Metodi Matematici per l'Economia anno 2017/2018 Gruppo B

Docente: Giacomo Dimarco

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Ferrara

VNIVERSITÀ
DEGLI·STVDI
DI·FERRARA

https://sites.google.com/a/unife.it/giacomo-dimarco-home-page/
giacomo.dimarco@unife.it

Corso di Laurea in Economia

Esempio

Pendenza della retta tangente in un punto al grafico di una funzione

- Sia $P(x_0, f(x_0))$ il punto in cui vogliamo valutare la pendenza della retta tangente, e $Q(x, f(x))$ un qualsiasi altro punto del grafico di f, $x \neq x_0$.
- La pendenza $m(x)$ della retta per P e Q vale

$$m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\text{incremento di } f}{\text{incremento di } x},$$

- Questo rapporto è detto rapporto incrementale. Posto $x = x_0 + h$, $h \in \mathbb{R}$, il rapporto incrementale diventa

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- La pendenza limite sarà dunque,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

Esempio

Legge del moto

- Supponiamo che la posizione di un oggetto sia data dalla funzione $y = s(t)$. La velocità media v_m nell'intervallo di tempo $[t, t+h]$, $h > 0$ è

$$v_m = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

- I limite della velocità media per $h \to 0$ fornisce la *velocità istantanea* dell'oggetto all'istante t

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

- Abbiamo che l'accelerazione media dell'oggetto nello stesso intervallo di tempo sarà data da

$$a_m = \frac{v(t+h) - v(t)}{h}.$$

- Potremo quindi definire l'*accelerazione istantanea* dell'oggetto come

$$a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}.$$

Definizione (Derivata)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I *intervallo di* $\mathbb{R}$, *e sia* $x_0 \in I$ *un punto interno a tale intervallo. Se esiste finito il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

la funzione è detta derivabile *in* x_0. *Tale limite prende il nome di* derivata *della funzione* f *nel punto* x_0, *e viene indicato con* $f'(x_0)$.

Osservazione

(Notazioni) La derivata di f in x_0 può essere indicata in modi differenti, tra cui

$$f'(x_0), \quad y', \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}, \quad \frac{dy}{dx}.$$

Normalmente utilizzeremo il primo simbolo $f'(x_0)$ salvo quando sarà comodo ricorrere a un altro.

Osservazione

(Notazioni)

- Se scriviamo, $x = x_0 + h$, si ottiene la definizione equivalente

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h}.$$

- Nel caso in cui $I = [a, b]$, se $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$ si può parlare di derivata destra $f'_+(a)$ in $x_0 = a$ e di derivata sinistra $f'_-(b)$ in $x_0 = b$, se esistono i limiti

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(b) = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b},$$

  o gli analoghi limiti per $h \to 0^+$ oppure per $h \to 0^-$.

- Ovviamente la derivata in x_0, punto interno, esiste se e solo se esistono e sono uguali la derivata destra e sinistra in x_0, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Esempio

(Uso della definizione) Calcoliamo le derivate di alcune funzioni elementari in punti fissati x_0 della retta : $f_0(x) = c$, $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = x^2$.

$$f_0'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f_0(x) - f_0(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{c-c}{x-2} = 0;$$

$$f_1'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(1+h) - f_1(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(1+h)} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{(1+h)} - 1)(\sqrt{(1+h)} + 1)}{h(\sqrt{(1+h)} + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{(1+h)} + 1)} = \frac{1}{2};$$

$$f_{1,+}'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f_1(h) - f_1(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty;$$

$$f_2'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_2(h) - f_2(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1;$$

$$f_3'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f_3(x) - f_3(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x-1} = 2.$$

Esempio

(Valore assoluto) Consideriamo la funzione valore assoluto $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$, e $x_0 = 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sign}(x).$$

Sappiamo che quest'ultimo limite non esiste (vale 1 a destra e -1 a sinistra), quindi f non ha derivata in 0 e non è derivabile in questo punto.

