

Metodi Matematici per l'Economia anno 2017/2018

Gruppo B

Docente: Giacomo Dimarco

**Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Ferrara**



VNIVERSITÀ
DEGLI-STVDI
DI-FERRARA

[https://sites.google.com/a/unife.it/giacomo-dimarco-home-page/
giacomo.dimarco@unife.it](https://sites.google.com/a/unife.it/giacomo-dimarco-home-page/giacomo.dimarco@unife.it)

Corso di Laurea in Economia

Limiti e calcolo differenziale

- La nascita del calcolo differenziale la si deve a [I. Newton \(1643-1727\)](#) e [G.W. Leibniz \(1646-1716\)](#). I loro risultati, furono il culmine di un gran numero di contributi di matematici e fisici quali Fermat, Pascal, Galilei, Huygens, Torricelli e altri..
- I primi problemi che portarono allo sviluppo del calcolo differenziale sono stati di natura fondamentalmente geometrica e cinematica:
 - [problema delle tangenti](#), ossia la determinazione delle rette tangenti al grafico di una data funzione.
 - Il [problema delle velocità](#), ossia la determinazione delle velocità in ogni istante di un punto mobile su una curva.
 - Il [problema della quadratura](#), ossia la determinazione dell'area limitata da una data curva.
- Oggi il calcolo differenziale permette di trattare problemi non solo geometrici, fisici e ingegneristici ma anche in ambiti apparentemente lontani, per esempio in chimica, biologia, [economia](#), architettura ecc..
- Il concetto cardine che è alla base di questa costruzione è il concetto di [limite](#).

Esempi

Problema (A)

- Abbiamo già parlato di un approccio “naturale” per definire a^x , $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
- In particolare si possono considerare una successione di valori razionali $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $r_0, r_1, \dots$ sempre più vicini a x al crescere di $k \geq 0$.
- Per ogni $k \in \mathbb{N}$ possiamo valutare a^{r_k} . Possiamo quindi associare a a^x il valore a cui ci avviciniamo con a^{r_k} .
- In simboli potremmo scrivere

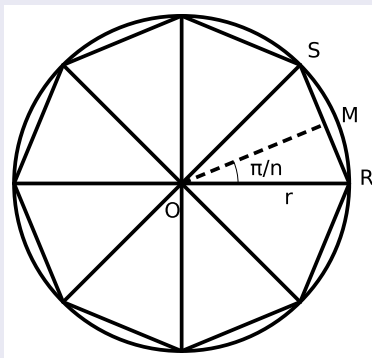
$$\lim_{\substack{r_k \rightarrow x \\ r_k \in \mathbb{Q}}} a^{r_k} = a^x, \quad \text{oppure} \quad \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ r_k \in \mathbb{Q}}} a^{r_k} = a^x$$

per indicare che a^{r_k} si avvicina arbitrariamente ad a^x quando $r_k \in \mathbb{Q}$ tende a x . Il valore a^x rappresenta il **limite** del procedimento.

- Questa definizione è ben posta? Ovvero: cambiando la sequenza di valori r_k , ma sempre approssimanti x , otteniamo il medesimo valore a^x o un valore differente?

Problema (B)

Vogliamo calcolare l'area di un cerchio di raggio r utilizzando il fatto di riuscire a calcolare l'area di poligoni e triangoli.



All'aumentare di n , l'area A_n del poligono pare avvicinarsi all'area A del cerchio, il perimetro P_n sembra tendere al valore della circonferenza $C = 2\pi r$ del cerchio.

Problema (B (continuazione))

Se R e S sono vertici adiacenti del poligono di centro O , allora l'area del poligono vale n volte l'area del triangolo ROS .

L'angolo $\widehat{ROS}$ vale $2\pi/n$ radianti, l'angolo $\widehat{ROM}$ è uguale a π/n radianti.

Abbiamo quindi

$$RM = r \sin(\pi/n), \quad OM = r \cos(\pi/n),$$

ne segue che l'area del triangolo ROS è

$$r^2 \sin(\pi/n) \cos(\pi/n)$$

e $A_n = nr^2 \sin(\pi/n) \cos(\pi/n)$.

Cosa possiamo dire di A_n al crescere di n ? In simboli

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = ?$$

La risposta che ci aspettiamo è

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nr^2 \sin(\pi/n) \cos(\pi/n) = \pi r^2 \quad \text{unità d'area.}$$

Problema (C)

Sappiamo che il grafico della retta di equazione $y = x$ passa per l'origine, come il grafico della funzione trigonometrica $y = \sin x$. L'espressione $\sin(x)/x$ non è definita in $x = 0$, possiamo però chiederci cosa succede alla funzione $f(x) = \sin(x)/x$ per valori sempre più prossimi a $x = 0$.

x	$\sin(x)/x$
0.1250	0.9974
0.0625	0.9993
0.0312	0.9998
0.0156	1.0000
0.0078	1.0000

Tabella: Esperimenti numerici per il calcolo di $f(x) = \sin(x)/x$ per valori di x prossimi a 0, si riportano solo le prima 4 cifre significative.

