Metodi Matematici per l'Economia anno 2017/2018
Gruppo B

Docente: Giacomo Dimarco

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Ferrara

VNIVERSITÀ
DEGLI·STVDI
DI·FERRARA

https://sites.google.com/a/unife.it/giacomo-dimarco-home-page/
giacomo.dimarco@unife.it

Corso di Laurea in Economia

Vettori e matrici

- I concetti di matrice e vettore sono di fondamentale importanza nell'ambito della matematica, in particolare tali concetti risultano essenziali in molte applicazioni di tipo fisico, ingegneristico, economico.
- Tra le applicazioni piú recenti ricordiamo la *fotografia digitale*, il *CAD* e i *social networks*, la matematica finanziaria.
- L'*algebra lineare* si occupa dello studio delle principali regole per la manipolazione di vettori e matrici.
- Come vedremo una matrice non è nient'altro che una tabella rettangolare di numeri e un vettore rappresenterà un caso particolare di matrice.
- Tali concetti astratti saranno basilari per lo studio dei sistemi di equazioni lineari, ma la loro importanza si estende ad un campo assai più vasto.

Definizioni e primi esempi

Definizione

Una matrice è una tabella di numeri ordinata composta da righe e colonne. Si indica con a_{ij} *l'elemento della matrice* $\mathbf{A}$ *che si trova all'incrocio della riga* i*-esima con la colonna* j*-esima. Se* m *è il numero di righe ed* n *quello delle colonne abbiamo*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m *ed* n *sono dette* dimensioni *della matrice, se* $m = n$ *la matrice è detta* quadrata.

Vettori

Definizione (Vettori)

Un vettore riga *è una matrice formata da una sola riga, per cui* $m = 1$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Un vettore colonna *é una matrice formata da una sola colonna, per cui* $n = 1$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Un modo alternativo di definire un vettore è dire che un vettore è una $n-$*pla ordinata di numeri reali, dove* n *è il numero di elementi del vettore.*

- L'insieme dei vettori è indicato con $\mathbb{R}^{m\times 1} = \mathbb{R}^m$ per i vettori colonna oppure $\mathbb{R}^{1\times n} = \mathbb{R}^n$ per i vettori riga. In generale con il termine vettore ci si riferisce a un vettore colonna.

Esempio

(Vettori riga e colonna) Il vettore

$$\mathbf{x} = (1, 0, 2, 4, -1)$$

è un vettore riga di dimensione 5 (ossia una matrice di tipo 1×5), mentre il vettore

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è un vettore colonna di dimensione 6 (ossia una matrice di tipo 6×1).

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si ottiene accostando n vettori colonna di m elementi oppure m vettori riga di n elementi.

- I vettori con 1, 2 o 3 componenti sono rappresentati geometricamente su un asse, su un piano o nello spazio cartesiano in 3 dimensioni con delle frecce.
- L'origine del sistema di riferimento rappresenta il punto di partenza, mentre il punto di coordinate (x), $\mathbf{x} = (x, y)^T$ o $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ rappresenta il punto di arrivo della freccia.
- Nell'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$, ci sono dei vettori di particolare importanza e^i chiamati vettori fondamentali di $\mathbb{R}^n$. I vettori $\mathbf{e}^i$, $i = 1, .., n$ hanno tutte le componenti nulle tranne la componente i-esima che è uguale a 1. Ad esempio i vettori fondamentali di R^n sono

$$\mathbf{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ .. \\ .. \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ .. \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} \qquad .. \qquad \mathbf{e}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ .. \\ .. \\ 1 \end{pmatrix}$$

- In $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$, i vettori $\mathbf{e}^i$ vengono talvolta indicati con i nomi $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ o $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

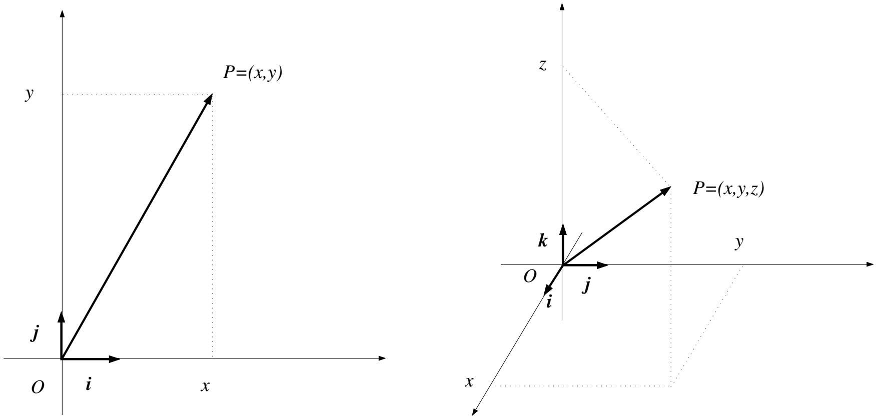


FIGURE – Vettori e sistemi di coordinate ortogonali in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Operazioni tra i vettori

Vediamo le operazioni che si possono definire tra i vettori.