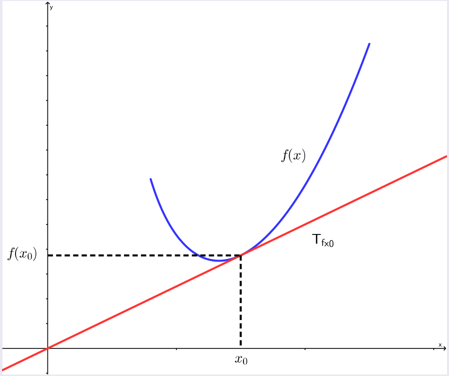
Esempio

(Equazione retta tangente) Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ ha pendenza $f'(x_0)$. Nel caso di funzione derivabile possiamo scrivere l'equazione di questa retta T_{x_0} :

$$T_{x_0} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Esempio

(Equazione retta tangente - continuazione)



Se $f'(x_0) = +\infty$ (o $-\infty$), possiamo considerare come retta tangente la retta di equazione $x = x_0$. Si osservi come nelle vicinanze del punto x_0 il grafico della retta tangente T_{x_0} e il grafico di f siano essenzialmente sovrapposti.

Funzione derivata

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, possiamo considerare i punti del dominio I in cui tale funzione è derivabile e costruire una nuova funzione che associ a x il valore $f'(x)$,

$$x \;\mapsto\; f'(x), \qquad f \;\text{ derivabile }\; \text{in} \;\; x.$$

La nuova funzione si chiama funzione derivata e sarà indicata con $f'(x)$.

Esempio

(Derivate di alcune funzioni) Se consideriamo la funzione $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, si verifica che $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se $f(x) = x$ dalla definizione otteniamo subito

$$\lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo adesso la funzione valore assoluto. Per $x \neq 0$ la funzione $f(x) = |x|$ è derivabile e risulta $f(x) = \text{sign}(x)$. Infatti $f(x) = x$ se $x > 0$ e $f(x) = -x$ se $x < 0$. Quindi dal caso precedente la derivata della funzione varrà $f'(x) = 1$ se $x > 0$ e $f'(x) = -1$ se $x < 0$. Ossia $f'(x) = \text{sign}(x)$.

Esempio

(Derivate di alcune funzioni - continuazione) Calcoliamo ora le derivate di $f(x) = x^2$ e $f(x) = 1/x$. Nel primo caso otteniamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x.$$

Nel secondo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x - (x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Infine la funzione radice $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ fornisce

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Si noti che non sempre le funzioni f e f' hanno il medesimo dominio : $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ con $f'(x) = \mathrm{sign}(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ con $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

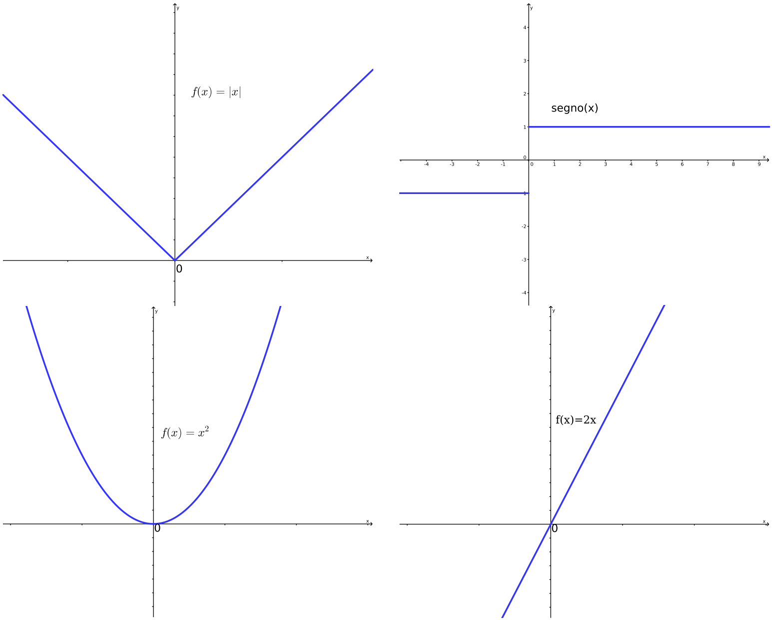


FIGURE – Le funzioni $|x|$ e x^2 e le rispettive derivate $\text{sign}(x)$ e $2x$.