Problema (C (continuazione))

- Risultati analoghi si avrebbero per $x < 0$, infatti $f(x)$ è pari.
- Pur avendo pochi valori, si potrebbe ipotizzare che il rapporto $\sin(x)/x$ si avvicini sempre più al valore 1, per x sempre più vicini a $x = 0$.
- Questo fatto si esprime con la scrittura

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

- In altre parole $f(x) = \sin(x)/x$ si avvicina arbitrariamente a 1 quando x si avvicina a 0.
- Notiamo che i Problemi B e C sono strettamente legati. Infatti, posto $x = \pi/n$ abbiamo che x sarà sempre più piccolo al crescere di n e si avvicinerà quindi a 0. In sostanza possiamo scrivere

$$\lim_{x \rightarrow 0} \pi r^2 \frac{\sin x}{x} \cos x = \pi r^2,$$

che appare "ragionevole" essendo $\cos(0) = 1$.

Limiti di Successioni

- Una domanda naturale quando si analizza una successione è cosa succede quando i termini della successione diventano grandi? Cerchiamo di rispondere attraverso la nozione di **limite**.
- Siamo interessati alle caratteristiche dei termini della successione quando n **diventa grande**, ovvero a partire da un certo indice in poi.
- Queste caratteristiche si chiamano **proprietà asintotiche** quando sono possedute dai termini a partire da un certo indice n_0 in poi. Si parla allora di proprietà **definitivamente** possedute di una successione.
- Per esempio la successione $a_n = \frac{n-3}{n+1}$ è a termini **definitivamente** positivi in quanto per $n > 3$ i termini sono sempre positivi ma per $n \leq 3$ sono negativi. La successione $a_n = (2n - 5)^2$ è definitivamente crescente da $n > 2$.
- Una proprietà è asintotica per una successione se è posseduta da tutti i suoi elementi **tranne eventualmente da un numero finito di essi**.

Successioni convergenti

Esempio

- La successione $\{a_n\}$ definita da $a_n = 1 - 1/n$ non raggiunge mai il valore 1.
- Per n abbastanza grande il termine a_n è prossimo a 1 quanto si vuole dato che al crescere di n il termine $1/n$ diventa **arbitrariamente** piccolo.
- Come conseguenza a_n si avvicina **indefinitivamente** a 1.
- Ciò equivale a chiedere che la condizione

$$|a_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

valga almeno definitivamente per ogni $\varepsilon > 0$.

- Questa relazione è soddisfatta dagli indici n tali che $n > 1/\varepsilon$ e quindi definitivamente. Diciamo allora che la successione a_n **converge** a 1.

Successioni convergenti (continuazione)

Definizione

Una successione $\{a_n\}$ si dice *convergente* al numero reale A se per ogni $\varepsilon > 0$ la distanza di a_n da A è *definitivamente minore* di ε ossia se

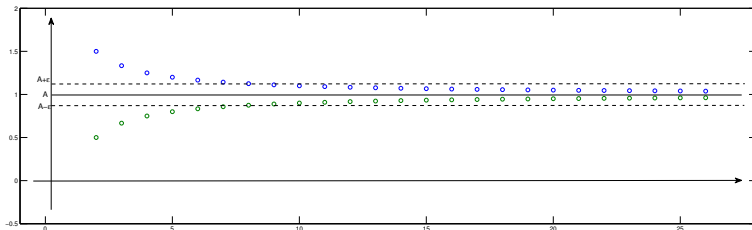
$$|a_n - A| < \varepsilon$$

definitivamente. In questo caso scriviamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$ oppure $a_n \rightarrow A$ per $n \rightarrow +\infty$.

- Ciò non significa che a_n debba raggiungere il valore A , semplicemente che vi si *avvicina indefinitamente*.
- Quando $a_n \rightarrow A$ e definitivamente $a_n \geq A$ si dice che a_n converge per eccesso ad A e si scrive $a_n \rightarrow A^+$ oppure $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A^+$.
- Analogamente nel caso $a_n \leq A$ definitivamente si parla di limite per difetto e si usa il simbolo A^- .

Successioni convergenti (continuazione)

- Graficamente dire che $a_n \rightarrow A$ è equivalente a dire che scelta comunque una striscia orizzontale con mezzeria alla quota A e ampiezza arbitrariamente piccola almeno da un certo termine in poi tutti i punti del grafico di coordinate (n, a_n) si trovano all'interno della striscia.



- Una successione che converge a zero si chiama **infinitesimo** oppure si dice che è **infinitesima**.
- Esempi di successioni infinitesime sono: $\{1/n\}$, $\{1/n^2\}$, $\{1/2^n\}$.
- Le affermazioni $a_n \rightarrow A$, $|a_n - A| \rightarrow 0$ sono equivalenti.

Successioni divergenti

Esempio

- Si consideri

$$a_n = 3n - 2.$$

Comunque si scelga il numero M , accade che esso venga definitivamente superato da a_n per n abbastanza grande.

- Infatti la condizione $a_n > M$ equivale a $3n - 2 > M$ ed è soddisfatta da tutti gli interi n tali che $n > (M + 2)/3$.
- Diciamo che questa successione **diverge positivamente** quando $n \rightarrow +\infty$.
- La successione

$$b_n = -3n + 2$$

soddisfa definitivamente la condizione $b_n < M$ comunque si scelga M . Si dice allora che b_n **diverge negativamente** quando $n \rightarrow +\infty$.

