Metodi Matematici per l'Economia anno 2017/2018
Gruppo B

Docente: Giacomo Dimarco

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Ferrara

VNIVERSITÀ
DEGLI·STVDI
DI·FERRARA

https://sites.google.com/a/unife.it/giacomo-dimarco-home-page/
giacomo.dimarco@unife.it

Corso di Laurea in Economia

Il concetto di funzione

Nella prima parte del corso ci occuperemo prevalentemente di un solo "oggetto matematico", le funzioni del tipo

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

con A sottoinsieme dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Nella scrittura sopra abbiamo:

- Grandezze che siamo liberi di scegliere arbitrariamente nell'insieme A. Tali grandezze si dicono *variabili*.
- Grandezze nell'insieme $\mathbb{R}$ che sono associate alle variabili o *funzione delle variabili* di A.

Per esempio:

- Quando comperiamo del pane sappiamo che il costo finale dipenderà dalla quantità e dal tipo di pane scelto.
- La *legge di Boyle* per un gas è data da $p = C/v$, dove p è la pressione del gas, v il volume occupato e C una opportuna costante.
- I ricavi di un'azienda dipendono dalle vendite.

Definizione (Funzione)

Siano A e B due insiemi non vuoti, una funzione f definita in A a valori in B è una legge di natura qualunque che a ogni elemento x di A fa corrispondere uno e un solo elemento $y = f(x)$ di B.

Formalmente, utilizzeremo uno dei due simboli

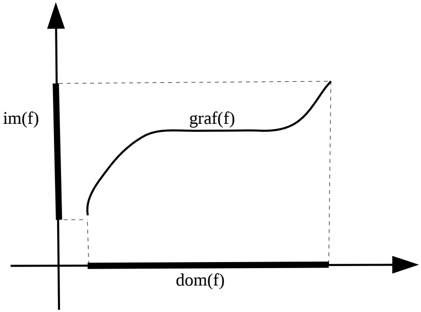
$$f : A \to B \quad o \quad A \xrightarrow{f} B.$$

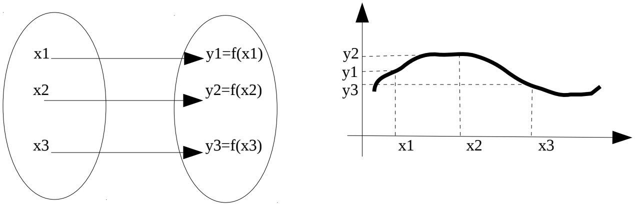
- L'insieme A si chiama *dominio* o *insieme di definizione* di f, si indicherà con $dom(f)$.
- L'insieme B in cui la funzione prende i propri valori si chiama *codominio*.
- L'insieme di tutti i possibili valori $f(x)$, cioè il sottoinsieme di B di elementi che sono associati ad almeno un elemento del dominio, viene chiamato *immagine* di f indicata come $im(f)$ oppure $f(A)$ dove A è il dominio.
- In termini di insiemi, per $f : A \to B$, si scrive

$$im(f) = \{y \in B : \ y = f(x), \ x \in A\}.$$

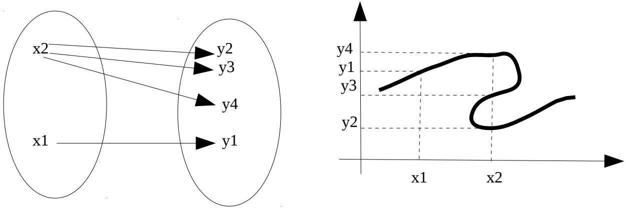
- Nel caso in cui $B = \mathbb{R}$ la funzione si dice *reale*, se $dom(f) \subseteq \mathbb{R}$ la funzione si dice *di variabile reale*.
- Il *grafico* di una funzione $f : A \to B$ è il sottoinsieme dell'insieme prodotto $A \times B$ composto dalle coppie $(x, f(x))$ per ogni $x \in A$ indicato con $graf(f)$.
- Per $f : A \to B$ si ha quindi

$$graf(f) = \{(x, y) \in A \times B \; : \; x \in A, \; y = f(x)\}.$$





Funzione



Non è una funzione

Successioni

- Il termine successione richiama alla mente un insieme di oggetti che possono essere elencati uno dopo l'altro.
- Elencare gli oggetti di un insieme significa assegnare loro un posto, ossia etichettarli con un numero naturale.
- L'elemento che nell'elenco occupa la posizione n is indica con a_n e la legge che ad ogni numero naturale n assegna a_n si indica con il simbolo:

$$n \longmapsto a_n.$$

- Si dice che a_n è il termine generale della successione e che n è l'indice. L'insieme formato dai termini

$$a_0, a_1, .., a_n, ..$$

  si indica con il simbolo $\{a_n\}$ e prende il nome di successione.
- Siamo particolarmente interessati al caso in cui $\{a_n\}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

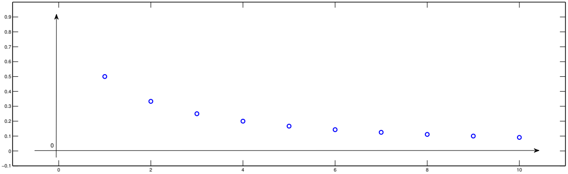
Definizione (Successione)

Si chiama *successione a valori reali* *una legge che a ogni numero naturale associa un numero reale, ossia una funzione che ha come dominio* $\mathbb{N}$ *e come codominio* $\mathbb{R}$.

- Frequentemente una successione a valori reali può essere assegnata mediante formule esplicite del tipo

$$a_n = \frac{1}{n+1}, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

- Il dominio di una successione può essere anche un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, è sufficiente che contenga tutti i numeri naturali da un certo n_0 in poi.
- Per rappresentare $\{a_n\}$, in ascissa si mettono i valori dell'indice $n = 0, 1, 2..$, in ordinata i corrispondenti valori $a_0, a_1, a_2, ...$ Si ottiene una sequenza di punti di coordinate (n, a_n) che costituiscono il grafico della successione.



Successioni per ricorrenza

Le successioni possono essere definite attraverso un procedimento ricorsivo articolato in due fasi

- Si assegna il valore a_0 di partenza.
- Si definisce una legge che permette di conoscere a_{n+1} a partire da a_n.

Esempio

Capitalizzazione semplice.