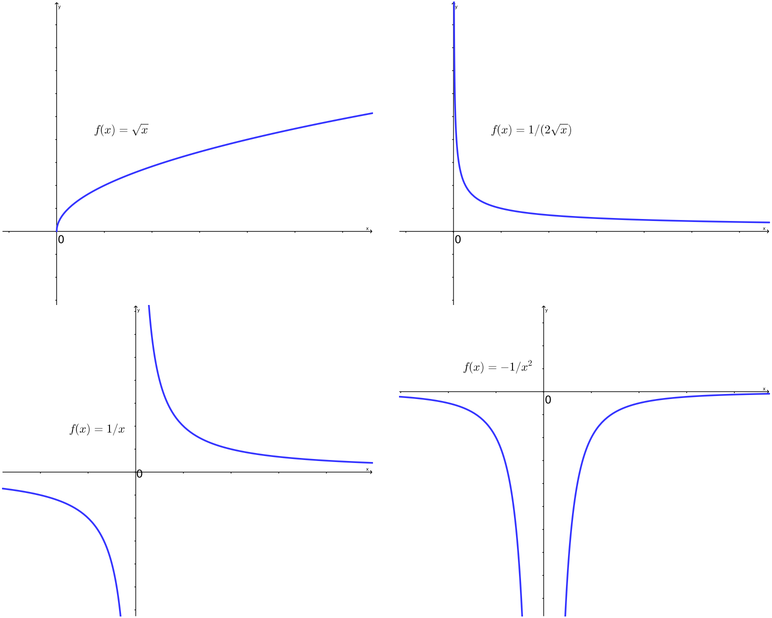


FIGURE – Le funzioni $1/x$ e $\sqrt{x}$ e le rispettive derivate $-1/x^2$ e $1/(2\sqrt{x})$.

Esempio

(Derivata di un monomio) Sia ora $g(x) = x^p$, $p \in \mathbb{N}$, $p > 0$, si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^p - x^p}{h},$$

ricordando che la differenza tra potenze $a^p - b^p$ si può scrivere come

$$a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \ldots + ab^{p-2} + b^{p-1}),$$

si ottiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{h} \left((x+h)^{p-1} + (x+h)^{p-2}x + \ldots + (x+h)x^{p-2} + x^{p-1}\right) \; = \; px^{p-1}.$$

L'ultima uguaglianza segue dal fatto che abbiamo p termini tutti convergenti a x^{p-1} per $h \to 0$. Si deduce quindi che la funzione derivata esiste per ogni x reale e $p > 0$ in $\mathbb{N}$

$$g(x) = x^p \; \Rightarrow \; g'(x) = px^{p-1}.$$

La formula precedente risulta valida per tutti i valori di x e p in $\mathbb{R}$.

Teorema (Regole di derivazione)

Siano f, g *due funzioni definite in* I *e derivabili in* $x_0 \in I$, c *una costante, allora*

i) *la funzione* cf *è derivabile in* x_0 *e* $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$ *;*

ii) *la funzione* $f+g$ *è derivabile in* x_0 *e* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ *;*

iii) *la funzione* $f-g$ *è derivabile in* x_0 *e* $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$ *;*

iv) *la funzione* fg *è derivabile in* x_0 *e* $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ *;*

v) *se* $g(x_0) \neq 0$ *la funzione* f/g *è derivabile in* x_0 *e vale*

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Dimostriamo la regola *iv)*. Sommiamo e togliamo la quantità $f(x_0+h)g(x_0)$ al numeratore del rapporto incrementale in modo tale da "separare" il contributo incrementale di f e di g, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{(f(x_0+h) - f(x_0))g(x_0) + f(x_0+h)(g(x_0+h) - g(x_0))}{h} \\
= \quad & g(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{(f(x_0+h) - f(x_0))}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)(g(x_0+h) - g(x_0))}{h}
\end{aligned}$$

da cui la formula desiderata attraverso le proprietà dei limiti.

Derivabilitá e continuitá

Teorema

Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

Infatti

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

e passando al limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = 0$$

Poichè $\lim_{x \to x_0} x - x_0 = 0$ e $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Osservazione

Il viceversa è falso. Per esempio la funzione $f(x) = |x|$ è continua in ogni x reale ma non è derivabile in $x = 0$. Da un punto di vista grafico infatti il concetto di continuità equivale alla possibilità di tracciare il grafico della funzione senza staccare la penna dal foglio. La derivabilità invece è una richiesta aggiuntiva, ossia che il grafico della funzione sia "liscio" ossia non presenti "spigoli".