Successioni divergenti (continuazione)

Definizione

Una successione a_n si dice *divergente a $+\infty$* ($a -\infty$) se per ogni numero reale M si ha *definitivamente* $a_n > M$ ($a_n < M$). Si scrive allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty.$$

- Le successioni divergenti si chiamano *infiniti*.
- Esempi di successioni divergenti sono: $\{n\}$, $\{n^2\}$, $\{2^n\}$, $\{-n^3\}$.
- Se la successione $\{a_n\}$ è un infinito, allora la successione che ha come termine generale $b_n = 1/a_n$ ovvero il reciproco di a_n è un *infinitesimo*. Per esempio la successione $b_n = \frac{1}{3n-2}$ è infinitesima.

Successioni irregolari

- Esistono successioni che né divergono né convergono.
- Per esempio $a_n = (-1)^n$ continua ad oscillare tra -1 e 1 non può risultare definitivamente minore di un arbitrario ε .
- Oppure $b_n = (-1)^n n^2$ che non risulta definitivamente minore o definitivamente maggiore di un arbitrario numero M .

Definizione

Una successione a_n si dice *irregolare* o *oscillante* se né converge né diverge. In tal caso diciamo che il $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ non esiste.

- Osserviamo che benchè il limite di b_n non esista, se ci si limita a considerare i valori assoluti di b_n ritroviamo la successione $\{n^2\}$ divergente a $n \rightarrow +\infty$.
- Possiamo dire in questo caso che il limite b_n è infinito senza precisare il segno.
- Se il $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ si può dire che la successione *diverge*.

Proprietà del limite

Data una successione $\{a_n\}$ si ha che:

- La successione converge, ovvero $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$.
- La successione diverge, ovvero $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pm\infty$.
- La successione è irregolare, ovvero non esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Valgono i seguenti risultati:

Teorema

Se il limite di una successione esiste allora è unico

Teorema

Una successione monotona è regolare: converge o diverge. Ogni successione $\{a_n\}$ definitivamente crescente e superiormente limitata, oppure definitivamente decrescente e inferiormente limitata, converge.

Esempi di limiti fondamentali

Esempio

- Limiti di potenze:

$$a_n = n^\alpha \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0^+ & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

- Limite della successione geometrica:

$$a_n = q^n \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } |q| < 1 \\ \text{irregolare} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

- Limiti di logaritmi ($a > 0$, $a \neq 1$):

$$a_n = \log_a n \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } a < 1. \end{cases}$$

Il numero di Nepero

- Abbiamo già visto il caso della **capitalizzazione composta**: partendo da un capitale C_0 con un tasso di interesse r , dopo t anni abbiamo la cifra di $C_0(1+r)^t$.
- Supponiamo ora che la banca ci assicuri degli interessi alla fine di m periodi fissi in un anno con tasso r/m e di reinvestire immediatamente l'interesse percepito.
- Dopo t anni abbiamo nel conto

$$C_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

- Per $m \rightarrow +\infty$ stiamo calcolando l'interesse in modo continuo, parliamo allora di **capitalizzazione continua** e il valore $C(t)$ vale

$$C(t) = \lim_{m \rightarrow +\infty} C_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = \lim_{m \rightarrow +\infty} C_0 \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/r} \right]^{rt}.$$

Posto $n = m/r$ abbiamo

$$C(t) = C_0 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{rt}.$$

Consideriamo la successione $x_n = (1 + 1/n)^n$, $n \geq 1$. Si può dimostrare che

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1},$$

ovverosia la successione è monotona. Inoltre per $n \geq 1$

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 3.$$

La successione è anche limitata e quindi ha limite finito,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

dove e indica il numero irrazionale (*base dei logaritmi naturali* o *costante di Nepero*) le cui prime cifre sono $e = 2.71828182845905 \dots$

Per il nostro investimento avremo quindi

$$C(t) = C_0 e^{rt}.$$

Osserviamo che come conseguenza del precedente limite abbiamo anche

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\lambda n} = e^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Gerarchie

Teorema (Gerarchie)

Ogni infinito esponenziale è d'ordine superiore a ogni infinito potenza. Ogni infinito potenza è d'ordine superiore ad ogni infinito logaritmico. Ossia per ogni $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^n}{n^\beta} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\beta}{(\log n)^\gamma} = +\infty$$

Teorema (Criterio del rapporto)

Sia $\{a_n\}$ una successione con termine generale sempre positivo e supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

dove L può essere anche $+\infty$.

Se $L > 1$ allora $a_n \rightarrow +\infty$, se $0 \leq L < 1$ allora $a_n \rightarrow 0$

Se $L = 1$ non si può concludere nulla.

Punti di accumulazione

- Data $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ per quali punti x_0 possiamo considerare $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$?
- Non è necessario che $x_0 \in \text{dom}(f)$, è però essenziale che, comunque ci avviciniamo a x_0 , ci siano punti $x \in \text{dom}(f)$ in cui poter calcolare $f(x)$.

Definizione (Punto di accumulazione)

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto di accumulazione se $\forall I(x_0, r)$, con $r > 0$, $\exists x \in \text{dom}(f) \cap I(x_0, r) \setminus \{x_0\}$.