- La successione aritmetica con primo termine a e ragione r è definita per ricorrenza da $$a_0 = a, \qquad a_{n+1} = a_n + r.$$
- S'impiega un capitale C a interesse semplice per n anni. Il tasso di interesse sia $r > 0$. Ogni anno maturano interessi Cr.
- Dopo n anni la somma disponibile, detta montante è $a_n = C + Crn = C(1 + rn)$. Possiamo quindi dire che è assegnata una legge che associa ad ogni anno il valore finale del capitale
$$n \longmapsto a_n = C(1 + rn).$$
- La successione $\{a_n\}$ è definita per ricorrenza: $a_0 = C$ e $a_{n+1} = a_n + Cr$.

Successioni geometriche

- Nelle applicazioni economiche si incontrano molto spesso successioni $\{a_n\}$ per le quali il rapporto tra i termini consecutivi è costante.
- Tali successioni si chiamano geometriche e il valore costante del rapporto tra termini consecutivi della successione si chiama ragione.
- Possiamo rappresentare il termine generale d'una successione geometrica come $a_n = aq^n$. Dove il primo termine è a_0 e q è la ragione.
- La successione può anche essere definita ricorsivamente tramite $a_0 = a$ e $a_{n+1} = a_n q$.
- In una successione geometrica la variazione percentuale tra termini consecutivi è sempre la stessa. Infatti

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{aq^n - aq^{n-1}}{aq^{n-1}} = q - 1$$

Successioni geometriche II

- q prende anche il nome di coefficiente di variazione e $p = q - 1$ di tasso di variazione percentuale tra termini consecutivi.
- Il termine generale di una successione geometrica può essere scritta in termini di tasso di variazione percentuale: $a_n = a(1 + p)^n$.
- Ad esempio a_n rappresenta ammontare di una popolazione dopo n anni di sviluppo ($p > 0$) o di contrazione ($-1 < p < 0$), mentre a rappresenta la popolazione iniziale.
- Oppure a_n può rappresentare l'ammontare delle vendite di un'azienda che all'anno zero fatturava a e registra un incremento delle vendite in percentuale p, regolare nel tempo.
- Un altro esempio è dato da a_n che rappresenta l'ammontare del prodotto interno lordo per l'anno n in un sistema economico con tasso di crescita p e che all'anno zero aveva p.i.l. pari ad a.

Esempio

Capitalizzazione composta.

- Si ha un capitale C investito per n anni al tasso di interesse r.
- Supponiamo che il capitale dopo il primo anno sia reinvestito e che gli interessi Cr siano aggiunti al capitale da reinvestire e che quindi producano a loro volta interessi.
- Alla fine del primo anno si avrà il capitale finale, detto montante, $C_1 = C(1 + r)$.
- Supponendo di fare questa operazione per n anni e indicando con C_n il capitale alla fine dell'anno $n-$esimo avremo

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-1}r = C_{n-1}(1 + r) = C(1 + r)^n.$$

- Si ottiene perciò una successione geometrica di ragione $1 + r$.

Funzioni lineari e lineari affini

- Il costo e la quantità di un prodotto acquistato sono legate da una relazione molto semplice.
- Indicando con y il costo (in euro), con x la quantità acquistata (con la sua relativa unità di misura) e con m il prezzo per unità si ottiene una relazione del tipo $y = mx$.
- Questa legge è detta di proporzionalità diretta. Due quantità sono quindi direttamente proporzionali se il loro rapporto è costante: $y/x = m$.
- Esiste un'altra importante proprietà che caratterizza queste quantità: se $y_1 = mx_1$ e $y_2 = mx_2$ allora $y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2)$, ovvero sono delle funzioni lineari.

Definizione

Una funzione $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ *si dice lineare se per ogni* $x_1, x_2, x, a \in \mathbb{R}$, *si ha*

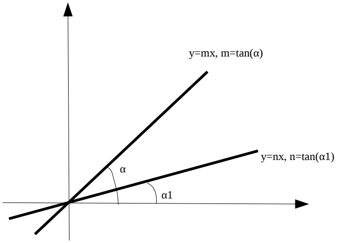
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \qquad f(ax) = af(x).$$

Funzioni lineari e lineari affini II

Teorema

Una funzione $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ è lineare se e solo se è della forma $f(x) = mx, \;\; m \in \mathbb{R}$.

Il grafico di questa funzione è rappresentato nel piano da una retta passante per l'origine. Il numero m si chiama coefficiente angolare o pendenza della retta. Se usiamo la stessa unità di misura sui due assi, m è legato all'angolo α che la retta forma con il semiasse positivo delle x dalla relazione $m = \tan(\alpha)$, dove $\tan(\alpha)$ è la tangente trigonometrica di α.

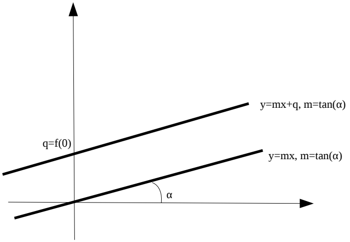


Funzioni lineari e lineari affini III

Per abuso di linguaggio, talvolta si chiamano lineari anche le funzioni

$$f(x) = mx + q$$

il cui grafico è una retta non verticale, che si ottiene traslando il grafico della funzione lineare $f : x \longmapsto mx$ di q unità verso l'alto se q è positivo, o di $-q$ unità verso il basso se q è negativo. Il numero $q = f(0)$ si chiama ordinata all'origine o intercetta. Queste funzioni si chiamano lineari affini.



Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche

- Sia $f : A \to B$ e $b \in B$. Un elemento $x \in A$ si chiama *controimmagine* di b tramite f quando $f(x) = b$.
- Se $Y \subseteq B$, si chiama controimmagine di Y tramite f l'insieme denotato con $f^{-1}(Y)$ costituito da tutte le controimmagini di tutti gli elementi $b \in Y$,

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \ : \ f(x) \in Y\}.$$

- Se $im(f) = B$ la funzione f è detta *suriettiva*.
- Preso $b \in B$, se l'equazione $f(x) = b$ per $x \in A$ ha al più una soluzione la funzione si dice *iniettiva*. L'iniettività può essere scritta formalmente come

$$\forall x, y \in A \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

oppure, ricordando le proprietà dell'implicazione,

$$\forall x, y \in A \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

cioè elementi distinti si trasformano in elementi distinti.

- Una funzione è detta *biunivoca* o *biettiva* quando è suriettiva e iniettiva.
- Da quanto detto risulta che due funzioni f, g sono *uguali* se e solo se $dom(f) = dom(g)$ e inoltre $\forall\, x \in dom(f) \quad f(x) = g(x)$.

