# Metodi Matematici per l'Economia anno 2016/2017
# Partizione G-O

**Docente: Giacomo Dimarco**

**Dipartimento di Matematica e Informatica**
**Università di Ferrara**

VNIVERSITÀ
DEGLI·STVDI
DI·FERRARA

https://sites.google.com/a/unife.it/giacomo-dimarco-home-page/
giacomo.dimarco@unife.it

Corso di Laurea in Economia

- Il calcolo integrale è legato alla soluzione di numerosi problemi in ambiti fisici, ingegneristici, economici ma anche sociali e biologici.
- In economia permette di trattare problemi legati alla finanza, alla statistica e alla probabilità.
- È uno strumento necessario per trattare problemi di natura dinamica, ovvero legati all'evoluzione temporale di qualche fenomeno, attraverso l'uso delle equazioni differenziali.
- Abbiamo visto ad esempio che il significato fisico della derivata è legato alla velocità di spostamento di un oggetto.
- Più in generale la derivata fornisce il tasso di variazione istantaneo di qualche fenomeno.
- Spesso, conoscendo questo tasso, si vogliono dedurre altre informazioni.
- Il calcolo integrale permette di trattare e di risolvere questioni di questo tipo, come riportato in alcuni degli esempi successivi.

- Si vuole conoscere la posizione di un oggetto in un certo istante dalla conoscenza della velocità di spostamento dell'oggetto stesso e della posizione iniziale.
- Noto il tasso di variazione di una certa popolazione di cellule, si desidera valutare la popolazione totale di cellule in un certo istante futuro.
- Noto il tasso di investimento, si vuole calcolare il costo totale di un bene,
- Noto il costo marginale si vuole determinare il costo medio.

In tutti i casi riportati il problema consiste nel trovare una funzione $F$ la cui derivata è una funzione nota $f$.

### Definizione (Funzione primitiva)

*Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $I$ intervallo. Una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ derivabile si dice primitiva di $f$ in $I$ se*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

# Calcolo di aree

Introduciamo gli integrali legandoli al calcolo di aree piane.

## Definizione

*Partizione di un intervallo. Siano dati* $[a, b]$ *ed i punti* $x_0, x_1, .., x_N \in [a, b]$ *tali che* $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$*. Diremo che gli* $x_i$*,* $i = 0, ..., N$*, operano una suddivisione o una partizione di* $[a, b]$*, che indichiamo con* $\mathcal{P}$*.*

- Nel concetto di partizione di un intervallo occorre tenere bene presente che i sottointervalli che vengono individuati dai punti della partizione non si sovrappongono e sono contigui.
- Questo significa che l'intervallo $[a, b]$ risulta l'unione di tutti i sottointervalli ed inoltre ciascuno di essi ha esattamente un solo punto in comune con ciascuno dei sottointervalli attigui, ossia uno o entrambi gli estremi.
- Nella definizione non si fa alcun cenno al tipo di partizione. Sebbene spesso si usi rappresentare graficamente la partizione di un intervallo con sottointervalli di uguale ampiezza, questo non è assolutamente vincolante.

# Integrale definito

Consideriamo una funzione limitata e definita nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$,

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad \exists k \geq 0 \quad \text{tale} \quad \text{che} \quad |f(x)| \leq k \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Data la partizione $\mathcal{P}$ dell'intervallo $[a, b]$ che divide l'intervallo in $N$ sottointervalli

$$[a, x_1], \quad [x_1, x_2], \; ..., \quad [x_{N-1}, x_N].$$

Chiameremo intervalli della partizione gli intervalli aperti $(x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, ..., N$, e indicheremo con $\Delta x_i$ la lunghezza dell'$i$-esimo intervallo della partizione, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
Dato che la funzione $f$ è limitata esistono sia l'estremo inferiore $m = \inf(f)$ che l'estremo superiore $M = sup(f)$. Inoltre tutti gli insiemi $S_i = \{f(x), \quad x \in (x_{i-1}, x_i)\}$ sono limitati, quindi esistono finiti sia l'estremo inferiore che l'estremo superiore

$$m_i = \inf_{x \in (x_{i-1}, x_i)} (f(x)) \leq f(x) \leq M_i = \sup_{x \in (x_{i-1}, x_i)} (f(x)), \quad \forall\, x \in (x_{i-1}, x_i).$$