- Se $x_0 = +\infty$, vogliamo che $\forall a \in \mathbb{R}$, $(a, +\infty) \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$
- Se $x_0 = -\infty$ si desidera che $\forall a \in \mathbb{R}$, $(-\infty, a) \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$.
- x_0 è il punto verso cui si “accumulano”, si “avvicinano” i valori x .
- Nel caso in cui $x_0 \in A$ ma non di accumulazione, x_0 si dice *isolato*. Per tali punti non ha senso porsi la questione del limite.

La definizione di limite

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione di A , abbiamo

Definizione (Informale)

Si dice che f tende al limite $L \in \mathbb{R}$ quando x tende a x_0 e si scrive

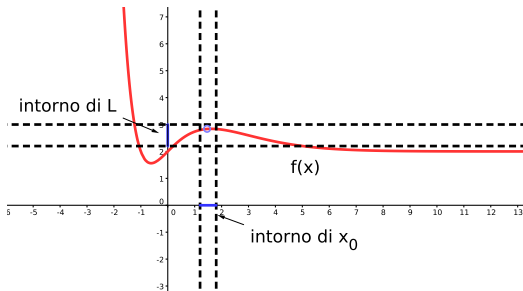
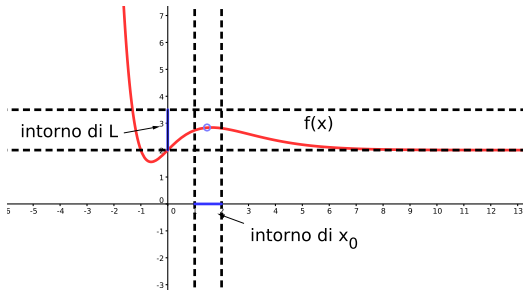
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se f si avvicina arbitrariamente a L quando x si avvicina a x_0 .

Sostituiamo “si avvicina” con il linguaggio degli intorni,

Definizione (Uso degli intorni)

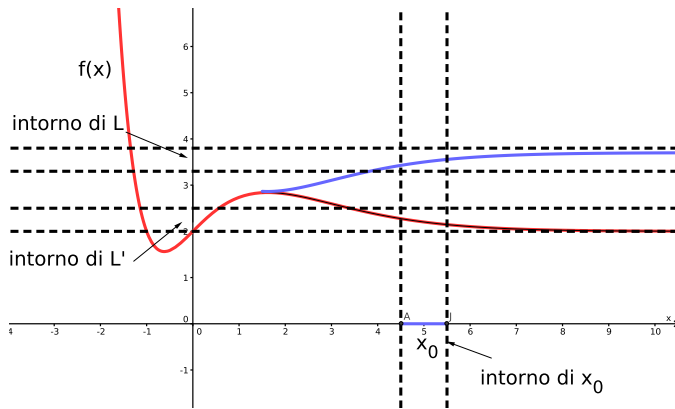
Diremo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, con $L \in \mathbb{R}$, quando per ogni intorno $I(L; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, esiste un intorno $I(x_0; \delta_\varepsilon)$, $\delta_\varepsilon > 0$, tale che se $x \in I(x_0; \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\}$, $x \in \text{dom}(f)$, allora $f(x) \in I(L; \varepsilon)$.



Teorema (Unicità del limite)

Una funzione non può avere due limiti differenti, se

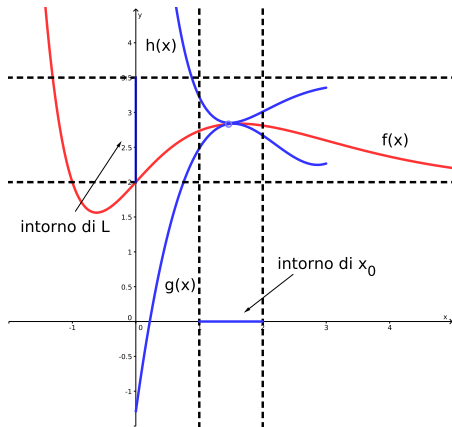
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L'$, allora necessariamente $L = L'$.



Teorema (Teorema di compressione o dei due carabinieri)

Se $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, sono tali che $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ per $x \in I(x_0, r) \setminus \{x_0\}$, x_0 punto di accumulazione di A , $r > 0$, e se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Dal punto di vista geometrico la situazione è illustrata nella Figura



Permanenza del segno e limiti di funzioni monotone

Teorema (Permanenza del segno)

Siano $f : A \mapsto \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione per A . Se $\lim f(x) = L \neq 0$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, $x \neq x_0$, $f(x)$ ha lo stesso segno di L .

Teorema (Limiti di funzioni monotone)

Le funzioni monotone definite su un intervallo (a, b) (oppure $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$) hanno sempre limite (finito o infinito) agli estremi.

Limiti all'infinito

Definizione (informale)

Diremo che f tende al limite $L \in \mathbb{R}$ quando x tende a più infinito, e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L,$$

se al “crescere di x , f si avvicina sempre più a L ”. In modo analogo si dice che f tende al limite $L \in \mathbb{R}$ quando x tende a meno infinito, e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L,$$

se al “crescere di $|x|$ con x negativa, f si avvicina sempre più a L ”.