- Somma. Dati due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ si definisce la somma come

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ .. \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ .. \\ .. \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Valgono le seguenti proprietà :

- La somma di due vettori di $\mathbb{R}^n$ è ancora un vettore di $\mathbb{R}^n$. Si dice che $\mathbb{R}^n$ è chiuso rispetto all'addizione.
- Commutativa : $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}, \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$.
- Associativa : $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R^n$.
- Esistenza del vettore nullo $\mathbf{0}$ tale che $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Ogni vettore $\mathbf{x}$ ammette un opposto $-\mathbf{x}$ tale che $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0 \ \forall \mathbf{x} \in R^n$.

Operazioni tra i vettori II

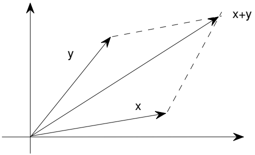
- Prodotto per uno scalare. Consiste nel moltiplicare ogni componente di un vettore $\mathbf{x} \in R^n$ per un numero reale $c \in \mathbb{R}$ chiamato scalare. Il risultato è ancora un vettore di $\mathbb{R}^n$. Si dice che $\mathbb{R}^n$ è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare :

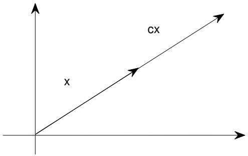
$$c\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ . \\ . \\ cx_n \end{pmatrix}, \qquad ad \ \ esempio \qquad -2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Valgono le seguenti proprietà :
  - Distributiva rispetto agli scalari : $(c_1 + c_2)\mathbf{x} = c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{x} \ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in R^n$.
  - Distributiva rispetto ai vettori $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)c = c\mathbf{x}_1 + c\mathbf{x}_2 \ \forall c \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R^n$.
  - Associativa : $c_1(c_2\mathbf{x}) = (c_1c_2)\mathbf{x} \ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in R^n$.
  - Elemento neutro $1\mathbf{x} = \mathbf{x}, \ \forall \mathbf{x} \in R^n$.
- Se un insieme si possono definire le operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare con le relative proprietà riportate, si dice che l'insieme è uno spazio vettoriale.

Esempio

- In $\mathbb{R}^2$, il vettore somma si ottiene con la regola del parallelogramma : La somma di due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è data dal vettore $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ che rappresentato sul piano corrisponde alla diagonale del parallelogramma i cui lati sono i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
- Il vettore $c\mathbf{x}$ è il vettore parallelo al vettore $\mathbf{x}$ di lunghezza c volte $\mathbf{x}$.





Combinazioni lineari

Definizione

Siano $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, .., \mathbf{x}^k$ *vettori di* $\mathbb{R}^n$ *e siano* $c^1, c^2, ..c^k$ *scalari. Il vettore di* $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}^i = c_1 \mathbf{x}^1 + c_2 \mathbf{x}^2 + .. + c_k \mathbf{x}^k$$

si dice combinazione lineare (c.l.) dei vettori $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, .., \mathbf{x}^k$ *con coefficienti* $c_1, c_2, ..c_k$

Il vettore z

$$z = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}$ con coefficienti $c_y = 2$ e $c_x = 1$, dove

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad e \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Combinazioni lineari, continuazione

Infatti

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Un qualsiasi vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è combinazione lineare dei vettori fondamentali $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, .., \mathbf{e}^n$, ovvero può essere scritto come $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}^i$. Infatti

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + .. + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + .. + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \mathbf{e}^1 + x_2 \mathbf{e}^2 + .. + x_n \mathbf{e}^n = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}^i.$$

- Si dice che i vettori fondamentali generano (sono dei generatori) di tutti i vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Prodotto interno di vettori

Definiamo il prodotto scalare

Definizione

Dati due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, *il numero*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

si chiama prodotto interno o prodotto scalare di $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$.

Così se

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

risulta

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 = -4$$

Prodotto interno : proprietà

Dati $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$, $h, k \in \mathbb{R}$

- Commutativa : $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
- Distributiva rispetto all'addizione tra vettori : $(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$.
- Omogenità rispetto a entrambi i fattori : $(h\mathbf{x}, k\mathbf{y}) = h(\mathbf{x}, k\mathbf{y}) = hk(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
- Non negatività $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ e $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Il prodotto interno di due vettori può annullarsi anche se entrambi i fattori sono non nulli. Se

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

risulta $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 + (-1) = 0$. Rappresentando geometricamente i due vettori si osserva che sono ortogonali.