Esempio

(Funzione iniettiva)

- La legge che associa a ogni elemento $n \in \mathbb{N}$ l'elemento $2n \in \mathbb{N}$ (moltiplicazione per due) è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.
- Essa identifica la successione $0, 2, 4, \dots$ ossia $\{2n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- Il dominio è $\mathbb{N}$, l'immagine è composto dagli interi naturali pari compreso lo zero.
- Rispetto a $\mathbb{N}$, la funzione non è suriettiva, qualsiasi intero dispari non è immagine di niente, mentre la funzione è iniettiva,

$$f(n) = 2n = f(m) = 2m \Leftrightarrow n = m \in \mathbb{N}.$$

- Il grafico di questa funzione nel piano cartesiano usuale è composto da infiniti punti di coordinate $(n, 2n)$ con n intero naturale.

Esempio

(Funzione suriettiva)

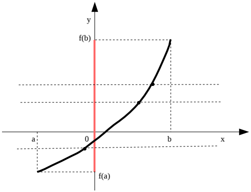
- Sia A l'insieme degli italiani.
- La legge che associa a ogni elemento di A il suo gruppo sanguigno è una funzione di A nell'insieme dei simboli $\{\text{A}, \text{AB}, \text{B}, 0\}$.
- In questo caso la funzione è suriettiva ma non iniettiva (ci sono più italiani con il medesimo gruppo sanguigno).

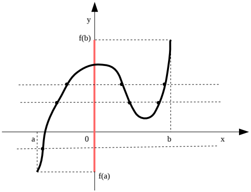
Esempio

(Funzione biunivoca)

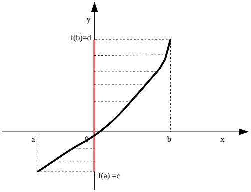
- Consideriam la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che associa a ogni x il suo quadrato x^2.
- La funzione non è iniettiva: sia x che $-x$ condividono il medesimo quadrato, per esempio $(-2)^2 = (2)^2 = 4$.
- Restringiamo la funzione: manteniamo la stessa regola di definizione ma consideriamo un dominio differente, per esempio l'intervallo $[0, +\infty)$.
- La nuova funzione ottenuta è iniettiva. Inoltre scegliendo come codominio l'intervallo $[0, +\infty)$ la funzione è biunivoca.

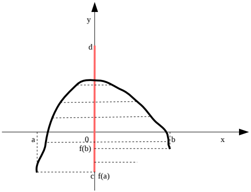
- Dal punto di vista grafico i concetti di iniettività e suriettività per funzioni reali di variabile reale sono facilmente verificabili:
    - La funzione risulta iniettiva se una qualsiasi retta parallela all'asse delle ascisse interseca il grafico della funzione in al più un punto.





- La funzione $f : A \longmapsto B$, $A = [a, b]$ e $B = [c, d]$ è suriettiva se una qualsiasi retta parallela all'asse delle ascisse che interseca B, interseca anche il grafico di f in almeno un punto.





Monotonia

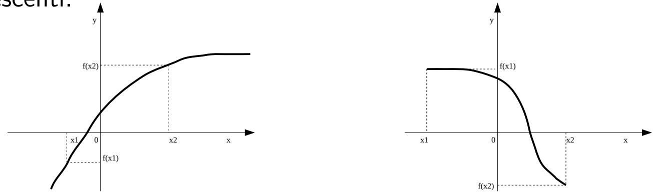
- Rispetto al loro comportamento, si dividono le funzioni in funzioni monotone e funzioni non monotone.
- Le funzioni monotone sono definite come segue: $f : A \mapsto \mathbb{R}$ si dice crescente (rispettivamente strettamente crescente) se

$$\forall x, x' \in A, \; x > x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x') \; (f(x) > f(x'))$$

- f si dice decrescente (rispettivamente strettamente decrescente) se

$$\forall x, x' \in A, \; x > x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x') \; (f(x) < f(x'))$$

- L'unica funzione crescente e decrescente è la funzione costante.
- Non esistono funzioni che siano strettamente crescenti e strettamente decrescenti.



Massimi e minimi

- Un punto $x_0 \in A$ è detto punto di massimo assoluto per f se $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in A$. In questo caso $f(x_0)$ è detto massimo assoluto della funzione.
- Un punto $x_0 \in A$ è detto punto di massimo relativo per f se

$$\exists\ I_\delta(x_0),\ \ \delta > 0,\ \ t.c.\ f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in I_\delta(x_0) \cap A.$$

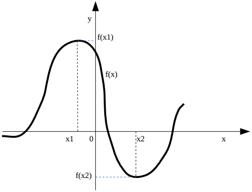
$$I_\delta(x_0) = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

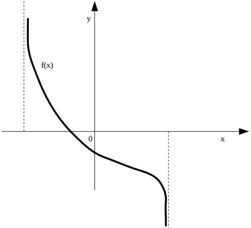
  In questo caso $f(x_0)$ è detto (un) massimo relativo della funzione.
- In modo del tutto analogo si dice che $x_0 \in A$ è punto di minimo assoluto se $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in A$, nel qual caso $f(x_0)$ si chiam il minimo assoluto di f. Si dice che $x_0 \in A$ è un punto di minimo relativo se

$$\exists\ I_\delta(x_0),\ \ \delta > 0,\ \ t.c.\ f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in I_\delta(x_0) \cap A.$$

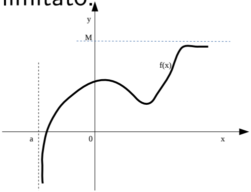
  dove $f(x_0)$ si chiama un minimo relativo.
- Non sempre una funzione ha massimo (minimo) assoluto e/o massimi (minimi) relativi.

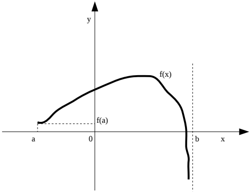
Funzioni limitate

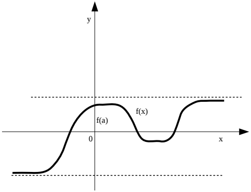




- Le funzioni si dividono anche in base alle caratteristiche del codominio: f si dice limitata superiormente se il codominio è superiormente limitato, limitata inferiormente se il codominio è limitato inferiormente, limitata se il codominio è limitato.

