & \text{se k dispari.} \end{cases}$$

Di conseguenza la somma $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{16}$ si scrive $\sum_{k=1}^{16} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$.

Proprietà del simbolo di sommatoria:

- $\sum_{k=1}^{n} c = cn$
- $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$
- $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
- $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k \ (m < n)$
- $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{s=p+1}^{n+p} a_{s-p}$ (cambio d'indice: $s = k + p$).

Un simbolo analogo a $\sum$ può essere utilizzato per il prodotto Π. Per esempio, il prodotto $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$ diventa $\Pi_{s=1}^{5}(2s - 1)$.

Somma di termini in progressione aritmetica

Si dice che n termini si susseguono in progressione aritmetica se la differenza tra un termine e il precedente è costante. Tale costante prende il nome di ragione della progressione. Se indichiamo con a il primo termine e con r la ragione, i primi n termini sono

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ ..,\ a+(n-1)r.$$

La loro somma si può indicare come

$$\sum_{h=0}^{n-1}(a+hr)=\frac{n}{2}(2a+(n-1)r).$$

Ad esempio

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Somma di termini in progressione geometrica

Si dice che n termini si susseguono in progressione geometrica se il rapporto tra un termine e il precedente è costante. Tale costante prende il nome di ragione della progressione e tipicamente si indica con la lettera q.
Se a_1 è il primo termine della progressione, il secondo sarà $a_2 = a_1 q$, il terzo $a_3 = a_2 q = a_1 q^2$ e così via.
Scegliendo $a_1 = 1$ la somma dei primi n termini si può scrivere

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k.$$

Per esempio se $q = \frac{1}{2}$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Nel caso $q \neq 1$ vale la formula

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Per dimostrarla, poniamo

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

e moltiplichiamo S per q ottenendo

$$qS = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^n = \sum_{k=1}^{n} q^k.$$

Sottraendo membro a membro le precedenti due relazioni si trova

$$(q-1)S = \sum_{k=1}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^k = q + q^2 + \dots + q^n - (1 + q + \dots + q^{n-1}) = q^n - 1.$$

Dividendo per $q - 1$ si ottiene la formula cercata.

Esercizio

Verificare che

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1}, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^k = \frac{2}{3}((-2)^{n-1} - 1).$$

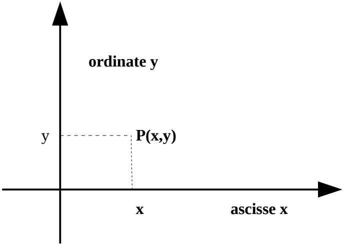
Il piano cartesiano

Geometricamente all'insieme $\mathbb{R}$ corrisponde la retta reale. Analogamente a

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)\} \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

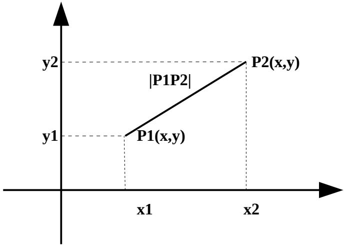
corrisponde il piano reale. Ossia un piano in cui si scelgono:

1. un punto O detto origine che corrisponderà alla coppia $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$;
2. due rette distinte passanti per O dette asse delle ascisse (o delle x) e asse delle ordinate (o delle y);
3. due punti P e Q, uno sull'asse delle x e l'altro sull'asse delle y, $P, Q \neq O$, a P corrisponde $(1, 0)$ mentre a Q la coppia $(0, 1)$.
4. un orientamento per entrambe le rette.



- Preso un punto P del piano:
  - x è uguale alla misura del segmento orientato definito dall'origine e dal punto in cui la parallela per P all'asse y incontra l'asse della ascisse.
  - y uguale alla misura del segmento orientato definito dall'origine e dal punto in cui la parallela per P all'asse x incontra l'asse delle ordinate.
  - Al punto P corrisponde la coppia (x, y).
  - Abbiamo costruito un sistema di riferimento cartesiano per $\mathbb{R}^2$.
  - Se gli assi sono ortogonali abbiamo un sistema di riferimento detto ortogonale.
  - Se le distanze dei punti P e Q, coppie $(1, 0)$ e $(0, 1)$, da O sono uguali il sistema è detto ortonormale.
- Considereremo nel seguito sistemi ortonormali per i quali, dal Teorema di Pitagora, la distanza tra due punti P_1 e P_2 di coordinate (x_1, y_1), (x_2, y_2) è

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Rette

- Ad ogni retta nel piano si può associare un'equazione del tipo

$$ax + by + c = 0,$$

dove x e y rappresentano le coordinate del punto generico sulla retta.

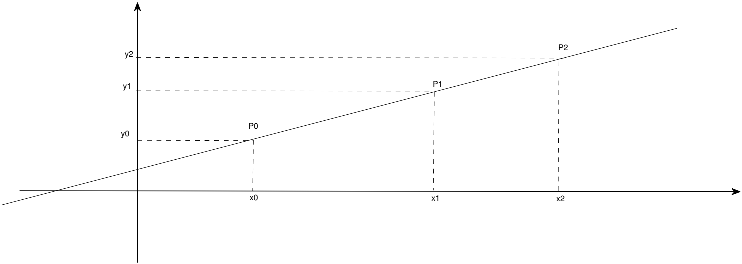
- Infatti, siano (x_0, y_0) e (x_1, y_1) le coordinate di due punti sulla retta. Se $x_0 = x_1$ la retta è parallela all'asse delle ordinate e la sua equazione è semplicemente $x = x_0$. In modo analogo, se $y_1 = y_0$ la retta è parallela all'asse delle ascisse e la sua equazione è $y = y_0$.
- Se la retta non è né verticale né orizzontale allora possiamo utilizzare il Teorema di Talete. Questo Teorema ci fornisce l'uguaglianza

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

che può essere scritta come

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

- Questo evidenzia il cosidetto coefficiente angolare o pendenza della retta $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ in quanto ne determina l'inclinazione rispetto all'asse delle ascisse.
- Una retta non verticale può essere scritta come $y = mx + q$. Se $m = 0$ ritroviamo le rette orizzontali, che hanno pendenza nulla. Per le rette verticali, la pendenza non è definita. Talvolta si dice essere "infinita".
- Data una retta con coefficiente angolare m, la retta ad essa perpendicolare avrà coefficiente $-1/m$.