Definizione

Dati due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, si dicono ortogonali se $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Modulo

- Esiste una naturale nozione di lunghezza di un vettore $\mathbf{x}$.
- Essa coincide con la distanza del punto x dall'origine 0 ed è calcolabile in due o tre dimensioni con il teorema di Pitagora.
- Tale lunghezza detta anche modulo o norma del vettore $\mathbf{x}$ si indica con $|\mathbf{x}|$ e può scriversi

$$|\mathbf{x}| = \begin{cases} \sqrt{x_1^2} = |x_1| & \textit{in una dimensione} \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & \textit{in due dimensioni} \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} & \textit{in tre dimensioni} \end{cases}$$

Questa nozione si estende naturalmente al caso generale di n dimensioni

Definizione

Il modulo o norma (euclidea) di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è definito da

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Modulo II

Per esempio, il modulo del vettore

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

risulta

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

Il modulo possiede le seguenti proprietà :

- Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $|x| \geq 0$ ed è nulla se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- $|c\mathbf{x}| = |c| \cdot |\mathbf{x}|$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni scalare c.
- $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (disuguaglianza triangolare).

L'ultima proprietà in due o tre dimensioni si riduce al noto risultato di geometria : la lunghezza di ogni lato di un triangolo non supera la somma delle lunghezze degli altri due.

Distanza

- Vale anche la nota disuguaglianza $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$, chiamata disuguaglianza di Schwartz.
- I vettori con norma unitaria sono detti versori.
- Attraverso la norma possiamo dare una nozione di distanza tra elementi di $\mathbb{R}^n$.
- Questa è viene definita estendendo il concetto di distanza in una, due e tre dimensioni noto dalla geometria elementare : $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)^2}$ con $N = 1, 2$ o 3.

Definizione

La distanza (euclidea) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tra due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ è definita da

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$$

Distanza II

Valgono le seguenti proprietà :

- Non negatività : $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- Simmetria : $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- Disuguaglianza triangolare : $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ per ogni scelta possibile di $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Per esempio, dati i due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

risulta

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(1-4)^2 + (2-3)^2 + (3-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{20}$$

Dipendenza lineare

- I generatori di uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ sono infiniti. In altre parole, si possono trovare infiniti vettori per cui vale la stessa proprietà vista per i vettori fondamentali $\mathbf{e}^i, \; i = 1, .., n$.

Definizione

Diciamo che k vettori sono linearmente dipendenti quando almeno uno può essere espresso come combinazione lineare degli altri. In caso contrario i vettori si dicono linearmente indipendenti.

- Non è restrittivo supporre che sia l'ultimo vettore $\mathbf{x}^k$ ad essere combinazione lineare degli altri.
- Se così non fosse è sufficiente rinumerare i vettori.
- In questa situazione, la dipendenza lineare implica l'esistenza di $c_1, c_2, .., c_{k-1}$ scalari tali che

$$\mathbf{x}^k = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \mathbf{x}^i$$

Dipendenza lineare, continuazione

Una definizione equivalente è la seguente

Definizione

I vettori $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, .., \mathbf{x}^k$ *sono linearmente dipendenti se e solo se esiste una combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli tale che* $\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{x}^i = 0$.
I vettori sono linearmente indipendenti se e solo se la relazione $\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{x}^i = 0$ *implica che i coefficienti sono tutti nulli.*

Esempio

I tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti. Infatti presi $c_1 = 3/2$ e $c_2 = 1/2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Primi esempi di matrici e caratteristiche principali

- Se tutti gli elementi sono nulli si parla di *matrice nulla* indicata con $\mathbf{O}$.
- L'insieme di tutte le matrici con m righe e n colonne sarà indicato con $\mathbb{R}^{m\times n}$ e tali matrici saranno dette di tipo $m \times n$.
- Gli elementi che hanno il primo e il secondo indice uguale $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{kk}$, $k = \min\{m, n\}$, formano la *diagonale principale* della matrice $\mathbf{A}$.
- Infine, due matrici si dicono *uguali* se hanno la stessa dimensione e inoltre sono uguali i rispettivi elementi
- La matrice $\mathbf{A}$ di componenti a_{ij} è uguale alla matrice $\mathbf{B}$ di componenti b_{ij} se $a_{ij} = b_{ij}$

Esempio

Se $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = -2$, $a_{22} = -1$, $a_{23} = 0$, allora

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $b_{11} = 5$, $b_{12} = 6$, $b_{21} = 7$, $b_{22} = 8$, $b_{31} = 9$, $b_{32} = 10$, allora

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ è una matrice 2×3, $\mathbf{B}$ è una matrice 3×2, $\mathbf{A}$ è un elemento di $\mathbb{R}^{2\times3}$, $\mathbf{B}$ di $\mathbb{R}^{3\times2}$. La diagonale principale di $\mathbf{A}$ è $\{1, -1\}$, di $\mathbf{B}$ è $\{5, 8\}$.
Infine

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

corrisponde a $c_{11} = -1$, $c_{12} = 1$, $c_{21} = 2$, $c_{22} = 4$. $\mathbf{C}$ è una matrice quadrata di dimensione 2 (2×2). La sua diagonale principale è $\{-1, 4\}$.

Matrici quadrate

Le matrici quadrate rivestono particolare importanza nell'ambito dell'algebra lineare.