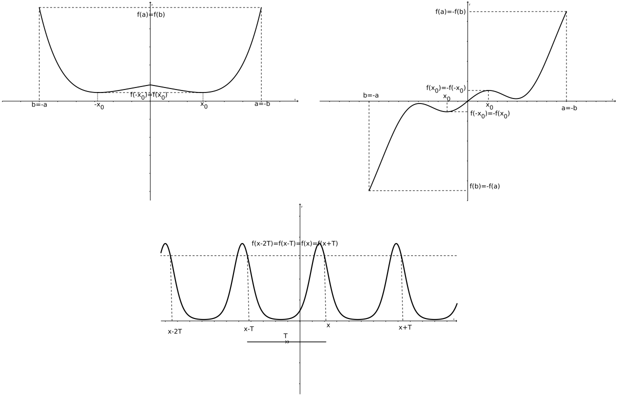






Funzioni pari, dispari e periodiche

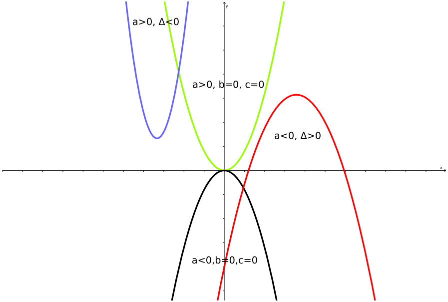
- Una funzione f si dice pari se $f(x) = f(-x), \ \forall x \in A$, ossia se il grafico di f, è simmetrico rispetto all'asse y.
- Una funzione f si dice dispari se $f(x) = -f(-x), \ \forall x \in A$, ossia se il grafico è simmetrico rispetto all'origine.
- Infine f si dice periodica di periodo T se $f(x+T) = f(x), \ \forall x \in A$.



Funzioni quadratiche

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, si chiama funzione quadratica. Il dominio è $D_f = \mathbb{R}$, mentre il grafico G_f è una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate e vertice di ascissa $-b/(2a)$:

- se $a > 0$ allora f è limitata inferiormente, strettamente decrescente in $(-\infty, -\frac{b}{2a})$, e strettamente crescente in $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$.
- se $a < 0$ allora f è limitata superiormente, strettamente crescente in $(-\infty, -\frac{b}{2a})$, e strettamente decrescente in $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$.
- Come caso particolare, le quadratiche di equazione $y = ax^2$ sono tutte funzioni pari.

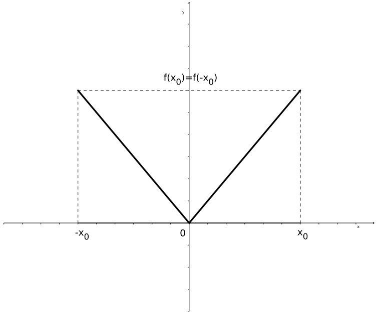


Funzione valore assoluto o modulo

$f(x) = |x|$ è la funzione modulo o valore assoluto di x. Il dominio è $D_f = \mathbb{R}$ e si ha

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } \; x < 0 \\ x & \text{se } \; x \geq 0. \end{cases}$$

- La funzione modulo è una funzione pari.
- La funzione è limitata inferiormente (0 è punto di minimo assoluto ed $f(0) = 0$ è il minimo assoluto.
- strettamente crescente in $(0, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$.



Funzioni e operazioni

Come i numeri anche le funzioni possono essere "combinate" tra di loro attraverso operazioni aritmetiche. Consideriamo due funzioni reali f, g con il medesimo dominio

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad g : A \to \mathbb{R}.$$

Per ogni x appartenente al dominio comune definiamo le funzioni

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{“somma di } f \text{ e } g\text{”}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{“differenza di } f \text{ e } g\text{”}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \text{“prodotto di } f \text{ e } g\text{”}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x), \quad \text{dove } g(x) \neq 0 \quad \text{“quoziente di } f \text{ e } g\text{”}.$$

Nel caso in cui i domini di f e g non coincidano occorre a volte considerare domini "ridotti", è sensato per esempio definire le operazioni in $dom(f) \cap dom(g)$.

Esempio

(Operazioni con funzioni) Se $f(x) = x^2, \quad x > 0$ e $g(x) = 3x + 1, \quad x > 0$ possiamo considerare

$$(f+g)(x) = x^2 + 3x + 1$$

$$(f-g)(x) = x^2 - 3x - 1$$

$$(fg)(x) = x^2(3x+1) = 3x^3 + x^2$$

$$(f/g)(x) = \frac{x^2}{3x+1}$$

Ricordiamo che il quoziente è definito in quanto $dom(g) = (0, +\infty)$.

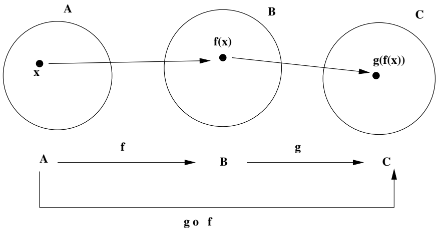
Composizione

Definizione

(Composizione di funzioni) *Siano* $f : A \to B$, $g : B \to C$ *due funzioni, si dice* *funzione composta di* f *e* g *la funzione di* A *in* C *che si indica con* $g \circ f$ *e definita come*

$$g \circ f : A \to C \qquad x \mapsto g(f(x)).$$

Quindi $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

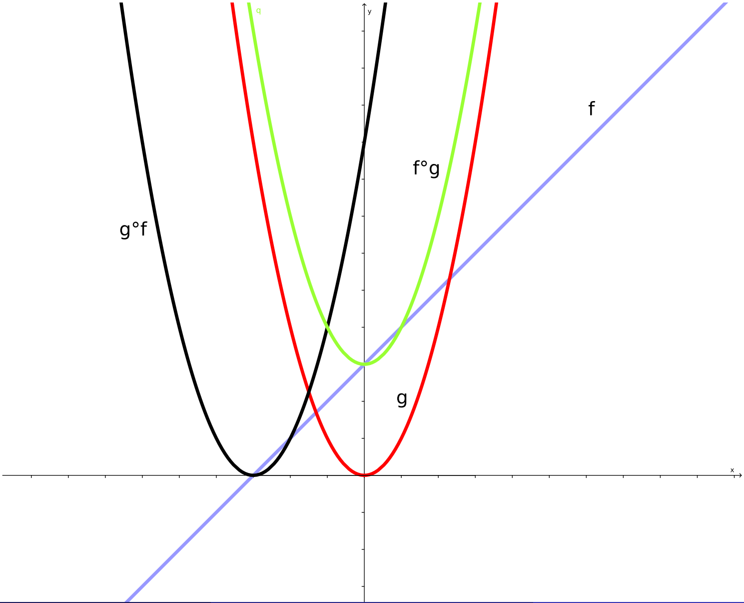


Ovviamente per la composizione basta che $im(f) \subseteq dom(g)$ senza richiedere che il codominio di f e dominio di g coincidano.