## Definizione

*I numeri*

$$s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \Delta x_i, \quad S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i$$

*sono detti le somme di Riemann superiore ed inferiore di* $f$ *corrispondenti alla partizione* $\mathcal{P}$*.*

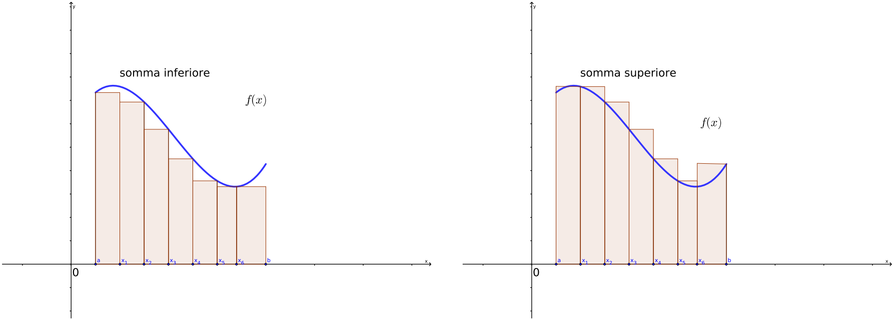



FIGURE – Un esempio di partizione e di somma di Riemann superiore ed inferiore.

- Chiameremo plurirettangolo una figura geometrica piana formata da due o più rettangoli allineati lungo una stessa direzione.
- I due plurirettangoli corrispondenti alla somma inferiore $s(f, \mathcal{P})$ e a quella superiore $S(f, \mathcal{P})$ di $f(x)$ in $[a, b]$ non forniscono esattamente l'area della superfice sottesa dal grafico di $f(x)$ e dall'asse delle ascisse.
- Osserviamo che dato che $m_i \leq M_i, \ \forall i$ risulta $s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P})$.
- Inoltre $s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{N} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{N} m(x_i - x_{i-1}) \geq m \sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{i-1}) = m(b-a)$.
- Nello stesso modo $S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{N} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{N} M(x_i - x_{i-1}) \leq M \sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{i-1}) = M(b-a)$.
- Di conseguenza esiste l'estremo inferiore e superiore degli insiemi

$$\{s(f, \mathcal{P}), \quad \mathcal{P} \text{ partizione di } \ [a, b]\},$$

$$\{S(f, \mathcal{P}), \quad \mathcal{P} \text{ partizione di } \ [a, b]\}.$$

e la seguente disuguaglianza è valida per ogni funzione $f(x)$ e partizione $\mathcal{P}$

$$m(b-a) \leq s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq M(b-a),$$

Assegnate due partizioni $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ diremo che $\mathcal{P}_2$ è un *raffinamento* di $\mathcal{P}_1$ se $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$, cioè se $\mathcal{P}_2$ possiede tutti i punti di $\mathcal{P}_1$, ed eventualmente anche solo un punto in più. È possibile dimostrare il seguente risultato.

## Teorema

*Se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ sono due partizioni di $[a,b]$ e $\mathcal{P}_2$ è un raffinamento di $\mathcal{P}_1$ allora, per $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, risulta*

$$s(\mathcal{P}_1, f) \leq s(\mathcal{P}_2, f); \quad S(\mathcal{P}_1, f) \geq S(\mathcal{P}_2, f).$$

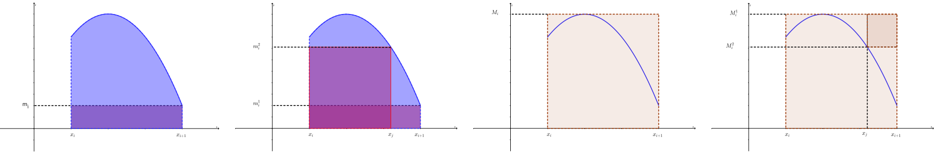



FIGURE – Un esempio di raffinamento : nuove somme di Riemann superiori ed inferiori.