- *Matrici triangolari inferiori* : $a_{ij} = 0$ per $i < j$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \textit{esempio :} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

- *Matrici triangolari superiori* : $a_{ij} = 0$ per $i > j$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \textit{esempio :} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

- *Matrici diagonali* : $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \textit{esempio :} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Caso particolare se $a_{ii} = 1$ per $i = 1, ..., n$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

detta *matrice identità*.

Trasposizione

Definizione (Trasposta)

Data una matrice $\mathbf{A}$ *di tipo* $m \times n$ *definiamo la* trasposta *di* $\mathbf{A}$ *la matrice* $\mathbf{A}^T$ *i cui elementi sono ottenuti da quelli di* $\mathbf{A}$ *scambiando righe e colonne,* $\mathbf{A}^T$ *è quindi di tipo* $n \times m$*. Si ha* $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$*. La trasposta di un vettore riga è un vettore colonna e viceversa.*

Definizione (Matrice simmetrica)

Se $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ *la matrice è detta* simmetrica*.*

Definizione

Siano $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *matrici di tipo* $m \times n$*, ossia con le stesse dimensioni. Definiamo con* α *in* $\mathbb{R}$

i) $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ *ponendo* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *per ogni valore di* i *e* j *;*

ii) $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A}$ *ponendo* $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ *per ogni valore di* i *e* j*.*

Tali operazioni sono dette rispettivamente somma di matrici *e* prodotto per uno scalare α*.*

Matrici simmetriche, somma e prodotto

Esempio

Sia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

la sua trasposta sarà

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Ad esempio la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

è una matrice simmetrica. Ne consegue che una matrice simmetrica è necessariamente quadrata. Si noti che vale la relazione sugli indici $a_{ij} = a_{ji}$.

Esempio

(Somma di matrici)
Consideriamo le matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

allora

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Avremo inoltre

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Esempio

Prodotto per uno scalare

Abbiamo

$$6\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 12\\18 & 24\end{pmatrix}$$

Se

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\2 & 1 & -4\end{pmatrix}$$

allora

$$\frac{1}{2}\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3/2 & -1 & 1/2\\1 & 1/2 & -2\end{pmatrix}.$$

Prodotto tra matrici

Definizione

Sia $\mathbf{A}$ *di tipo* $m \times q$ e $\mathbf{B}$ *di tipo* $q \times n$. *Allora*

iii) $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ *ha dimensione* $m \times n$ *e si ottiene ponendo*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj} \quad \textit{per ogni valore di } i \textit{ e } j.$$

Tale operazione è detta prodotto righe per colonne *di* $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

Esempio

(Prodotto di matrici).

- *matrice-matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1+20+42 & 9+15+35 \\ 2+12+36 & 18+9+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & 59 \\ 50 & 57 \end{pmatrix}$$

- *matrice-vettore*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+12 \\ 15+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Esempio

(Il prodotto non é commutativo) Consideriamo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Ci proponiamo di calcolare i prodotti $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$. Vale $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$? Chiaramente no, infatti il prodotto $\mathbf{AB}$ fornisce

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1+4 & 3+8 & 5+12 \\ 3+8 & 9+16 & 15+24 \\ 5+12 & 15+24 & 25+36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 17 \\ 11 & 25 & 39 \\ 17 & 39 & 61 \end{pmatrix}$$

mentre il prodotto $\mathbf{BA}$ fornisce

$$\mathbf{C} = \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1+9+25 & 2+12+30 \\ 2+12+30 & 4+16+36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$, infatti non hanno nemmeno la stessa dimensione. Non vale quindi la proprietà commutativa del prodotto. Non solo, non è neanche detto che se $\mathbf{AB}$ è definita lo sia anche $\mathbf{BA}$.

Proposizione (Proprietà prodotto)

Siano $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *matrici tali che il prodotto* $\mathbf{AB}$ *risulta definito e* α *in* $\mathbb{R}$. *Allora*

1. $$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB}).$$

2. *Se* $\mathbf{D}$ *ha le stesse dimensioni di* $\mathbf{A}$ *si ha*
$$(\mathbf{A}+\mathbf{D})\mathbf{B} = \mathbf{AB} + \mathbf{DB}$$

3. *Se* $\mathbf{C}$ *ha le stesse dimensioni di* $\mathbf{B}$ *si ha*
$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{BC}\ .$$

4. *Se* $\mathbf{A}$ *è di tipo* $m \times q$, $\mathbf{B}$ *di tipo* $q \times p$ *e* $\mathbf{C}$ *di tipo* $p \times n$. *Allora*
$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

5. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Matrici particolari e proprietà

- Abbiamo già visto diversi tipi particolari di matrici. Le matrici *nulle*, *identità*, *diagonali*, *triangolari superiori* e *inferiori*, *simmetriche*.
- Dato il particolare tipo di struttura risulta naturale supporre che tali matrici godono di particolari proprietà.
- Ad esempio la matrice nulla e la matrice identità hanno un ruolo simile ai numeri 0 e 1 nell'ambito delle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri. Più precisamente

Proposizione

Siano $\mathbf{A}$ *matrice quadrata,* $\mathbf{I}$ *matrice identità e* $\mathbf{O}$ *matrice nulla di dimensione* n. **A***llora*

1. $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
2. $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{O}$;
3. $\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}$;
4. $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$.