Esempio

(La composizione non commuta)

- Determiniamo la funzione composta $g \circ f$ di $f(x) = x + 3$ e $g(y) = y^2$. Dove entrambe sono definite a $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.
- Per ogni fissato x dobbiamo prima applicare f ottenendo $f(x) = x + 3$, a questo punto applichiamo la funzione g,
$$z = g(y) = y^2 = (f(x))^2 = (x+3)^2.$$
Questa è la funzione $(g \circ f)(x) = (x+3)^2$,
$dom(g \circ f) = \mathbb{R}$, $im(g \circ f) = [0, +\infty)$.
- Scambiamo adesso il ruolo di f e g (sono funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$, non abbiamo problemi di definizione). La funzione composta $f \circ g$ è data da
$$z = f(y) = y + 3 = (x^2) + 3 = x^2 + 3,$$
quindi $(f \circ g)(x) = x^2 + 3$. Osserviamo che $dom(f \circ g) = \mathbb{R}$, mentre $im(f \circ g) = [3, +\infty)$.
- La funzione composta ottenuta è differente dalla precedente: la composizione non è in generale commutativa.


g°f
f°g
f
g
y
x

Esempio

(Non sempre si può comporre)

- Se studiamo la funzione composta di $f(x) = x + 3$ e $g(y) = 1/y$ ci accorgiamo che
$$dom(f) = \mathbb{R},\ im(f) = \mathbb{R},\ dom(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ im(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
Il punto $x = -3$ non può essere considerato nella composizione $g \circ f$.
- Possiamo comunque considerare la funzione $(g \circ f)(x) = 1/(x + 3)$, ma attenzione: $dom(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
- Quindi anche se $im(f) \not\subseteq dom(g)$, non rinunciamo a definire la funzione composta: la definiamo solo dove ha senso farlo.
- Prendiamo invece $f(x) = -x^2 - 1$ e $g(y) = \sqrt{y}$. Abbiamo,
$$dom(f) = \mathbb{R},\ im(f) = (-\infty, -1],\ dom(g) = [0, +\infty),\ im(g) = [0, +\infty).$$
In questo caso $im(f) \cap dom(g) = \varnothing$, non possiamo definire $g \circ f$.
- La condizione minimale da porre per parlare di funzione composta è $im(f) \cap dom(g) \neq \varnothing$.

Funzione inversa

Definizione (funzione inversa)

Se la funzione $f: A \mapsto B$ *è biunivoca, allora esiste la funzione inversa di f:*

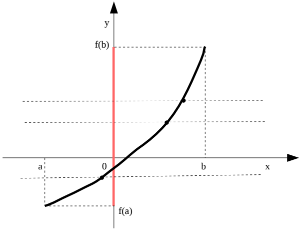
$$f^{-1}: B \mapsto A$$

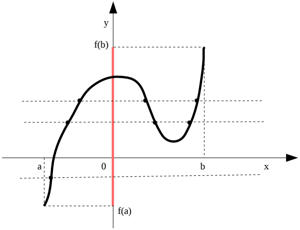
$$y \mapsto f^{-1}(y) = x$$

tale che $f(x) = y$ *e* $f^{-1}(f(x)) = x$. *In tal caso f si dice invertibile.*

Ricordiamo che se f è invertibile con inversa f^{-1} allora anche f^{-1} è invertibile e ha inversa $(f^{-1})^{-1} = f$. Alcune proprietà dell'inversa sono:

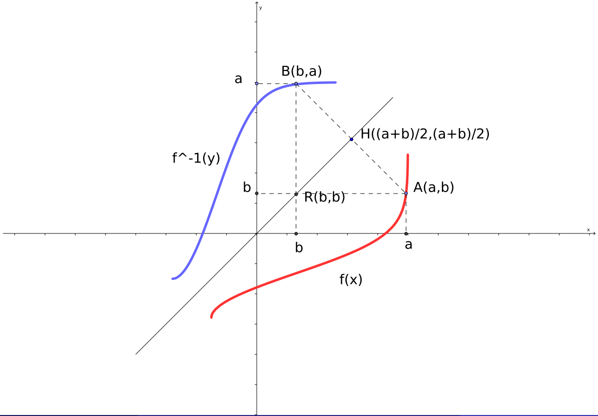
- Dire che f ha inversa è come dire che l'equazione $y = f(x)$, $\forall y \in B$ ha un'unica soluzione $x \in A$.
- Dal punto di vista geometrico, f ha inversa se il suo grafico G_f è intersecato dalle rette parallele all'asse delle x passanti per i punti del codominio una sola volta.





- I grafici di f e della sua inversa f^{-1} sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$.
- Per verificare questa proprietà, osserviamo che se (a, b) sono le coordinate di un punto $A \in G_f$ (punto che appartiene al grafico della funzione f), allora il punto B di coordinate (b, a) è il simmetrico di A rispetto alla retta $y = x$.
- Inoltre B appartiene al grafico dell'inversa: $B \in G_{f^{-1}}$.

- Infatti, supposto $a > b$ (se $b > a$ non cambia) e preso il triangolo ABR, osserviamo che $AR = a - b = BR$. Disegnata la bisettrice $y = x$, il punto R vi appartiene e dunque tale bisettrice è altezza e mediana del triangolo BRA sulla base BA.
- Osservato ciò, se $A(a, b) \in G_f$ allora $b = f(a)$. Se f ammette inversa, si ha $a = f^{-1}(b)$, ossia $B(b, a) \in G_f^{-1}$.
- Dunque i grafici di f e di f^{-1} sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.



- Per trovare l'espressione della funzione inversa $f^{-1}(y)$ di una funzione reale invertibile $y = f(x)$ occorre esplicitarne l'espressione rispetto ad x.
- Non sempre è possibile provare che una data funzione è invertibile.
- Non sempre è possibile scrivere in maniera esplicita l'inversa.
- Il dominio di f^{-1} è B e quindi f^{-1} si applica agli elementi $y \in B$, ossia y è la variabile indipendente per f^{-1} e x quella dipendente.
- Per disegnare il grafico di f^{-1} nello stesso riferimento cartesiano in cui si disegna il grafico di f occorre non confondere il ruolo delle variabili.
- In tale riferimento i valori della variabile indipendente sono sull'asse delle ascisse e quelli delle variabili dipendenti sull'asse delle ordinate.
- Come regola pratica, per disegnare $x = f^{-1}(y)$, basta considerare f^{-1} come una nuova funzione g che ha la stessa espressione di f^{-1} , ma con i nomi delle variabili scambiati e disegnare quindi $y = g(x)$.