Definizione (uso degli intorni)

Diremo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (rispettivamente $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$), con $L \in \mathbb{R}$, quando per ogni intorno $I(L; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_\varepsilon > 0$, tale che se $x > \delta_\varepsilon$ (risp. $x < -\delta_\varepsilon$) e $x \in \text{dom}(f)$, allora $f(x) \in I(L; \varepsilon)$.

Limiti infiniti

Definizione (informale)

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione di A , diremo che f tende a più infinito ($+\infty$) per x che tende a x_0 , e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty,$$

se f cresce indefinitamente quando x si avvicina a x_0 . Analogamente diremo che f tende a meno infinito ($-\infty$) per x che tende a x_0 , e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty,$$

se $|f|$ cresce indefinitamente con f negativa quando x si avvicina a x_0 .

Definizione (uso degli intorni)

Diremo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ (risp. $-\infty$), quando $\forall M > 0$, esiste $\delta_M > 0$, tale che se $x \in I(x_0; \delta_M) \setminus \{x_0\}$ e $x \in \text{dom}(f)$, allora $f(x) > M$ (risp. $f(x) < M$).

Limite destro e sinistro

Definizione (Limite destro e limite sinistro (informale))

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, si dice che la funzione f ha **limite destro** L per x che tende a x_0 , e si scriverà

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

se f si avvicina arbitrariamente a L quando x si avvicina ad x_0 assumendo valori maggiori di x_0 . Analogamente si dice che f ha **limite sinistro** L , e si scriverà

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

se f si avvicina arbitrariamente a L quando x si avvicina ad x_0 assumendo valori minori di x_0 .

Naturalmente abbiamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se e solo se esistono il limite destro e il limite sinistro e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

Limite destro e sinistro II

Definizione (Uso degli intorni)

Diremo che $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ (rispettivamente $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$), con $L \in \mathbb{R}$, quando per ogni intorno $I(L; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $x \in [x_0 - \delta_\varepsilon, x_0] \setminus \{x_0\}$ (rispettivamente $x \in [x_0, x_0 + \delta_\varepsilon] \setminus \{x_0\}$) $x \in \text{dom}(f)$, allora $f(x) \in I(L; \varepsilon)$.

Le definizioni dei limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

possono essere dedotte direttamente dalle definizioni precedenti.

Teorema (Leggi dei limiti)

Sia $c \in \mathbb{R}$ una costante, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e x_0 un punto di accumulazione di A .

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$, con $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, allora

- (i) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 + L_2$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 - L_2$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 L_2$,
- (iv) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1/L_2$, purchè $L_2 \neq 0$,
- (v) $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c L_1$.

Inoltre, se esiste un intorno J di x_0 tale che

$$\forall x \in \text{dom}(f) \cap J \setminus \{x_0\}, \quad f(x) \leq g(x)$$

allora

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2.$$

Teorema (Leggi dei limiti II)

Vale la seguente *aritmetizzazione parziale* sulla retta estesa $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$\text{se } L \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{ll} +\infty + L = +\infty & -\infty + L = -\infty \\ +\infty + \infty = +\infty & -\infty - \infty = -\infty \\ (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty & (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty \\ (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty & (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty \\ \frac{L}{\pm\infty} = 0 & \frac{L}{0} = \pm\infty \end{array} \right.$$

$$\text{se } L \neq 0 \left\{ \begin{array}{ll} (+\infty) \cdot L = +\infty (L > 0) & (+\infty) \cdot L = -\infty (L < 0) \\ (-\infty) \cdot L = -\infty (L > 0) & (-\infty) \cdot L = +\infty (L < 0) \end{array} \right.$$

Non vengono invece definiti i risultati delle seguenti operazioni

$$+\infty - \infty, 0 \cdot (\pm\infty), \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

che vanno di volta in volta studiati e vengono detti *indeterminati*.

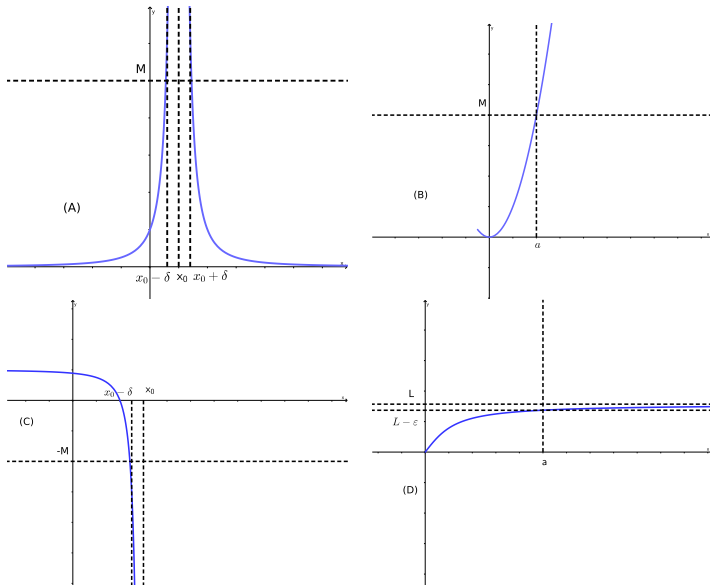


Figura: Illustrazione grafica di alcuni limiti, (A) $f \rightarrow +\infty$, per $x \rightarrow x_0$; (B) $f \rightarrow +\infty$, per $x \rightarrow +\infty$; (C) $f \rightarrow -\infty$, per $x \rightarrow x_0^-$; (D) $f \rightarrow L$, per $x \rightarrow +\infty$.