Inversa di una matrice

Definizione (Matrice inversa)

Sia $\mathbf{A}$ *quadrata* $n \times n$. *Se esiste una matrice avente la stessa dimensione di* $\mathbf{A}$, *tale che* $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = I = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$ *allora la matrice* $\mathbf{A}^{-1}$ *è detta inversa della matrice* $\mathbf{A}$.

Una matrice che non ammette inversa è detta *singolare*.

Proposizione (Proprietà dell'inversa)

Siano $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *due matrici invertibili allora valgono*

1. $$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$
2. $$(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$$
3. $$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Esempio

(Inversa di una matrice) La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ha inversa

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Infatti

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2+3 & -4+4 \\ 3/2-3/2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio

(L'inversa non sempre esiste) La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

non ha inversa. Infatti presa una matrice qualunque $\mathbf{B}$ con coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

si ha

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 0 \\ \gamma + 2\delta & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e nessuna scelta dei coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ permette di ottenere $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ con $\mathbf{I}$ la matrice identità.

Inversa e determinante

- Poichè l'inversa non sempre esiste ci domandiamo se è possibile capire quando una matrice quadrata $\mathbf{A}$ ammette inversa.
- Ci si potrebbe anche chiedere in caso di esistenza in che modo si calcola l'inversa. Risponderemo a questa domanda parzialmente quando parleremo di soluzioni di un sistema lineare.
- Ad ogni matrice quadrata è possibile associare un numero che ci consente di determinare la natura della matrice : invertibile o non invertibile.
- Tale numero prende il nome di determinante e si indica per una matrice $\mathbf{A}$ con il simbolo $\det(\mathbf{A})$.
- Il determinante di $\mathbf{A}$ è uguale a zero se e solo se la matrice non è invertibile. Se il determinante di $\mathbf{A}$ è diverso da zero, allora $\mathbf{A}$ ammette inversa. Vediamo come si calcola.
- Il determinante di $\mathbf{A} \equiv (a) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ si definisce come $\det(\mathbf{A}) = a$.
- Se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

  allora $\det(\mathbf{A}) = ad - bc$

Regola di Sarrus

- Sovente si utilizza la notazione $|\cdot|$ per indicare il determinante di una matrice. Per esempio

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

- Se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

allora

$$\det(\mathbf{A}) = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1.$$

Un metodo pratico per ricordarsi la precedente formula è dato dalla regola delle diagonali o regola di Sarrus illustrata di seguito

Regola di Sarrus, continuazione

- $$\left|\begin{array}{cccccc|ccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_1 & & a_2 \\ & \searrow & & \swarrow\!\!\!\!\!\!\searrow & & \swarrow\!\!\!\!\!\!\searrow & & \swarrow & \\ b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_1 & & b_2 \\ & \swarrow\!\!\!\!\!\!\searrow & & \swarrow\!\!\!\!\!\!\searrow & & \swarrow\!\!\!\!\!\!\searrow & & \searrow & \\ c_1 & & c_2 & & c_3 & & c_1 & & c_2 \end{array}\right. \qquad \textit{regola di Sarrus}$$

  dove i prodotti diagonali da sinistra a destra vanno considerati con il segno $+$, quelli da destra a sinistra con il segno $-$.
- Per esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 12 - 4 - 12 + 2 + 2 = -23.$$

- Per calcolare il determinante di matrici di ordine superiore occorre la nozione di complemento algebrico.

Complemento algebrico

Definizione

Data la matrice quadrata $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *si dice complemento algebrico dell'elemento* a_{ij} *il determinante della matrice ottenuta da* $\mathbf{A}$ *togliendo la* $i-$*esima riga e la* $j-$*esima colonna moltiplicato per* $(-1)^{i+j}$.

Esempio

data

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il complemento algebrico di $a_{12} = 2$ è

$$(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)6 = -6.$$

Regola di Laplace

Definizione

(Regola di Laplace) Il determinante di una matrice quadrata è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o di una sua colonna) moltiplicati per i rispettivi complementi algebrici.

Esempio

Data la matrice $\mathbf{A}$ dell'esempio precedente, scegliamo la terza colonna per calcolare il determinante. Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 3(1-4) = -6$$

Calcoliamo il determinante seguente partendo dalla prima riga

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 34 + 39 = 73$$

Determinante e dipendenza lineare

- Se il $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ allora i vettori riga (rispettivamente i vettori colonna) che compongono la matrice sono linearmente indipendenti.
- Se il $\det(\mathbf{A}) = 0$ allora i vettori riga (rispettivamente i vettori colonna) che compongono la matrice sono linearmente dipendenti. Di conseguenza uno di essi può essere riscritto come combinazione lineare degli altri.