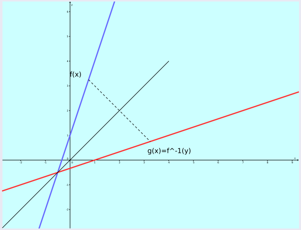
Esempio

Data la funzione lineare $y = f(x) = 3x + 1$, esplicitando l'espressione rispetto ad x si ottiene $x = \frac{y-1}{3}$, da cui si ha l'espressione dell'inversa

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}.$$

Geometricamente $x = \frac{y-1}{3}$ e $y = 3x + 1$ sono la stessa retta. Per disegnare f^{-1} nello stesso riferimento cartesiano di f sull'asse delle ascisse poniamo la variabile indipendente sfruttiamo le proprietà viste prima. Disegnamo quindi il grafico della nuova funzione

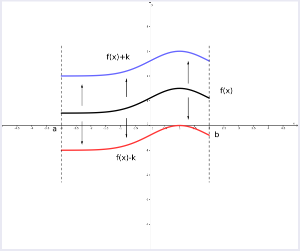
$$g(x) = \frac{x-1}{3}.$$

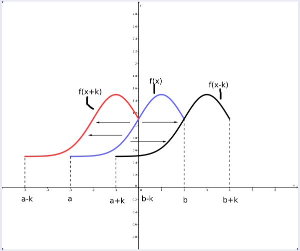


Traslazione orizzontale e verticale

Esempio

Consideriamo infine quattro operazioni che si possono fare su una funzione reale $f(x)$ definita su un intervallo $[a, b]$, trasformandola in una nuova funzione $g(x)$ definita in un intervallo $[c, d]$ mediante una costante $k \in \mathbb{R}$. Vediamo le operazioni di traslazione orizzontale e verticale:



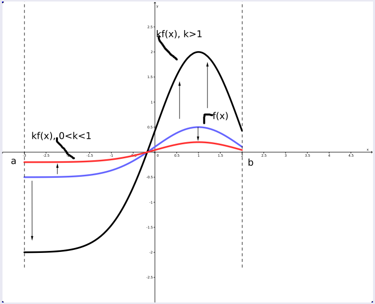


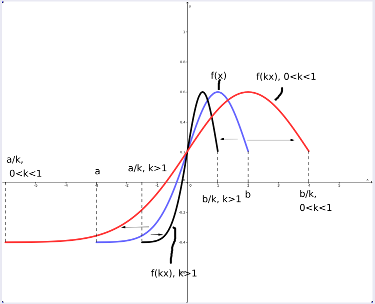
Nella traslazione verticale (sinistra) si ha $g(x) = f(x) + k$ e $[c, d] = [a, b]$. La traslazione è verso l'alto se $k > 0$ e verso il basso se $k < 0$. Nella traslazione orizzontale (destra) si ha $g(x) = f(x + k)$ e $[c, d] = [a - k, b - k]$. La traslazione è verso sinistra se $k > 0$ e verso destra se $k < 0$.

Scalatura, contrazione e dilatazione

Esempio

Vediamo l'operazione di scalatura e l'operazione di dilatazione o contrazione per una funzione f.



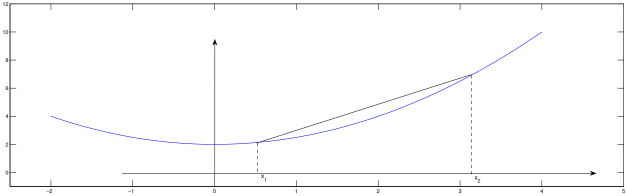


Nella scalatura (a sinistra) si ha $g(x) = kf(x)$ e $[c, d] = [a, b]$. Nella dilatazione o contrazione (destra) si ha $g(x) = f(kx)$ e $[c, d] = [\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$, $k > 0$. Si ha contrazione se $k > 1$ e dilatazione se $0 < k < 1$.

Funzioni convesse e concave

- Un insieme di punti del piano si dice convesso se il segmento che unisce due punti qualsiasi è tutto contenuto nell'insieme.
- Si dice epigrafico di f l'insieme formato dai punti (x, y) del piano che si trovano al di sopra del grafico stesso, tali cioè che $x \in A$ e $y \geq f(x)$.
- Una funzione si dice convessa se il suo epigrafico è convesso.
- Questo equivale a chiedere che ogni segmento congiungente due punti del grafico di f stia tutto sopra il grafico di f. In formule $f : A \mapsto B$ è convessa se e solo se per ogni coppia $x_1, x_2 \in (a, b)$ e per ogni $t \in (0, 1)$

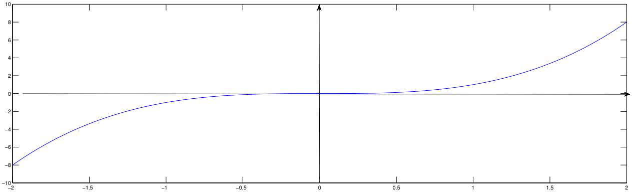
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$



- Infatti, dati due numeri reali $x_1 < x_2$, il generico punto $\bar{x} \in [x_1, x_2]$ può essere scritto nella forma $\bar{x} = tx_1 + (1-t)x_2, \;\; t \in [0,1]$ e l'ordinata del punto di ascissa $\bar{x}$ sulla retta che passa per $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è $\bar{y} = tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.
- Una funzione f è concava se $-f$ è convessa.
- Le funzione concave e convesse sono tali su degli intervalli.

Definizione

Un punto x_0 del dominio di f si dice flesso se si può trovare un intervallo $(x_0 - \delta, x_0]$ alla sinistra di x_0 e un intervallo $[x_0, x_0 + \delta)$ alla destra di x_0 nei quali f risulta rispettivamente convessa e concava (o concava e convessa).