Esempio

(Derivate delle funzioni polinomiali) Nel caso di funzioni f, g derivabili per x appartenente a un dominio comune, le regole di calcolo permettono di costruire nuove derivate

$$(cf)'(x), \quad (f \pm g)'(x), \quad (fg)'(x), \quad (f/g)'(x) \quad \text{per} \quad g(x) \neq 0.$$

Le regole di derivazione possono anche essere utilizzate più volte consecutivamente, in questo modo possiamo dimostrare, per esempio, che tutte le funzioni polinomiali sono derivabili e vale

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \;\Rightarrow\; p'(x) = a_1 + 2a_2 x + ... + n a_n x^{n-1},$$

da cui si deduce che anche la funzione derivata è una funzione polinomiale di grado almeno uno inferiore alla funzione di partenza.

Esempio

(Derivate delle funzioni trigonometriche) Vediamo il calcolo della derivata della funzione seno in $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h \ + \ \sin h \cos x - \sin x}{h},$$

da cui

$$\sin'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} \ + \ \cos x \frac{\sin h}{h} \right) = \cos x.$$

In modo analogo si ottiene $\cos'(x) = -\sin x$.
Dalle regole di calcolo della derivata possiamo dedurre che anche la funzione tangente è derivabile, nei punti dove $\cos x \neq 0$, e inoltre

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Teorema (Derivata della funzione composta)

Se f è definita in un intorno di x_0 e derivabile in x_0, se g è definita in un intorno di $f(x_0)$ e derivabile in $f(x_0)$ allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in x_0 e

$$(g \circ f)'(x_0) \;=\; g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Esempio

Consideriamo la funzione $h(x) = \sqrt{(x^2+1)}$. Questa funzione é composizione della funzione $f(x) = x^2 + 1$, e $g(y) = \sqrt{y}$, cioè $h = g \circ f$. Si ha

$$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}},\; y \neq 0 \text{ e } f'(x) = 2x.$$

Dalla formula della derivata della funzione composta si ottiene

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(\sqrt{1+x^2})2x = \frac{1}{2\sqrt{(x^2+1)}}2x = \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}}.$$

Osserviamo che la derivata è definita per ogni x in $\mathbb{R}$ perché $x^2 + 1 \neq 0$.

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, una funzione derivabile e invertibile. Supponiamo inoltre di sapere che anche f^{-1} è derivabile. Dalla relazione

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in I,$$

derivando entrambi i membri si ottiene, dalla regola di derivazione della funzione composta il seguente risultato

Teorema (Derivata della funzione inversa)

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente monotona, se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e vale la formula

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad y_0 = f(x_0).$$

Esempio

(Derivate delle funzioni circolari inverse) Sia $f(x) = \sin x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, calcoliamo la derivata della funzione arcoseno. Posto $y = \sin x$, si ha $f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, quindi

$$\arcsin' y = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

In modo analogo si calcolano, negli opportuni domini,

$$\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Esempio

(Derivate delle funzioni esponenziali e delle loro inverse) Per la funzione $f(x) = a^x$, $a > 0$ si ottiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}.$$

Osserviamo che

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\ln(z+1)} \cdot \ln a = \ln a,$$

posto $z = a^h - 1$ si ha $h = \log_a(z+1)$ e ricordando che $\log_a(z+1) = \frac{\ln(z+1)}{\ln a}$ e il limite fondamentale di $\ln(z+1)/z$ per $z \to 0$.

Esempio

(Funzioni esponenziali e loro inverse - continuazione) La derivata dell'esponenziale soddisferà dunque

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

L'esponenziale è l'unica funzione che soddisfa un'equazione del tipo $y' = y$. La derivata del logaritmo naturale vale,

$$\ln'(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Per una generica funzione esponenziale e per un generico logaritmo possiamo ricondurci alla base e

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}, \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

e, dalle regole della derivata della funzione composta,

$$\frac{d}{dx} a^x = \ln a \cdot a^x, \quad \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}.$$

Derivate di funzioni elementari

Funzione f	**Derivata** f'	**Dominio derivata**
c (costante)	0	$x \in \mathbb{R}$
x	1	$x \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$x > 0$
$1/x$	$-1/x^2$	$x \neq 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$	$x \ : \ \cos x \neq 0$
x^r	rx^{r-1}	$x > 0$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$	$x > 0$

Teorema (Teorema di Fermat)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$ e interno a I, f sia derivabile in x_0, allora se x_0 è un punto di massimo o minimo (assoluto o relativo) per f, $f'(x_0) = 0$.