- L'insieme delle somme inferiori è superiormente limitato da $M(b-a)$ e quello delle somme superiori è inferiormente limitato da $m(b-a)$.
- Vale inoltre

$$s(f,\mathcal{P}) \leq \sup_{\mathcal{P}} s(f,\mathcal{P}) \leq \inf_{\mathcal{P}} S(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}),$$

  per ogni partizione possibile $\mathcal{P}$.
- Per le proprietà dei numeri reali esistono i numeri $\sup_{\mathcal{P}} s(f,\mathcal{P}) = s$ e $\inf_{\mathcal{P}} S(f,\mathcal{P}) = S$.
- Consideriamo una successione di partizioni $\mathcal{P}_n$ con un numero crescente di punti $n$ e le due rispettive successioni $\{s_n\} = \{s(f,\mathcal{P}_n)\}$ e $\{S_n\} = \{S(f,\mathcal{P}_n)\}$ delle somme inferiori delle somme superiori.
- La successione delle somme inferiori è monotona non decrescente e superiormente limitata e quindi converge. Si ha $\lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{\mathcal{P}} s(f,\mathcal{P}_n) = s$.
- La successione delle somme superiori è monotona non crescente e inferiormente limitata e quindi converge. Si ha $\lim_{n\to\infty} S_n = \inf_{\mathcal{P}} S(f,\mathcal{P}_n) = S$.

Si possono verificare due casi :

- $s < S$, oppure
- $s = S$.

Nel secondo caso la $f$ risulta "integrabile".

## Definizione (Funzione integrabile)

*Una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitata si dice* integrabile *(secondo Riemann) su* $[a, b]$ *se* $s = S$*. Il valore comune di questi due estremi si chiama* integrale *(di Riemann) di* $f$ *in* $[a, b]$ *e sarà denotato con*

$$\int_a^b f(x)dx$$

*dove* $[a, b]$ *è il* dominio di integrazione *e* $f = f(x)$ *è la* funzione integranda.

L'insieme delle funzioni integrabili non è vuoto. Infatti su qualunque intervallo $[a, b]$ ogni funzione costante $f(x) = c$ è integrabile e risulta

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c dx = c(b - a).$$

## Esempio

L'insieme delle funzioni integrabili su $[a,b]$ non coincide però con l'insieme delle funzioni limitate su $[a,b]$. Per esempio sia $D:[a,b]\to\mathbb{R}$ la *funzione di Dirichlet*

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{se } \ x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}\\ \\ 0 & \text{se } \ x\in[a,b]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

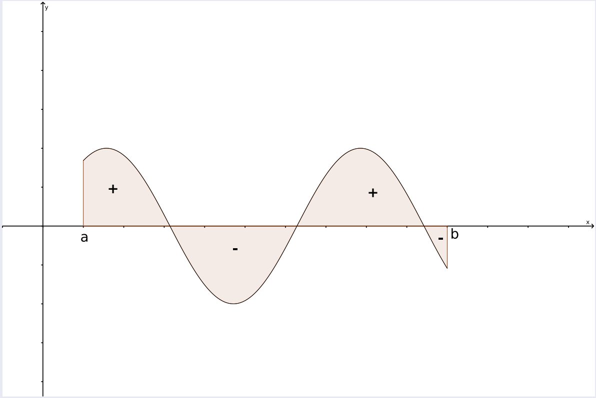
Per ogni partizione $\mathcal{P}$, risulta

$$s(\mathcal{P},D)=\sum_{i=0}^{N}0\Delta x_i=0,\quad S(\mathcal{P},D)=\sum_{i=0}^{N}1\Delta x_i=(b-a);$$

infatti c'è sempre qualche razionale e qualche irrazionale in qualsiasi sottointervallo della suddivisione. Quindi $\sup(s)=0$, $\inf(S)=(b-a)$ e $D\notin\mathcal{R}(a,b)$, mentre $D$ è una funzione limitata.