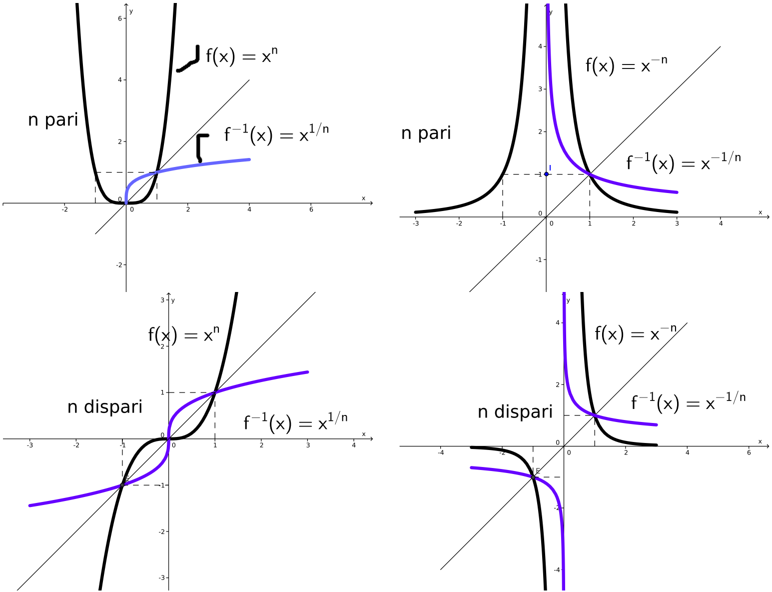
Funzioni Potenza

- Le funzioni $f(x) = kx$, $f(x) = kx^2$, $f(x) = k/x$ sono esempi di funzioni potenza che scriviamo nella forma generale

$$f(x) = kx^{\alpha}, \ \alpha \neq 0$$

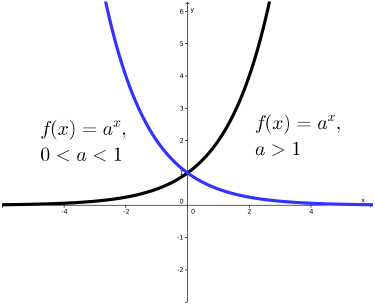
- In generale, queste funzioni sono definite solo per $x > 0$ anche se in alcuni casi è possibile estendere il dominio di definizione a tutto $\mathbb{R}$: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ ad esempio.
- Le funzioni $y = 1/x$, $y = 1/x^2$ sono definite su tutto $\mathbb{R}$ con esclusione dello 0, mentre la funzione $\sqrt{x}$ è definita su $[0, +\infty]$.
- Per $x > 0$, le funzioni sono strettamente crescenti per $\alpha > 0$ e strettamente decrescenti per $\alpha < 0$.
- Per $x > 0$, le funzioni sono strettamente convesse per $\alpha < 0$ e $\alpha > 1$ e strettamente concave per $0 < \alpha < 1$.

Esempi di funzione potenza con *n* intero.



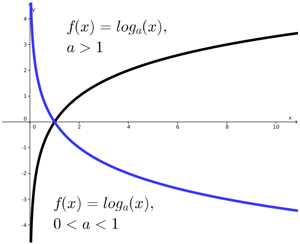
Funzioni Esponenziali

- La funzione$f(x) = a^x, \ a > 0, \ a \neq 1$ si chiama funzione esponenziale in base a.
- Le funzioni esponenziali sono positive per ogni a e il loro grafico passa per il punto $(0, 1)$.
- Queste funzioni sono strettamente crescenti se $a > 1$ e strettamente decrescenti se $0 < a < 1$. Per ogni a sono funzioni strettamente convesse.
- Due funzioni esponenziali che hanno basi una la reciproca dell'altra hanno grafici simmetrici rispetto all'asse delle ordinate.



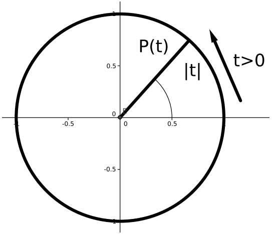
Funzioni Logaritmiche

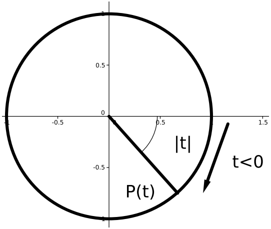
- Ogni funzione esponenziale è invertibile.
- L'inversa della funzione $f(x) = a^x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$, si chiama funzione logaritmo in base a e si indica con il simbolo $f^{-1}(x) = \log_a x$.
- Il dominio di f^{-1} è l'intervallo $(0, +\infty)$.
- I grafici si ottengono per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.
- Queste funzioni sono strettamente crescenti e concave se $a > 1$, positive per $x > 1$ e negative per $0 < x < 1$.
- Queste funzioni sono strettamente decrescenti e convesse se $0 < a < 1$, positive per $0 < x < 1$ e negative per $x > 1$.



Funzioni circolari (trigonometriche)

- Dato un sistema di riferimento cartesiano ortonormale, la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro l'origine e raggio 1 è l'insieme dei punti $P(x, y)$ del piano per cui $x^2 + y^2 = 1$. Chiameremo C circonferenza goniometrica.
- Immaginiamo che il punto P si trovi nella posizione $(1, 0)$ e inizi a ruotare su C descrivendo la parte di circonferenza contenuta nel primo quadrante $(x,\ y \geq 0)$.
- Se P descrive un arco di lunghezza $t > 0$ indichiamo con $P(t)$ il punto di arrivo. Se P si muove in senso orario possiamo comunque associare ancora il punto $P(t)$ al valore $t < 0$ se percorro un arco di lunghezza $|t|$, in senso opposto al precedente.





Per t variabile da 0 a 2π (con π, *pi greca*, si indica la lunghezza della semicirconferenza di raggio unitario) il punto $P(t)$ percorre l'intera circonferenza goniometrica. Si definiscono allora il *coseno* e il *seno* di t mediante

$$\cos(t) \quad \text{è l'ascissa di } P(t) \quad (\textit{coseno})$$

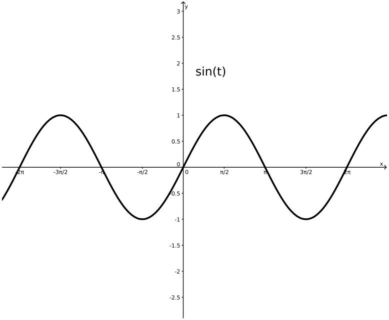
$$\sin(t) \quad \text{è l'ordinata di } P(t) \quad (\textit{seno}).$$

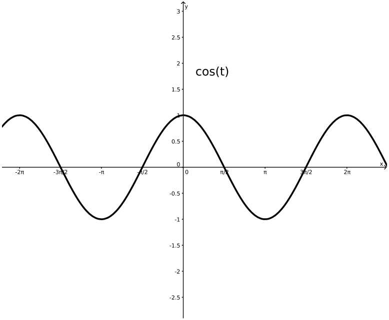
Osservazione

Stiamo misurando gli angoli in radianti e non in gradi. Un angolo positivo individuato da una coppia ordinata di semirette (r, r') uscenti dal punto O misura t radianti quando

$$t = \frac{\text{arco di C}}{\text{raggio di } C} = \frac{\widehat{AP}}{R}$$

dove C è una circonferenza di raggio R e $\widehat{AP}$ l'arco di circonferenza determinato dall'angolo. Nel caso della circonferenza unitaria il raggio vale 1. Da quanto detto risulta che, per esempio, ad angoli, in gradi, di $30°,\ 45°,\ 60°,\ 180°$ corrispondono in radianti misure rispettivamente di $\pi/6,\ \pi/4,\ \pi/3,\ \pi$.


sin(t)
y
x
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2π
-3π/2
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π


cos(t)
y
x
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2π
-3π/2
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π

Riportiamo nella Tabella alcuni valori delle funzioni seno e coseno, dette anche funzioni circolari o funzioni trigonometriche elementari.