- La dimostrazione si basa sulle proprietà dei limiti.
- Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo locale (analogamente per il massimo).
- Per $x > x_0$, x in un opportuno intorno di x_0, si ha $f(x) \geq f(x_0)$ e $(x - x_0) > 0$, quindi per il Teorema della permanenza del segno si ha $f'_+(x_0) \geq 0$.
- Per $x < x_0$, nell'intorno di x_0, si ha $f(x) \geq f(x_0)$ e $(x - x_0) < 0$, quindi $f'_-(x_0) \leq 0$ sempre per il Teorema della permanenza del segno.
- Essendo $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$, segue che $f'(x_0) = 0$.

Osservazione

- Il fatto che $f'(x_0) = 0$ non implica nulla sul comportamento di una funzione in x_0. Le funzioni x^2, $-x^2$, x^3, $-x^3$ hanno tutte derivata nulla in $x = 0$ ma in tale punto hanno, rispettivamente, un minimo locale, un massimo locale, un punto di crescita, un punto di decrescita.
- Nell'enunciato del Teorema di Fermat l'intervallo considerato è aperto. Scegliendo un intervallo che comprende uno o entrambi gli estremi la conclusione è diversa.
- Un punto può essere di massimo o di minimo anche se ivi f non è derivabile.

Osservazione

(Massimi e minimi) Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, e f sia continua in I. Per trovare eventuali punti di minimo o di massimo locale (o assoluti) dobbiamo controllare tre categorie di punti,

- estremi dell'intervallo I se questi vi appartengono ;
- punti di I in cui f non è derivabile ;
- punti stazionari interni, cioè punti in cui $f'(x_0) = 0$.

Esempio

- La funzione $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$ ha punti di massimo locale per $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ e punti di minimo locali per $x = (2k+1)\pi$. In effetti da $\cos' x = -\sin x$, si verifica che in tutti questi punti la derivata si annulla.
- La funzione $f(x) = x,\ x \in (0,1)$, è derivabile ovunque e $f'(x) = 1 \neq 0$, gli estremi dell'intervallo non appartengono al dominio, questa funzione non ha nè massimo nè minimo in $(0,1)$.
- La funzione $f(x) = |x|,\ x \in [-4,5]$, ha un punto di minimo (assoluto) in $x = 0$ dove non è derivabile, ha due punti di massimo in $x = -4$ e $x = 5$, estremi dell'intervallo di definizione.
- La funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2,\ x \in [-2,3]$ i candidati, per essere un minimo o un massimo, sono gli estremi $x_0 = -2$, $x_1 = 3$ ed i punti dove si annulla la derivata

$$f'(x) = 0 \Rightarrow\ 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x_2 = 0,\ x_3 = 2.$$

Teorema del valor medio o di Lagrange

Teorema (Teorema di Lagrange o del valor medio)

Sia $: [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione definita nell'intervallo chiuso* $[a, b]$ *e tale che* f *è continua in* $[a, b]$ *ed* f *è derivabile in* (a, b), *allora esiste almeno un punto* $c \in (a, b)$ *tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Definiamo una nuova funzione $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$
- Allora $g(x)$ è differenziabile in (a, b), $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ e $g(a) = g(b) = 0$.
- Per il Teorema di Weierstrass g essendo continua in $[a, b]$ assume il suo massimo e il suo minimo in $[a, b]$.
- Se il massimo e il minimo sono in a e in b allora $g = 0$ sull'intervallo e quindi anche $g'(x) = 0$ su tutto l'intervallo da cui la tesi.
- Altrimenti se un punto estremo c è all'interno dell'intervallo la derivata di g si annulla in c e quindi $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

Teorema di Rolle

Teorema (Teorema di Rolle)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione definita nell'intervallo chiuso* $[a, b]$ *e tale che*

- f *è continua in* $[a, b]$ *;*
- f *è derivabile in* (a, b) *;*
- $f(a) = f(b)$ *;*

allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ *tale che* $f'(c) = 0$*.*

Osservazione

- Il Teorema di Rolle é un caso particolare del Teorema di Lagrange.
- I Teoremi di Rolle e di Lagrange sono teoremi di esistenza : non dicono nulla sull'unicità dei punti scelti.
- Inoltre non forniscono una costruzione del punto c nelle condizioni desiderate.