## Osservazione

Nel caso in cui $f$ cambi di segno, ma resti integrabile, le somme di Riemann hanno perfettamente senso. L'integrale può allora essere interpretato come somma algebrica delle aree prese con segno positivo dove $f \geq 0$ e con segno negativo dove $f \leq 0$.



# Condizioni di integrabilità

Verificare l'integrabilità di una funzione tramite la definizione è complicato e macchinoso, la nozione di integrabilità resta comunque molto importante.

## Teorema (Integrabilità delle funzioni monotone)

*Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitata e monotona. Allora* $f$ *è integrabile.*

## Teorema (Integrabilità delle funzioni continue)

*Se* $f$ *è continua nell'intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$*, allora* $f$ *è integrabile su* $[a, b]$*.*

## Esempio

Tutte le funzioni polinomiali sono integrabili in ogni intervallo $[a, b]$, così come le funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\cos x$, le funzioni esponenziali $a^x$ e le funzioni logaritmiche $\log x$ (in intervalli $[a, b]$, con $a > 0$).

# Proprietà dell'integrale

- La costruzione vista fin qui richiede la sola ipotesi della limitatezza di $f$ in $[a, b]$, non è necessaria la continuità.
- Si conviene che
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
- Se $a = b$ allora
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx = 0$$
- I due numeri $a$ e $b$ vengono detti primo e secondo estremo di integrazione.
- L'integrale da $a$ a $b$ di $f$ è un numero reale.

## Teorema (Proprietà degli integrali)

*Siano* $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I$ *intervallo,* $f, g$ *localmente integrabili,* $a, b, c \in I$, $A, B \in \mathbb{R}$ *costanti, allora*

i) *la funzione* $Af + Bg$ *è integrabile e*

$$\int_a^b [Af(x) + Bg(x)]dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx;$$

ii) *se* $f \geq 0$ *e* $a < b$, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ *;*

iii) *se* $f(x) \geq g(x)$, $a < b$ *allora* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ *;*

iv) *se* $m \leq f(x) \leq M$, $\forall\, x \in [a, b]$, $\quad b > a$ *allora*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a);$$

v) *se* $a \leq b$ *allora* $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ *;*

vi) $\forall\ a,\ b,\ c \in I$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

## Teorema (Teorema valor medio integrale)

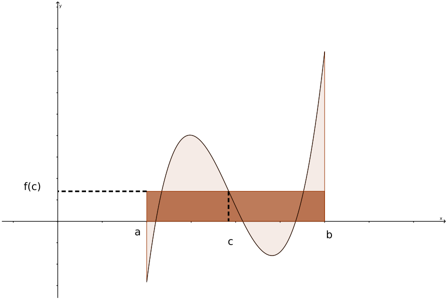
*Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, posto $m = \inf_{[a,b]} f, \quad M = \sup_{[a,b]} f$ si ha*

i) $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$ ;

ii) *esiste $c \in [a, b]$ tale che tale che $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$.*

*La quantità $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ prende il nome di valor medio di $f$ nell'intervallo $[a, b]$.*

- Per il Teorema di Weierstrass esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$.
- Integrando su $[a, b]$ e dalla proprietà $iv)$ degli integrali si deduce $i)$.
- Poichè $f$ è continua, assume tutti i valori tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore della sua immagine per il Teorema dei valori intermedi.
- Esiste quindi un punto $c \in [a, b]$ tale che $f(c)$ è uguale al valor medio.
- Questo implica che l'area del rettangolo di lati $f(c)$ e $(b - a)$ è uguale all'area sottesa dalla funzione $f(x)$.




Sia $f$ integrabile in $[a, b]$ e sia $x \in [a, b]$. Preso un altro punto $c \in [a, b]$, poniamo

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Questa è chiaramente una funzione definita da $[a, b]$ a valori sulla retta reale : $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Questa funzione prende il nome di funzione integrale di $f$ relativa al punto $c$.