Esempio

(A volte i limiti non esistono) Consideriamo la funzione segno definita per $x \neq 0$,

$$\text{sign}(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

non esiste il limite

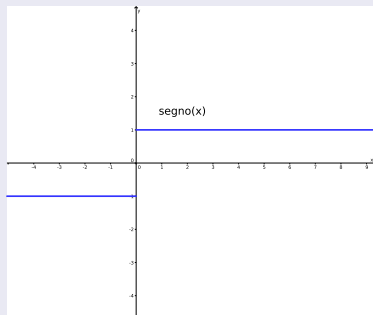
$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sign}(x),$$

infatti in ogni intorno destro di $x_0 = 0$, quindi per $x \in (0, r)$ con $r > 0$, si ha $\text{sign}(x) = 1$ mentre in ogni intorno sinistro, per $x \in (-r, 0)$ con $r > 0$, $\text{sign}(x) = -1$.

Esempio

Consideriamo ancora la funzione segno, $\text{sign}(x) = |x|/x$, $x \neq 0$. Per ogni $x_0 > 0$ è evidente che $\lim_{x \rightarrow x_0} \text{sign}(x) = 1$, e viceversa $\forall x_0 < 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \text{sign}(x) = -1$. Cosa avviene per $x \rightarrow 0$? Il limite non esiste, i valori di $\text{sign}(x)$ restano infatti costanti e uguali al valore **1** avvicinandosi da destra a $x_0 = 0$, restano costanti e uguali al valore **-1** avvicinandosi da sinistra a $x_0 = 0$. Si ha invece

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sign}(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sign}(x) = -1.$$



Asintoti

- Informazioni sul grafico di una funzione possono essere dedotte dai limiti infiniti o dai limiti all'infinito.
- Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dove A è un intervallo di $\mathbb{R}$ non limitato superiormente e se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R},$$

si dice che la retta di equazione $y = L$ è un *asintoto orizzontale* (a destra). Analogamente se A non è limitato inferiormente e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R},$$

si dice che la retta di equazione $y = L$ è un *asintoto orizzontale* (a sinistra).

- Per esempio, dalla definizione delle funzioni trigonometriche elementari,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \pi/2,$$

ne segue che la retta $y = \pi/2$ è un asintoto orizzontale.

Asintoti II

- Sia invece $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$, se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

si dice che la retta di equazione $x = a$ è un *asintoto verticale* (a sinistra, cioè a sinistra del grafico di f).

- Analogamente l'asintoto verticale (a destra) ci sarà nel caso in cui $b \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$$

e avrà equazione $x = b$.

- Per esempio la retta di equazione $x = 0$ è un asintoto verticale, tanto a destra quanto a sinistra, per la funzione $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$.
- Sia invece f definita su un intervallo I non limitato superiormente, diremo che la retta di equazione $y = mx + q$, $m \neq 0$ (quindi una retta non parallela all'asse delle ascisse) è un *asintoto obliquo* (a destra) se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - q) = 0.$$

Asintoti III

- Analogamente si definisce l'asintoto obliquo (a sinistra) facendo semplicemente intervenire il limite per $x \rightarrow -\infty$.
- L'interpretazione geometrica è semplice, i grafici della funzione f e di un asintoto tendono ad avvicinarsi sempre di più.
- Per il calcolo dell'asintoto obliquo si osserva che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x} = 0,$$

da cui

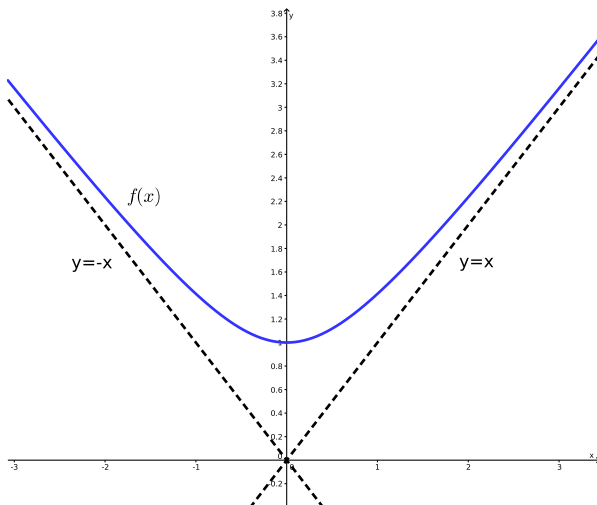
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = q.$$

Per esempio per la funzione $f(x) = \sqrt{(x^2 + 1)}$, $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(x^2 + 1)}}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0.$$

Abbiamo quindi un asintoto obliquo di equazione $y = x$. Essendo f una funzione pari si ha anche l'asintoto obliquo $y = -x$.

Asintoti IV



Continuità

Adesso cambiamo prospettiva e preoccupiamoci del caso in cui il punto di accumulazione appartenga al dominio della funzione in esame.

Definizione (Funzione continua in un punto)

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 punto di accumulazione di A , la funzione f è detta continua nel punto x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Osserviamo che,

- il limite deve esistere;
- il limite deve essere finito (deve appartenere a $\mathbb{R}$);
- il limite deve coincidere con $f(x_0)$.
- Quando il limite è sostituito dal limite sinistro o dal limite destro si parla, rispettivamente, di *continuità a sinistra* o di *continuità a destra*.