Esempio

Date le matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

- Il $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ e quindi i vettori che la compongono sono l.i.
- Il $\det(\mathbf{B}) = 0$, i vettori che la compongono sono l.d. : la II riga si ottiene moltiplicando per due la I riga.
- Il $\det(\mathbf{C}) = 0$, i vettori che la compongono sono l.d. : la III riga si ottiene sommando la II riga con la I riga moltiplicata per due.

Rango

Definizione

Data una matrice $\mathbf{A} = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *si dice sottomatrice ogni matrice ottenuta da essa eliminando righe o colonne.*

Definizione

Sia data $\mathbf{A} = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *e un numero* $r \leq (m, n)$. *Si dice minore di ordine* r, *il determinante di una sottomatrice di* $\mathbf{A}$ *avente* r *righe e* r *colonne.*

Definizione

Sia $\mathbf{A} = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *e* $r \leq (m, n)$. *Si dice che* $\mathbf{A}$ *ha rango* r, *e scriviamo* $rango(\mathbf{A}) = r$, *se esiste almeno un minore di ordine* r *non nullo e tutti i minori di ordine* $r + 1$ *sono nulli.*

Il rango di $\mathbf{A}$ corrisponde al massimo numero di vettori riga (colonna) linearmente indipendenti della matrice.

Rango, continuazione

- In generale non è necessario controllare tutti i minori di $\mathbf{A}$ di un certo ordine per stabilire il rango.
- Si dimostra che è sufficiente individuare una sottomatrice quadrata $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ di $\mathbf{A}$ tale che $\det(\mathbf{B}) \neq 0$ e considerare solamente i determinanti di tutte le sottomatrici di $\mathbf{A}$ composte da $r+1$ righe e $r+1$ colonne ottenute aggiungendo alla sottomatrice $\mathbf{B}$ una riga e una colonna qualsiasi di $\mathbf{A}$.

Esempio

Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Le matrici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

sono alcune delle possibili sottomatrici di $\mathbf{A}$.

Esempio

Si vuole determinare il rango di $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

- Osserviamo che $\mathbf{A}$ è una matrice di 3 righe e 4 colonne. Di conseguenza il rango di $\mathbf{A}$ è al massimo 3.
- Il determinante della sottomatrice $\mathbf{B}$ di $\mathbf{A}$ dell'esempio precedente è diverso da zero : $\det(\mathbf{B}) = 0 + 3 = 3 \neq 0$. Quindi il rango di $\mathbf{A}$ è almeno 2.
- Per vedere se il rango è 3, consideriamo i due minori di ordine 3 che si ottengono da $\mathbf{B}$ aggiungendo una riga e una colonna di $\mathbf{A}$.
- Questi sono i determinanti delle matrici $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ costruite nell'esempio precedente.
- Si ha che $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{D}) = 0$. Infatti in entrambi i casi la I colonna è uguale alla III colonna moltiplicata rispettivamente per -4 e -1.
- Concludiamo che Il $\mathit{rango}(\mathbf{A}) = 2$.

Sistemi lineari

Sia **A** una matrice di tipo $m \times n$ e **x** un vettore di dimensione m. Il prodotto $\mathbf{A}x$ è un vettore di m componenti che indicheremo con **b**.
Per esteso avremo che $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ diventa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \dots \qquad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

detto *sistema lineare*.

- Un'equazione *lineare* è un'equazione nella quale le incognite, usualmente indicate con x, y, z, $\dots$ oppure x_1, x_2, x_3, $\dots$, compaiono tutte al primo grado nella forma $ax + by + cz + \dots$, con a, b, c numeri reali.
- In altre parole non compaiono quadrati, cubi o potenze più elevate, né prodotti di due o più incognite, né funzioni delle incognite tipo radice, seno, coseno, esponenziale, ecc..

Esempio

(Sistemi lineari) Riportiamo alcuni esempi di sistemi lineari e la loro corrispondente rappresentazione matriciale

1. $$\begin{cases} 2x+3y = 1 \\ x-2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{cases} x-2y+z = 5 \\ 3x+y-z = 0 \\ x+3y+2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{cases} x_1+x_2-x_3 = 4 \\ 2x_1-x_2+3x_3 = 7 \\ 4x_1+x_2+x_3 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Sistemi lineari : caratteristiche

- Dato il vettore $\mathbf{b}$ determinare la soluzione $\mathbf{x}$ del sistema lineare significa trovare $\mathbf{x}$ tale che $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
- Tale problema è rappresentato da un sistema lineare di m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, ..., x_n$.
- Gli elementi della matrice $\mathbf{A}$ sono detti *coefficienti* del sistema lineare.
- Gli elementi del vettore $\mathbf{b}$ sono detti *termini noti*.
- Non sempre dato $\mathbf{b}$ possano determinarsi $x_1, ..., x_n$ tali che $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ossia non sempre il sistema possa essere risolto.
- Un sistema lineare che non ammette nessuna soluzione è detto impossibile.
- Se il termine noto è un vettore nullo $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, il sistema si dice *omogeneo* e in tal caso ammette sempre la soluzione banale data dal vettore nullo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Dato un sistema lineare ci proponiamo
  - Di stabilire se il sistema ha soluzioni oppure no.
  - Di stabilire quante sono le soluzioni.
  - Di determinare le soluzioni.