Parabole

- Una parabola è definita come il luogo geometrico, o l'insieme dei punti di un piano equidistanti da una retta, detta direttrice e un punto, detto fuoco.
- Per determinare l'equazione che corrisponde a una parabola, scegliamo il sistema di riferimento in modo che il fuoco F abbia coordinate $(0, k)$, $k > 0$ e che la direttrice d sia orizzontale, con equazione $y = -k$.
- Traduciamo la condizione che un punto generico (x, y) sia equidistante da fuoco e direttrice

$$\mathrm{dist(P, F)} = \sqrt{\mathrm{x^2 + (y - k)^2}}$$

$$\mathrm{dist(P, d)} = \mathrm{|y + k|}.$$

Uguagliando le distanze ed elevando al quadrato si trova

$$x^2 + (y - k)^2 = (y + k)^2$$

che conduce a

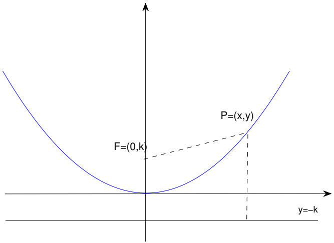
$$y = \frac{1}{4k} x^2.$$

L'origine è coincide con il cosidetto vertice della parabola così definita.

- Nel caso più generale in cui l'asse della parabola è una retta parallela all'asse delle ordinate si ottiene un espressione del tipo

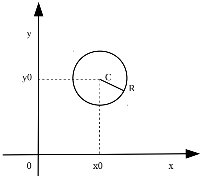
$$y = ax^2 + bx + c, \;\; a \neq 0.$$

- Il vertice della parabola ha coordinate $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, il fuoco ha coordinate $(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a})$, la direttrice ha equazione $y = \frac{1-\Delta}{4a}$ con Δ il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.



Circonferenza

- La circonferenza è il luogo geometrico dei punti P del piano che hanno distanza costante R da un punto fisso C detto centro.
- La distanza R si chiama raggio della circonferenza.
- Dette (x_0, y_0) le coordinate del centro C del cerchio di raggio R, per il Teorema di Pitagora le coordinate (x, y) dei punti P del cerchio soddisfano l'equazione
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$
- Svolgendo i calcoli e riordinando si ottiene
$$x^2 - 2x_0x + y^2 - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 = R^2$$
- da cui, posto $\alpha = -2x_0, \ \beta = -2y_0, \ \gamma = x_0^2 + y_0^2 - R^2$, si ha
$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$



Proporzioni, scale, percentuali

Esempio

Un treno viaggia alla velocità costante di 110 chilometri all'ora. Ci si chiede quanto tempo impiega a percorrere 242 chilometri.
Poichè il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato è costante si può scrivere indicando con T il tempo in minuti cercato

$$\frac{110}{60} = \frac{242}{T} \qquad \text{ovvero} \qquad T = \frac{60 \cdot 242}{110} = 132$$

ossia 2 ore e 12 minuti.

In generale si usa esprimere l'uguaglianza dei rapporti: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ usando la scrittura

$$a : b = c : d$$

che si chiama proporzione e che si legge "a sta a b come c sta a d".

Il rapporto tra due grandezze omogenee è un numero che non dipende dall'unità di misura adottata. Si usa spesso esprimere il rapporto di grandezze omogenee in forma percentuale, ossia scrivendo in modo che il denominatore sia 100.

Esempio

- In una classe di 25 studenti, 3 hanno l'influenza. Possiamo dire che $\frac{3}{25}$ della classe è malato. Possiamo anche dire che essendo
$$\frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 0.12$$
il 12% è ammalato.
Quando non è possibile esprimere un rapporto esattamente in forma percentuale, si può approssimarlo. Ad esempio
$$\frac{1}{3} \simeq 33\%$$
- Un fondo di investimento nel 2005 ha guadagnato il 25% in più dell'anno precedente mentre nel 2006 ha perso il 20% rispetto al 2005. Se C era il guadagno nel 2004, quanto ha guadagnato alla fine del 2006?
$$C + \frac{25}{100}C - \frac{20}{100}\left(C + \frac{25}{100}C\right) = \frac{5}{4}C - \frac{1}{5}\frac{5}{4}C = C$$

L'alfabeto greco

Maiuscole	Nome	Minuscole	Nome	Minuscole	Nome
Γ	Gamma	α	alfa	μ	mu
Δ	Delta	β	beta	ν	nu
Θ	Theta	γ	gamma	ξ	xi
Λ	Lambda	δ	delta	π	pi
Ξ	Xi	ϵ, ε	epsilon	ρ, ϱ	rho
Π	Pi	ζ	zeta	σ	sigma
σ	Sigma	η	eta	τ	tau
Υ	Upsilon	θ, ϑ	theta	φ, φ	phi
Φ	Phi	ι	iota	χ	chi
Ψ	Psi	κ	kappa	ψ	psi
Ω	Omega	λ	lambda	ω	omega