## Teorema (Teorema fondamentale del calcolo integrale)

*Sia $f$ una funzione localmente integrabile in un intervallo $I$ e $a \in I$, sia $F$ la funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in I.$$

*Sia inoltre $x_0$ un punto interno a $I$, se $f$ è continua in $x_0$ allora esiste $F'(x_0)$ e si ha $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Osserviamo che $F(x)$ é una funzione continua. Per $x, y \in I$, con $x < y$

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt,$$

quindi

$$|F(y) - F(x)| \le \int_x^y |f(t)|dt,$$

e se $M \ge |f(t)| \quad \forall\, t \in I$ segue che

$$|F(y) - F(x)| \le M|y - x|.$$

Dall'ultima disuguaglianza si deduce che se $y \to x$ anche $F(y) \to F(x)$, e quindi la continuitá di $F$.

# Teorema fondamentale del calcolo integrale (continuazione)

Sia $x_0 \in [a, b]$ allora per ogni $x \neq x_0$ possiamo scrivere

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Per il teorema della media integrale esiste un punto $c \in [x_0, x]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

Consideriamo ora il limite per $x \to x_0$ dell'espressione sopra. Poichè $f$ è continua allora per $x \to x_0$ anche $c \to x_0$ e quindi $f(c) \to f(x_0)$. In definitiva

$$lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

ovvero la tesi del Teorema.

Un corollario estremamente importante è il seguente.

## Teorema (Teorema di Torricelli-Barlow)

*Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $I$ intervallo, $f$ continua e sia $G$ una funzione derivabile in $I$ tale che $G'(x) = f(x)$, allora $\forall\, a, b \in I$*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Posto $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, dal Teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha $F'(x) = f(x)$. Quindi, essendo $G'(x) = f(x)$, risulta $(F - G)(x) = k$ costante. Ne segue che

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = G(x) + k.$$

Per $x = a$,

$$F(a) = 0 \Rightarrow G(a) + k = 0 \Rightarrow G(a) = -k.$$

Per $x = b$ si ottiene

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt = G(b) + k = G(b) - G(a).$$

## Esempio

Un metodo per calcolare

$$\int_a^b f(x)dx$$

consiste dunque nel trovare una primitiva $F(x)$ di $f$.
Per esempio, per $F(x) = x^3/3$, $F'(x) = x^2$ quindi

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3}.$$

Per esempio,

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1,$$

infatti $\sin'(x) = \cos(x)$. Ancora

$$\int_2^{10} \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_2^{10} = \ln(10) - \ln(2) = \ln 5.$$

# Integrali indefiniti e primitive

## Definizione (Integrale indefinito)

*Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $I$ intervallo, $f$ continua in $I$. L'insieme delle primitive di $f$ si chiama* integrale indefinito *di $f$ e si denota con il simbolo*

$$\int f(x)dx$$

## Osservazione

Occorre far attenzione, $\int_a^b f(x)dx$ indica un numero, mentre $\int f(x)dx$ indica un insieme di funzioni. Non tutte le primitive sono esprimibili tramite funzioni elementari. Per esempio per il calcolo della funzione integrale

$$\int_0^x e^{-t^2} dt,$$

occorre ricorrere a tecniche numeriche.

# Primitive fondamentali

| **f(t)** | $\int f(t)dt$ |
|---|---|
| $x^p,\ p \neq -1$ | $\dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$ |
| $1/x$ | $\ln\|x\| + C$ |
| $e^x$ | $e^x + C$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + C$ |
| $\cos x$ | $\sin x + C$ |
| $1/\cos^2 x$ | $\tan(x) + C$ |
| $1/\sin^2 x$ | $-\mathrm{cotan}(x) + C$ |
| $1/(1+x^2)$ | $\arctan x + C$ |