Tecnica di sostituzione

Esistono varie tecniche per determinare le soluzioni di un sistema quando esistono. Vediamo la tecnica di sostituzione.

Esempio

Consideriamo il sistema di 2 equazioni in 2 incognite

$$\begin{cases} 2x + 3y & = & 1 \\ x - 2y & = & 4 \end{cases}$$

Si ricava una variabile in funzione dell'altra. In questo caso ricaviamo y in funzione di x nella seconda equazione e la sostituiamo nella prima.

$$2y = x - 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$$

$$2x + 3\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 1 \Rightarrow \frac{7}{2}x = 7 \Rightarrow x = 2.$$

Sostituendo ora nella prima relazione si ha $y = 1 - 2 = -1$. Da cui la soluzione $x = 2$, $y = -1$.

Tecnica di eliminazione

Una tecnica più efficiente è data dal *metodo di eliminazione*. L'idea in questo caso è quella di eliminare le variabili incognite una ad una fino a ottenere il valore della soluzione per una variabile. Ottenuto questo risultato si procede come in precedenza per sostituzione.
Le operazioni consentite che trasformano il sistema lineare in un sistema equivalente (ovvero un sistema con le stesse soluzioni) sono :

- Cambiare l'ordine delle equazioni.
- Sostituire un'equazione con una equivalente.
- Sommare a un'equazione una combinazione lineare delle altre.
- Togliere dal sistema equazioni che siano combinazioni lineari di altre.

Esempio

Consideriamo il sistema dell'esempio precedente. Moltiplicando la II riga per due si ottiene $2(x-2y) = 2(4) \Rightarrow 2x - 4y = 8$. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 1 \\ 2x - 4y &= 8 \end{cases}$$

Esempio

(Continuazione) A questo punto sottraendo alla II riga la I riga si ottiene

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 1 \\ 2x - 4y - (2x + 3y) &= 8 - 1 \end{cases}$$

Per cui

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 1 \\ -7y &= 7 \end{cases}$$

Da cui $y = -1$ e dalla I riga si ottiene

$$2x - 3 = 1 \Rightarrow x = 2.$$

Proviamo a estendere la precedente idea dell'eliminazione di variabili al caso di un sistema di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 5 \\ 3x + y - z &= 0 \\ x + 3y + 2z &= 2 \end{cases}$$

Esempio

(Continuazione) Sostituiamo alla II riga la somma della II con la I : $(3x+y-z)+x-2y+z=0+5 \Rightarrow 4x-y=5$. Sostituiamo alla III riga la somma della III e della II riga moltiplicata per due : $2(3x+y-z)+$ $+(x+3y+2z)=2(0)+2 \Rightarrow 7x+5y=2$. Otteniamo quindi

$$\begin{cases} x-2y+z & = & 5 \\ 4x-y & = & 5 \\ 7x+5y & = & 2 \end{cases}$$

Possiamo eliminare y dalla III riga aggiungendo cinque volte la II riga alla III riga : $7x+5y+5(4x-y)=2+5(5) \mapsto 27x=27 \Rightarrow x=1$. Otteniamo

$$\begin{cases} x-2y+z & = & 5 \\ 4x-y & = & 5 \\ x & = & 1 \end{cases}$$

Sostituendo $x=1$ nella II riga otteniamo $4-y=5 \Rightarrow y=-1$. Infine sostituendo questi due valori nella prima equazione otteniamo

$$1+2+z=5 \Rightarrow z=2.$$

La soluzione è quindi $x=1$, $y=-1$, $z=2$.

Teorema di Cramer

- La tecnica di sostituzione e di eliminazione ci consentono di determinare la soluzione di un sistema lineare quando esso ammette un'unica soluzione.
- Vediamo ora un risultato che ci permette di determinare se il sistema lineare ammette un'unica soluzione e in caso positivo di trovarla.
- Consideriamo il caso di sistemi in cui il numero delle equazioni eguaglia il numero delle incognite e determinante della matrice dei coefficienti non nullo.
- Un sistema con queste caratteristiche prende il nome di sistema di Cramer.