Massimi e minimi

Teorema (Derivata e proprietà locali)

Sia f derivabile in (a, b). Se f è crescente, per ogni $x \in (a, b)$ si ha $f'(x) \geq 0$. Se f è decrescente, per ogni $x \in (a, b)$ si ha $f'(x) \leq 0$.

Teorema (Test di monotonia)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile in (a, b), allora

i) *se $f'(x) > 0, \quad \forall x \in (a, b)$ allora f è strettamente crescente in $[a, b]$;*
ii) *se $f'(x) < 0, \quad \forall x \in (a, b)$ allora f è strettamente decrescente in $[a, b]$;*
iii) *se $f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in (a, b)$ allora f è non decrescente in $[a, b]$;*
iv) *se $f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in (a, b)$ allora f è non crescente in $[a, b]$.*

Test di monotonia : dimostrazione

La dimostrazione dei vari punti è simile, ci limitiamo solo al punto $i)$. Siano $x_1,\ x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, per il Teorema del valor medio applicato alla restrizione di f all'intervallo $[x_1, x_2]$ (valgono tutte le ipotesi anche per la restrizione), si ha

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c),$$

per un opportuno $c \in (x_1, x_2)$. Ne segue che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1),$$

ma $f'(c) > 0$, per ipotesi, e $(x_2 - x_1) > 0$, da cui $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ovverosia $f(x_2) > f(x_1)$.

Osservazione

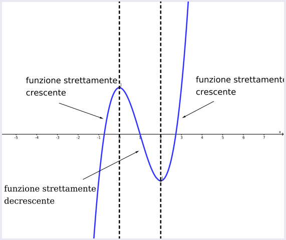
Se f è strettamente crescente può esistere x_0 tale che $f'(x_0) = 0$. Ad esempio la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e ha derivata $f'(x) = 3x^2$ che si annulla per $x = 0$.

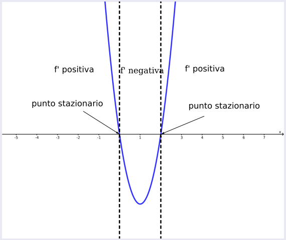
Esempio

Cerchiamo in quali intervalli la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ cresce e in quali decresce. Abbiamo

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2),$$

pertanto $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e $x > 2$, $f'(x) < 0$ per $x \in (0, 2)$. Segue che la funzione f è strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$, mentre è strettamente decrescente nell'intervallo $(0, 2)$.





Gli zeri di f' sono $x_1 = 0$ e $x_1 = 2$. In x_1 si passa dalla crescita alla decrescita, sarà quindi un punto di massimo locale, al contrario in x_1 si passa dalla decrescita alla crescita, sarà quindi un punto di minimo locale.

Il segno della derivata ci permette di avere a disposizione uno strumento importante per la ricerca dei punti di minimo o di massimo.

Teorema (Test della derivata prima)

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* (a, b), *sia* $x_0 \in (a, b)$ *un punto stazionario,* $f'(x_0) = 0$,

i) *Se* f *è derivabile negli intervalli* (a, x_0) *e* (x_0, b), *e* $f'(x) > 0,\ x \in (a, x_0)$, $f'(x) < 0,\ x \in (x_0, b)$, *allora* f *ha un punto di massimo locale in* x_0.

ii) *Se* f *è derivabile negli intervalli* (a, x_0) *e* (x_0, b), *e* $f'(x) < 0,\ x \in (a, x_0)$, $f'(x) > 0,\ x \in (x_0, b)$, *allora* f *ha un punto di minimo locale in* x_0.

Esempio

Si consideri la funzione $f(x) = xe^{-x^2},\ x \in \mathbb{R}$. Abbiamo,

$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

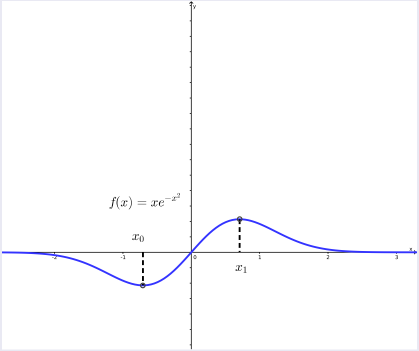
Esempio

(continuazione) Non vi sono punti singolari, la derivata è definita per ogni x reale, i punti stazionari sono invece le radici di $(1-2x^2)$, dato che l'esponenziale è sempre positivo. Si hanno quindi due punti stazionari, $x_0 = -1/\sqrt{2}$, $x_1 = 1/\sqrt{2}$. Anche il segno della derivata f' è determinato solo dal fattore $(1-2x^2)$ che è l'equazione di una parabola. Si ottiene, $f'(x) > 0$, per $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $f'(x) < 0$, per $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$. La situazione relativa al segno della derivata prima e all'andamento di crescita/decrescita della funzione puó essere sintetizzato come