Continuità: proprietà

- Se la funzione f è continua in tutti i punti del dominio A si dice che la funzione è continua in A . Se il dominio è $I = [a, b]$, una funzione è continua in I se è continua in tutti i punti di $[a, b]$.
- La continuità agli estremi dell'intervallo è da considerarsi come continuità a destra, per $x = a$, e continuità a sinistra per $x = b$.
- Le funzioni non continue in un punto x_0 si dicono *discontinue* e tale punto è detto *punto di discontinuità*.
- Non ha senso porsi la questione della continuità nel punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 1/x$. La funzione non è infatti definita in tale punto e risulta continua in tutti i punti del suo dominio di definizione.
- Le funzioni *continue* su un intervallo corrispondono a funzioni che possiedono un *grafico* che può essere disegnato “senza staccare la matita dal foglio”. Al contrario le funzioni *discontinue* mostrano un *grafico* “spezzato”.

Classificazione delle discontinuità

- Quali situazioni possono verificarsi nel caso in cui la funzione $f(x)$ non sia continua in un punto $x_0 \in \text{dom}(f)$?
- Indicando con L il limite eventuale, con L^+ e L^- , il limite destro e il limite sinistro, l'albero decisionale per la continuità o la discontinuità è il seguente

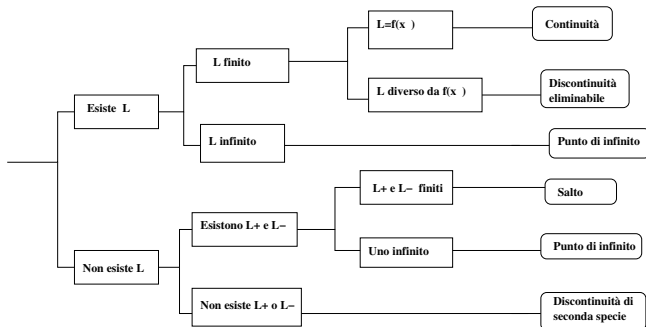
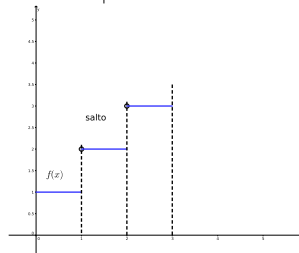
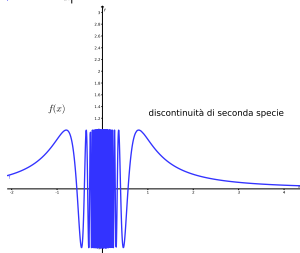
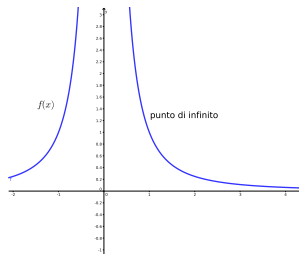
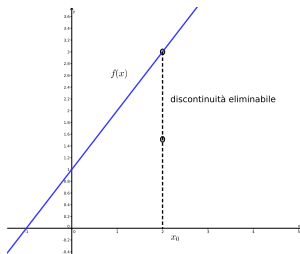


Figura: Albero decisionale per continuità e discontinuità.

Esempi di discontinuità



Limiti di funzioni elementari

- Potenze.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

quando $\alpha \in \mathbb{N}$, si può calcolare anche

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{per } n \text{ pari} \\ -\infty & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

- Logaritmi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0 \quad (x_0 > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } a < 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

Limiti di funzioni elementari (continuazione)

- Esponenziali.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$$

Inoltre,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

- Funzioni trigonometriche. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \sin(x_0) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos(x) = \cos(x_0).$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin(x) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos(x),$$

non esistono.

Esempio

(Operazioni sui limiti) Le leggi dei limiti permettono sia di calcolare nuovi limiti che di dimostrarne l'esistenza. Per esempio, è semplice verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Abbiamo allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2) = 1 \quad (\text{legge } (i)),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3 \cos x = 3 \quad (\text{legge } (v)),$$

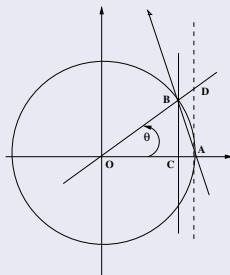
$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2) 3 \cos x = 3 \quad (\text{legge } (iii)),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^2)}{3 \cos x} = 1/3 \quad (\text{legge } (iv)).$$

Anche $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ poteva essere dedotto da $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, applicando la legge del prodotto per il calcolo di $x^2 = x \cdot x$.

Esempio

(Risolviamo il Problema C) Sia data la circonferenza unitaria con $R = 1$ e l'angolo $0 < \theta < \pi/2$.



- La lunghezza dell'arco $\widehat{AB}$ è θ .
- La lunghezza del segmento BC vale $\overline{OB} \sin \theta = \sin \theta$.
- Dunque $\overline{BC} < \overline{AB} < \text{lunghezza}(\widehat{AB}) = \theta$ quindi $\sin \theta < \theta$ o $\sin(\theta)/\theta < 1$.
- Si ottiene $\text{lunghezza}(\widehat{AB}) = \theta < \overline{AD} = \overline{OA} \tan \theta = \tan \theta$ dove $\overline{AD} = \overline{OA} \tan \theta$.