Radianti	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
Seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
Coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1

Si possono derivare varie proprietà delle funzioni circolari. Entrambe si ripetono e gli stessi valori si ripresentano dopo un certo T. In particolare, dopo aver compiuto un giro di circonferenza, ossia per $T = 2\pi$ abbiamo

$$\sin(t) = \sin(t + 2\pi); \quad \cos(t) = \cos(t + 2\pi).$$

Le due funzioni sono funzioni periodiche. Il coseno è una funzione pari, il seno è una funzione dispari.

Proprietá

Utilizzando le proprietà geometriche delle funzioni trigonometriche elementari si possono dedurre varie proprietà, tra cui

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1; \qquad \text{(Teorema di Pitagora)}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(s+t) &= \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t) \\ \sin(s+t) &= \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t) \end{aligned}\right. \qquad \text{(formule di addizione)}$$

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}; \quad \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}; \qquad \text{(formule di bisezione)}$$

$$\cos(t \pm \pi) = \mp\cos(t); \quad \sin(t \pm \pi) = \mp\sin(t); \qquad \text{(angoli supplementari)}$$

$$\cos(t \pm \pi/2) = \mp\sin(t); \quad \sin(t \pm \pi/2) = \pm\cos(t). \qquad \text{(angoli complementari)}$$

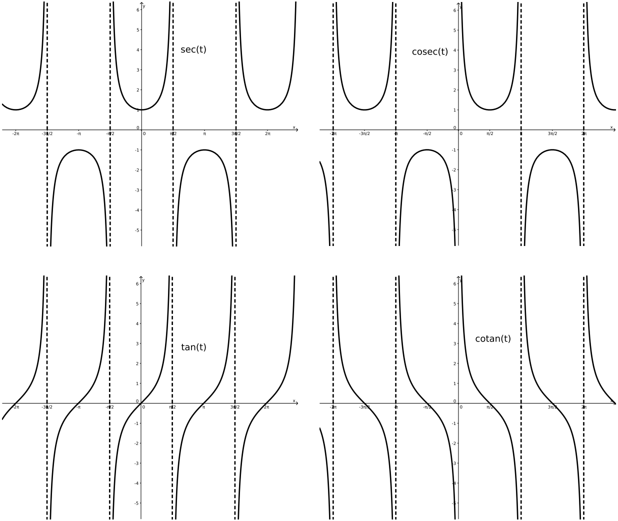
Ulteriori funzioni trigonometriche

Altre funzioni trigonometriche sono

$$\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}, \quad \textit{(secante)} \qquad \csc(t) = \frac{1}{\sin(t)}, \quad \textit{(cosecante)}$$

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}, \quad \textit{(tangente)} \qquad \cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}, \quad \textit{(cotangente)}$$

ognuna definita dove i denominatori non si annullano.
Dal punto di vista geometrico, la funzione tangente misura la lunghezza algebrica del segmento individuato dal punto $A(1, 0)$ e dal punto che risulta come intersezione tra la retta tangente alla circonferenza goniometrica in A e la retta che congiunge l'origine O al punto P in movimento sulla circonferenza.


sec(t)
cosec(t)
tan(t)
cotan(t)

Funzioni trigonometriche inverse

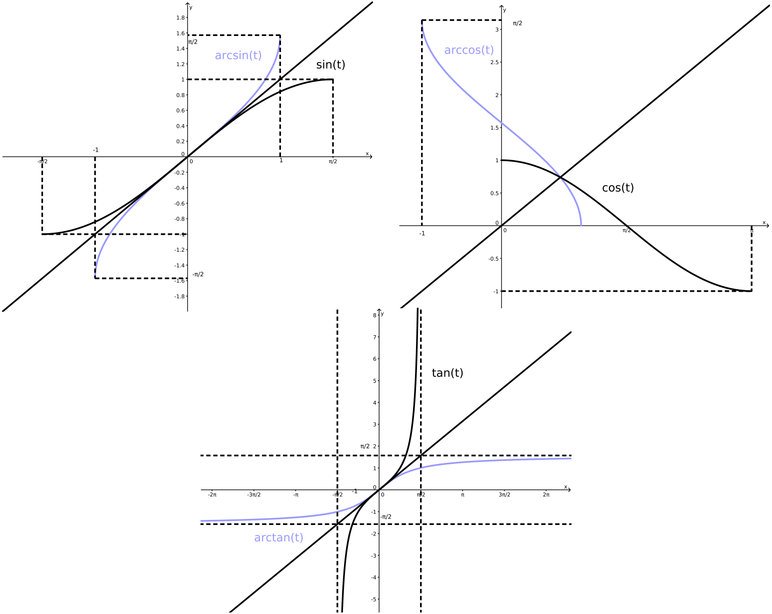
Le funzioni trigonometriche, in quanto periodiche, non sono iniettive. Tuttavia sono strettamente crescenti o decrescenti su opportuni intervalli, le restrizioni su tali intervalli sono iniettive e quindi invertibili. Per ciascuna funzione si sceglie una cosiddetta *regione fondamentale*, cioè un insieme su cui la restrizione della funzione risulti iniettiva. In ogni regione fondamentale si considera la restrizione della funzione trigonometrica e quindi la funzione inversa di quest'ultima.

Funzione trigonometrica	**Regione fondamentale**	**Funzione inversa**
$\sin(t)$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$\arcsin(t)$
$\cos(t)$	$[0, \pi]$	$\arccos(t)$
$\tan(t)$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$\arctan(t)$

Valgono inoltre le seguenti identità,

$$\arcsin(\sin(t)) = t \quad \forall\, t \in [-\pi/2, \pi/2]; \quad \sin(\arcsin(t)) = t \quad \forall\, t \in [-1, 1],$$

e analoghe identità per gli altri casi.


arcsin(t)
sin(t)
π/2
-π/2
arccos(t)
cos(t)
tan(t)
arctan(t)