# Primitive di funzioni composte

| $\mathbf{f(t)}$ | $\int f(t)dt$ |
|---|---|
| $f(x)^p \cdot f'(x),\ p \neq -1$ | $\dfrac{f(x)^{p+1}}{p+1} + C$ |
| $f'(x)/f(x)$ | $\ln\lvert f(x)\rvert + C$ |
| $e^{f(x)} \cdot f'(x)$ | $e^{f(x)} + C$ |
| $\sin f(x) \cdot f'(x)$ | $-\cos f(x) + C$ |
| $\cos f(x) \cdot f'(x)$ | $\sin f(x) + C$ |
| $f'(x)/\cos^2 f(x)$ | $\tan(f(x)) + C$ |
| $f'(x)/\sin^2 f(x)$ | $-\mathrm{cotan}(f(x)) + C$ |
| $f'(x)/(1 + f(x)^2)$ | $\arctan f(x) + C$ |

# Regole di integrazione

In corrispondenza alle regole di derivazione abbiamo le regole per il calcolo di integrali.

## Esempio

**(Integrazione per scomposizione)** Possiamo cercare di scomporre la funzione integranda come combinazione lineare di più funzioni integrabili. Per esempio si consideri

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}.$$

Dal fatto che $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ si ottiene

$$\frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x},$$

quindi

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \tan x - \mathrm{cotan} x + C.$$

# Integrazione per sostituzione

Sia $u = g(x)$ una funzione derivabile con derivata prima continua con immagine contenuta nell'intervallo $I$, sia $f$ continua in $I$, allora

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

La regola è basata sulla regola di derivazione di una funzione composta. Dal punto di vista del calcolo facilita scrivere la sostituzione nel seguente modo. Posto $u = g(x)$, avvalendosi della forma $du/dx = g'(x)$ si scrive $du = g'(x)dx$, quindi se $F' = f$, si ha

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = \int F'(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

Per esempio, vogliamo valutare

$$\int x\sqrt{1+x^2}dx.$$

Si pone $u = 1 + x^2 \Rightarrow du = 2xdx$, quindi $xdx = du/2$, da cui

$$\int x\sqrt{1+x^2}dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{u}du = \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.$$

## Esempio

**(Integrali trigonometrici)** Per esempio consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Se si pone $u = \cos x$, formalmente $du = -\sin x dx$ e

$$\int \tan x dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Per esempio per

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x(1 - \sin^2 x) \cos x dx,$$

posto $u = \sin x$, $du = \cos x dx$, si ha

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx \quad = \int u^4(1 - u^2) du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C = \frac{\sin^5(x)}{5} - \frac{\sin^7(x)}{7} + C.$$

## Esempio

**(Occhio agli estremi)** Calcoliamo

$$\int_0^5 \sqrt{4x+1}dx.$$

Con la sostituzione $u = 4x + 1$ si ottiene $du = 4dx$. Per $x = 0 \Rightarrow u = 1; \quad x = 5 \Rightarrow u = 21$, gli estremi di integrazione vanno cambiati.

$$\int_0^5 \sqrt{4x+1}dx \quad = \tfrac{1}{4}\int_1^{21} \sqrt{u}du = \tfrac{1}{4}\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^{21}$$

$$= \tfrac{1}{6}[21^{3/2} - 1^{3/2}].$$

## Esempio

**(Funzioni pari e funzioni dispari)** Supponiamo che

$$f : [-a, a] \to \mathbb{R}$$

sia continua nel dominio ;

*i*) se $f$ è pari $(f(x) = f(-x))$, allora

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx;$$

*ii*) se $f$ è dispari $(f(x) = -f(-x))$, allora

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Per esempio l'integrale da $-\pi$ a $\pi$ di $\sin x$ è nullo.

# Integrazione per parti

La regola di derivazione del prodotto di due funzioni ci dice che

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Nella notazione degli integrali indefiniti

$$\int (f'g + fg')\, dx = f(x)g(x) + C,$$

e dalla linearità dell'integrazione si ha

$$\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x),$$

da cui la regola di integrazione per parti per integrali indefiniti

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Per integrali definiti la regola di integrazione per parti diventa

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

## Esempio

Calcoliamo alcuni integrali indefiniti tramite la regola di integrazione per parti. Consideriamo

$$\int x \sin x dx.$$

Scegliendo $f'(x) = \sin x$ e $g(x) = x$ si ottiene $f(x) = -\cos x$ e

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int (-\cos x) \cdot 1 dx = -x \cos x + \int \cos x dx.$$

Dalle regole di integrazione elementari

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Osserviamo che la scelta $f'(x) = x, \quad g(x) = \sin x$ non avrebbe portato semplificazioni perché l'integrale di un polinomio ne aumenta il grado, mentre con la scelta fatta $x$ "sparisce".