Esempio

(Risolviamo il Problema C - continuazione) Abbiamo quindi

$$\frac{\sin \theta}{\theta} < 1, \quad \theta < \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta}$$

per $\theta \in (0, \pi/2)$. Per $\theta \in (-\pi/2, 0)$ utilizzando le simmetrie delle funzioni trigonometriche si arriva alla stessa coppia di disuguaglianze, quindi

$$\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1, \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\}.$$

Applicando il Teorema di compressione con $g(x) = \cos x$, $f(x) = \sin(x)/x$, $h(x) = 1$ si ottiene, da $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Continuità e operazioni algebriche

Teorema

Siano f e g funzione continue in un intervallo $I \in \mathbb{R}$. Allora la funzione somma $f + g$ e la funzione prodotto fg sono continue in I . Se $g \neq 0$ in I , allora anche la funzione quoziente f/g è continua in I .

Teorema

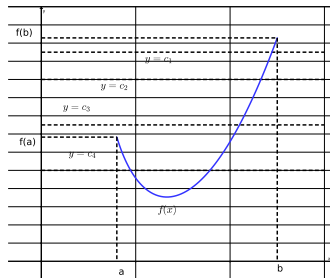
Se f è continua in $x_0 \in I$ e g è continua in $y_0 = f(x_0)$, allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in x_0 .

Esempio

Le tre funzioni $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = \log(1 + x^4)$, $h(x) = \sin(e^{-x} + x)$ composte di funzioni elementari sono continue nel loro dominio di definizione.

Importanza della continuità

- La continuità comporta notevoli conseguenze sul comportamento e sul grafico della quantità in esame.
- Supponiamo nel seguito che f sia una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e che le seguenti ipotesi siano verificate
 - (I1) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$;
 - (I2) f continua in ogni punto $x \in [a, b]$.
- Per la continuità il grafico della funzione f passando dal punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ “deve” passare almeno una volta per i punti di ordinata compresa tra $f(a)$ e $f(b)$.



Teorema (Teorema dei valori intermedi)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Se y è un numero reale compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ allora esiste almeno un numero reale $r \in (a, b)$ tale che $f(r) = y$.

Sintetizzando, le funzioni continue trasformano intervalli di $\mathbb{R}$ in intervalli di $\mathbb{R}$.

Teorema (Teorema di Bolzano o degli zeri)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$. Se i valori di f agli estremi hanno segno opposto, cioè se $f(a)f(b) < 0$, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

- I due Teoremi non dicono nulla sull'unicità, sicuramente un punto esiste, ma potrebbero esistere altri.
- Se la funzione f è strettamente monotona lo zero è unico.

Metodo di bisezione, dimostrazione Teorema degli zeri

- Diamo una dimostrazione costruttiva fornendo un algoritmo che determina il punto c , utilizzeremo il *metodo di bisezione*.
- Osserviamo che non è limitativo prendere $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$.
- Posto, $a_0 = a$, $b_0 = b$ e chiamato $m_0 = (a_0 + b_0)/2$ il punto medio del segmento di estremi a_0 e b_0 , valutiamo $f(m_0)$. Avremo
- se $f(m_0) = 0$ allora uno zero è m_0 , quindi $c = m_0$;
- se $f(a_0)f(m_0) < 0$ allora uno zero sta nell'intervallo $[a_0, m_0] = [a_1, b_1]$;
- se $f(a_0)f(m_0) > 0$ allora uno zero sta nell'intervallo $[m_0, b_0] = [a_1, b_1]$.
- Indichiamo con $[a_1, b_1]$ il nuovo intervallo in cui cercheremo c , a meno che $f(m_0) = 0$, avremo per costruzione che $f(a_1)f(b_1) < 0$.

Metodo di bisezione, dimostrazione Teorema degli zeri II

- Ripetiamo la stessa operazione in modo ricorsivo, calcoliamo il punto medio $m_1 = (a_1 + b_1)/2$ e selezioniamo il sottointervallo che conservi agli estremi valori opposti della funzione f .
- Si generano due successioni $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (estremi dei sottointervalli) con $a_0 = a$, $b_0 = b$ e, per costruzione,

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_1 \leq b_0 = b, \quad f(a_n)f(b_n) < 0 \quad n \geq 0,$$

- Inoltre

$$b_n - a_n = \frac{1}{2} (b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{4} (b_{n-2} - a_{n-2}) = \dots = \frac{b - a}{2^n}.$$

- Abbiamo quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b - a}{2^n} = 0,$$

da cui si deduce $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = c$ con $f(c) = 0$.

Valgono infine i seguenti risultati.

Teorema (Teorema di Weierstrass)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$, allora esiste un numero reale positivo k tale che

$$|f(x)| \leq k, \quad \forall x \in [a, b].$$

Esistono inoltre due punti x_0 (punto di minimo assoluto) e x_1 (punto di massimo assoluto) tali che

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \quad \forall x \in [a, b].$$

Teorema

Sia $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ una funzione biunivoca e continua. Allora la funzione inversa g è continua nell'intervallo (c, d)