$$
\begin{array}{cccccc}
f' & & 0 & & 0 & \\
 & -- & & ++ & & -- \\
\hline
f & & x_0 = -1/\sqrt{2} & & x_1 = 1/\sqrt{2} & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\
 & & \text{min} & & \text{max} &
\end{array}
$$

Esempio

(continuazione) Il punto x_0 sarà quindi un punto di minimo locale, mentre in x_1 ci sarà un massimo locale. Si noti che la funzione data è una funzione dispari, $f(x) = -f(-x)$, quindi questa simmetria poteva suggerire dall'inizio la posizione del punto di minimo (o di massimo) dalla conoscenza dell'altro punto.



Teorema di de l'Hôpital

- Consideriamo il limite seguente $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ con f e g che tendono a zero per $x \to x_0$. Siamo davanti a un limite indeterminato $0/0$.
- Riscriviamo il limite usando i rapporti incrementali

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)}$$

- Passando al limite per $x \to x_0$, se f e g sono differenziabili in x_0 si trova

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Se non siamo in grado di calcolare il limite del rapporto di due funzioni in forma indeterminata $0/0$, possiamo provare a calcolare il limite del rapporto delle rispettive derivate.
- In realtà, non sempre i dure rapporti hanno lo stesso limite. Vediamo quali sono le condizioni che è necessario soddisfare per poter fare questa operazione.

Teorema di de l'Hôpital

Teorema

Siano f *e* g *definite in un intorno di* x_0 *(anche con* $x_0 = \pm\infty$*) soddisfacenti le seguenti condizioni :*

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ *oppure* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$
- f *e* g *derivabili nell'intorno di* x_0 *con* $g'(x_0) \neq 0$ *se* $x \neq x_0$*.*
- *esiste il limite* $L = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(finito o infinito).*

Allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Esempio

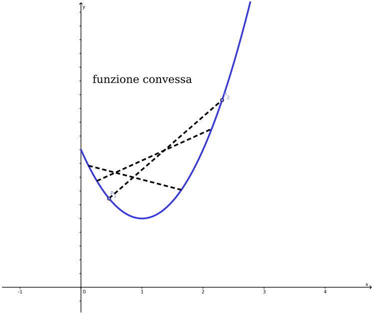
Il limite $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(x)$ con $\alpha > 0$ è una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$. Possiamo riscriverlo nella forma indeterminata ∞/∞ come $\lim_{x\to 0^+} \log(x)/x^{-\alpha}$. Usando de l'Hospital (sono verificate le ipotesi) abbiamo $\lim_{x\to 0^+} \log(x)/x^{-\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\alpha}x^\alpha = 0$.

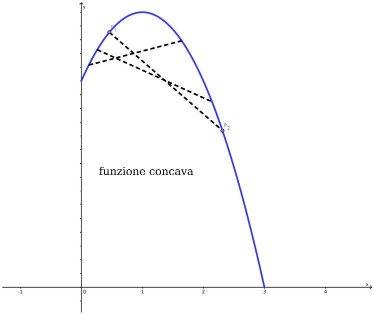
Derivata e convessità

Definizione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, la funzione f si dice convessa (concava) se per ogni coppia di punti $x_1 < x_2 \in I$ il segmento di estremi $P_1(x_1, f(x_1))$, $P_2(x_2, f(x_2))$ non sta al di sotto (sopra) del grafico di f per $x \in [x_1, x_2]$.

Una funzione f convessa si dice anche che ha la concavità rivolta verso l'alto, una funzione f concava si dice che ha la concavità rivolta verso il basso.





È intuibile che nel caso di funzione derivabile, la retta tangente rimarrà sotto il grafico della funzione f nel caso di convessità, sopra nel caso di concavità.