Teorema

Cramer. *Sia dato un sistema di Cramer. Chiamiamo per ogni $i = 1, .., n$ con $\mathbf{B}_i$ la matrice ottenuta da $\mathbf{A}$ eliminando la $i-$esima colonna e sostituendola con la colonna dei termini noti $\mathbf{b}$. Il sistema ammette una sola soluzione x data da*

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \det(\mathbf{A})^{-1} \begin{pmatrix} \det(\mathbf{B}_1) \\ \det(\mathbf{B}_2) \\ .. \\ .. \\ \det(\mathbf{B}_n) \end{pmatrix}$$

- Dal teorema di Cramer segue un risultato immediato valido per i sistemi omogenei. Vediamolo :
- Dato il sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ allora esso ammette la sola soluzione nulla $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Esempio

Dato il sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Il $\det(\mathbf{A}) = -12 \neq 0$. Di conseguenza il sistema è di Cramer e la soluzione è unica. Si ha

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbf{B}_1) = -8,$$

Esempio

Continuazione. Si ha

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbf{B}_2) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbf{B}_3) = 4$$

e quindi la soluzione unica è data da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Teorema di Rouché-Capelli

- Ci occupiamo ora di sistemi lineari in cui il numero delle equazioni non eguaglia necessariamente il numero delle incognite.

Teorema

(Rouchè-Capelli). *Sia dato il sistema lineare di* m *equazioni in* n *incognite* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *dove la matrice dei coefficienti* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Il sistema ammette soluzioni se e solo se*

$$rango(\mathbf{A}) = rango(\mathbf{A}|\mathbf{b})$$

dove con $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ *si intende la matrice appartenenete a* $\mathbb{R}^{m \times n+1}$ *ottenuta aggiungendo ad* $\mathbf{A}$ *la colonna dei termini noti. Se il rango della matrice dei coefficienti è diverso dal rango di* $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ *allora il sistema è impossibile* $\Rightarrow$ *non ammette soluzioni.*

- Infatti se il $rango(\mathbf{A}) = rango(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ allora il numero di colonne l.i. di $\mathbf{A}$ è uguale al numero di colonne l.i. di $\mathbf{A}|\mathbf{b}$. Di conseguenza il vettore $\mathbf{b}$ può essere scritto come c.l. delle colonne di $\mathbf{A}$ con coefficienti $x \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{Ax}$.
- Se $rango(\mathbf{A}) \neq rango(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ allora non è possibile scrivere $\mathbf{b}$ come c.l. delle colonne di $\mathbf{A}$ e quindi non esiste nessun $\mathbf{x}$ tale che $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Teorema di Rouché-Capelli, metodo risolutivo

- Sia $rango(\mathbf{A}) = rango(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r$.
- Allora $\mathbf{A}$ ammette un minore di ordine r non nullo.
- Consideriamo la relativa sottomatrice e manteniamo nel sistema solo le equazioni che corrispondono alle righe di tale sottomatrice.
- Le restanti $m - r$ righe possono essere trascurate essendo una combinazione lineare delle precedenti. Non portano informazioni aggiuntive.
- A questo punto abbiamo un sistema lineare di r equazioni in r incognite.
- Questo sistema è di Cramer.
- Possiamo perciò risolverlo con il metodo visto in precedenza.
- Per farlo dobbiamo portare a secondo membro $n - r$ variabili che ora fungono da parametri.
- Si possono trovare così soluzioni dipendenti da $n - r$ parametri.
- Si dice allora che il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni intendendo con questo che le soluzioni dipendono da $n - r$ parametri.

Esempio

Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x - z & = & 2 \\ 3x + y - 5z & = & 5 \\ x + y - 3z & = & 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti : $\det(\mathbf{A}) = 0$.
- Il sistema non è di Cramer.
- Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti : $rango(\mathbf{A}) = 2$. È sufficiente prendere una sottomatrice di $\mathbf{A}$ di 2 righe e 2 colonne e verificare che il determinante è diverso da zero.
- Prendiamo ad esempio la sottomatrice relativa ai coefficienti delle prime due righe di x e z e calcoliamo il determinante : $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 8 \neq 0$.

Esempio

(Continuazione).

- Calcoliamo il $\mathit{rango}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$. Vediamo che $\det\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 5\end{pmatrix} = 5 \neq 0$. Quindi il rango è almeno 2.
- Consideriamo i due minori che si ottengono aggiungendo a $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 5\end{pmatrix}$ una riga e una colonna di $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 5\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -5 & 5\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

- Anche queste sottomatrici hanno determinante uguale a zero.
- Concludiamo che il $\mathit{rango}(\mathbf{A}) = \mathit{rango}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$ e che una riga può essere scritta come combinazione lineare delle altre.

Esempio

(Continuazione).

- In effetti, la terza riga può essere esclusa in quanto combinazione lineare delle prime due (III riga $=$ II riga -2 I riga).
- Il sistema è ridotto a

$$\begin{cases} x - z & = & 2 \\ 3x - 5z & = & 5 - y \end{cases}$$

- Questo sistema è di Cramer. La soluzione è $x = \frac{5+y}{2}$, $z = \frac{1+y}{2}$
- Il sistema di partenza ammette quindi $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni espresse in funzione di y :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5+y)/2 \\ y \\ (1+y)/2 \end{pmatrix}$$