## Esempio

Valutiamo

$$\int \ln x dx,$$

dove sembra esserci una sola funzione. In realtà possiamo scegliere

$$f'(x) = 1, \quad g(x) = \ln x \Rightarrow f(x) = x, \quad g'(x) = \frac{1}{x},$$

e quindi

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Proviamo ora con

$$\int e^x \sin x dx$$

e la scelta $f'(x) = \sin x, \quad g(x) = e^x$. Si ottiene

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx,$$

## Esempio

(Continuazione) L'integrale da calcolare appare della stessa difficoltà di quello di partenza. Insistiamo con la scelta $f'(x) = \cos x, \quad g(x) = e^x$, quindi

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

e ora sembra che siamo tornati al punto di partenza. Ma se sostituiamo l'ultimo integrale nella prima formula per parti si ottiene

$$\int e^x \sin x dx = e^x(-\cos x + \sin x) - \int e^x \sin x dx,$$

che possiamo vedere come una equazione nell'integrale da calcolare,

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

## Esempio

Calcoliamo

$$\int_0^1 \arctan x dx.$$

Posto $f'(x) = 1$ e $g(x) = \arctan x$ si ottiene

$$\int_0^1 \arctan x dx = x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Dalla derivata della funzione composta $d \ln |f(x)| = f'(x)/f(x)$, si ottiene

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1).$$

Quindi

$$\int_0^1 \arctan x dx = \arctan(1) - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

# Integrali impropri

## Esempio

Intervallo di integrazione non limitato Consideriamo la funzione $f(x) = 1/x^2$ con $x \in [1, +\infty)$. Ha senso chiedersi quanto vale l'area sottesa il grafico di $f(x)$, dunque l'integrale di $f(x)$ su $[1, +\infty)$ ?

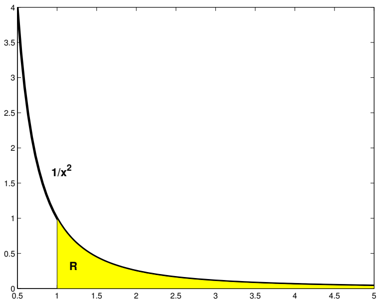



FIGURE – Come possiamo calcolare l'area della regione $R$ ?

## Esempio

Se consideriamo l'intervallo limitato $[1, b]$, $b > 1$, abbiamo

$$A(b) = \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Un modo sensato per valutare l'area della regione $R$ sottesa il grafico di $f(x)$ é quello considerare valori di $b$ sempre piú grandi e dunque di ricorrere ad una operazione di limite. Potremmo definire, se esiste, come area della regione $R$ sottesa il grafico il limite, per $b \to +\infty$, delle aree $A(b)$, ossia

$$\text{area}(R) = \lim_{b\to+\infty} A(b).$$

Per l'esempio fatto si ottiene

$$\text{area}(R) = \lim_{b\to+\infty} 1 - \frac{1}{b} = 1$$

.

## Definizione

*Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua (oppure localmente integrabile). Se esiste finito il limite*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt,$$

*la funzione si dice integrabile in senso improprio sull'intervallo $[a, +\infty)$, il limite si dirà integrale improprio (o generalizzato) di $f$ in $[a, +\infty)$ e si indicherà con*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt.$$

In modo analogo si definisce l'integrale improprio (generalizzato)

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)dt = \int_{-\infty}^b f(t)dt,$$

per $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ continua (o localmente integrabile). Se il limite esiste finito si dice che l'integrale improprio converge, se il limite esiste ma è uguale a $\pm\infty$ si dice che l'integrale improprio diverge.