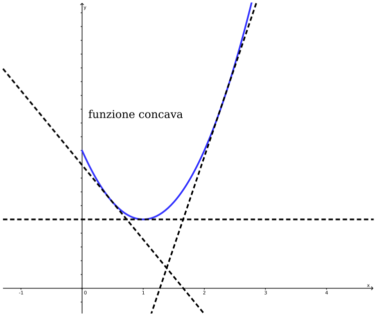


FIGURE – Tangenti e funzioni convesse o concave.

Nel caso di convessità e derivabilità vale

$$f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1),$$

dove l'espressione al secondo membro rappresenta l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_1.

Derivata e convessità

Dovrebbe essere intuitivo che la pendenza della retta tangente è una quantità crescente nel caso di convessità e decrescente nel caso di concavità. Queste proprietà si possono dimostrare formalmente e forniscono il seguente risultato.

Teorema (Derivata e convessità)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *derivabile in tutto l'intervallo* (a, b) *e continua in tutto il dominio, valgono le proprietà,*

i) f *è convessa (concava) in* $[a, b]$ *se e solo se* f' *è non decrescente (non crescente) in* (a, b) *;*

ii) f *è convessa se e solo se* $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in (a, b)$, f *è concava se e solo se* $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in (a, b)$.

Poichè una funzione è crescente se la sua derivata è positiva ed è decrescente se la sua derivata è negativa, possiamo definire una nuova funzione :

Definizione

Se la derivata f' *di* f *è una funzione derivabile, la sua derivata si chiama derivata seconda di* f *e si indica con* f'', $\frac{d^2 f}{dx^2}$, $D^2 f$.

Derivata e convessità (continua)

Vale allora il risultato seguente.

Teorema

Se $f''(x) > 0$ è la funzione f è convessa. Se $f''(x) < 0$ la funzione f è concava.

Teorema (Secondo test di riconoscimento dei punti stazionari)

Sia f definita in (a, b), derivabile due volte in x_0. Si abbia inoltre $f'(x_0) = 0$. Se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo locale, se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo locale.

Teorema

Se x_0 è un punto di flesso per f ed esiste $f''(x_0)$, allora deve essere $f''(x_0) = 0$.

Questo non implica che se $f''(x_0) = 0$ allora x_0 è un punto di flesso (ad esempio $f(x) = x^4$ in $x = 0$ non c'è un flesso). Un modo certo per identificare un punto di flesso consiste nello studiare il segno della derivata seconda a sinistra e a destra di x_0. Se i segni sono diversi allora x_0 è un flesso.

Formula di Taylor

- Se f è derivabile in x_0, la retta tangente alla funzione in $(x_0, f(x_0))$ è $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- Si può dimostrare che per una funzione f si può usare l'approssimazione, per x "vicino" a x_0,
$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
- Questo significa che vicino a x_0 la funzione f si "comporta" come la funzione tangente a f in x_0.
- Possiamo scrivere in generale $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x_0)$, dove $R_1(x_0)$ prende il nome di resto o errore e dove
$$\lim_{x \to x_0} R_1(x_0) = 0, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$
- Questo significa che l'errore $R_1(x_0)$ tende a zero " più velocemente" di $(x - x_0)$.

Formula di Taylor (continua)

- Se f è derivabile n volte possiamo scrivere

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x_0)$$

- Si può allora dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} R_n(x_0) = 0, \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x_0)}{(x-x_0)} = \ldots = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$$

- Questo significa che $R_n(x_0)$ si avvicina a zero più velocemente del polinomio $(x-x_0)^n$. Ovvero quando x è sufficientemente vicino a x_0 la funzione

$$p_n(x,x_0) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

chiamata polinomio di Taylor è un ottima approssimazione della funzione f vicino a x_0.

Studio di funzione

Per eseguire lo studio di una funzione si determinano le seguenti caratteristiche :

- Il dominio D_f, le zone in cui f è maggiore o minore di zero, i punti in cui f si annulla.
- Le eventuali periodicità e/o la simmetrie di f.
- Gli intervalli di continuità e derivabilità.
- I limiti agli estremi degli intervalli di esistenza di f (di cui D_f è unione).
- Gli intervalli in cui f è crescente, decrescente, costante ed i punti di massimo e di minimo (relativi ed assoluti) utilizzando a tal scopo, se possibile, la derivata prima $f'(x)$.
- Gli intervalli di convessità e concavità di f mediante lo studio, se possibile, della derivata seconda $f''(x)$.
- L'esistenza e la posizione degli asintoti.