Per una funzione continua

$$f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R},$$

possiamo considerare l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx,$$

spezzando l'integrale in due integrali separati :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

per un fissato punto $a \in \mathbb{R}$. Se entrambi gli integrali sono convergenti la funzione $f$ si dice integrabile in senso improprio su tutta la retta reale $\mathbb{R}$.

## Esempio

Non sempre l'integrale converge Consideriamo ora l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx,$$

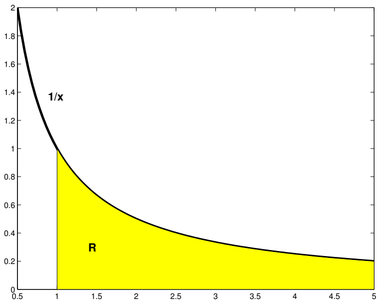



FIGURE – Esempio di integrale divergente.

## Esempio

In questo caso

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^x = \ln x.$$

Si deduce che

$$\lim_{x \to +\infty} A(x) = +\infty$$

e quindi l'integrale è divergente.

## Esempio

Valutiamo

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx.$$

Abbiamo

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 e^t dt = \lim_{x \to -\infty} e^t \Big|_x^0 = 1.$$

Analoghi calcoli mostrano che $e^x$ non è invece integrabile su $[0, +\infty)$.

## Esempio

Valutiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Introduciamo un punto intermedio, per esempio $a = 0$ e consideriamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Abbiamo

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to-\infty} \arctan x\Big|_{b}^{0} = \frac{\pi}{2}.$$

Dunque essendo $f$ pari

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

## Osservazione

Una funzione potrebbe non essere integrabile in senso improprio non solo perchè il limite degli integrali definiti su intervalli di lunghezza crescente diverge a $\pm\infty$, ma anche a causa di oscillazioni o altri fenomeni tali per cui il limite non esista. Per esempio analizzando l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx,$$

abbiamo, per $b > 0$,

$$\int_0^b \sin x dx = -\cos x \Big|_0^b = -\cos b + 1.$$

Il limite per $b \to +\infty$ non esiste e quindi la funzione $\sin$ non è integrabile in senso improprio sulla semiretta $[0, +\infty)$.

# Funzioni non limitate

Consideriamo una funzione continua $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, con un asintoto verticale $x = a$. La funzione non è limitata. Anche per questo tipo di funzioni la definizione usuale di integrale non si applica.

## Esempio

Integrazione e asintoti verticali La funzione $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $x \in (0, 1]$ ha un asintoto verticale in $x = 0$. Per ogni $a \in (0, 1]$ abbiamo

$$A(a) = \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = 2(1 - \sqrt{a}).$$

Ancora possiamo immaginare l'area della regione sottesa come limite delle aree $A(a)$ per $a$ che si avvicina a $0$

$$A = \lim_{a \to 0^+} A(a) = \lim_{a \to 0^+} 2(1 - \sqrt{a}) = 2.$$

## Definizione

*Sia* $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, se esiste finito il limite*

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt,$$

*la funzione si dice integrabile in senso improprio (generalizzato) nell'intervallo* $[a, b]$ *e il limite si chiamerà integrale improprio (generalizzato) di* $f$ *in* $[a, b]$ *e si denoterà con il simbolo*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

In modo analogo possiamo definire l'integrale generalizzato di una funzione $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, quando esiste il limite finito,

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

Nel caso in cui i limiti coinvolti sono finiti l'integrale improprio si dice convergente, se il limite è infinito si dice invece divergente.

## Esempio

Valutiamo

$$\int_0^1 \ln x dx.$$

La funzione integranda ha un asintoto verticale per $x = 0$, abbiamo

$$I(a) = \int_a^1 \ln x dx = x \ln x - x\Big|_a^1 = (-1 - a \ln a - a),$$

dove abbiamo utilizzato l'integrazione per parti. Quindi

$$\lim_{a \to 0^+} I(a) = \lim_{a \to 0^+} (-1 - a \ln a - a) = -1,$$

infatti il limite di $a \ln a$ per $a \to 0^+$ è nullo.