Corso di Laurea in Economia

Metodi Matematici per l'economia
Gruppo B

Esercizi di Algebra lineare

Esercizio 1.

Verificare che il vettore $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2.
Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e dati $\lambda = 5$ e $\mu = 2$, calcolare $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{B} - \mathbf{A}$, $\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}$.

Esercizio 3.
Date le seguenti matrici

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 10 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -8 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcolare, se possibile, i prodotti $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j,\ i,j = 1,..,6$.

Esercizio 4.

Calcolare $\mathbf{A}^3$ con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 5.
Risolvere i seguenti sistemi lineari sia con la tecnica di eliminazione che con la tecnica di sostituzione

$$(1) \begin{cases} 2x + 4y + 4z &= 4 \\ x - z &= 1 \\ -x + 3y + 4z &= 2 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x+3y-4z &= -3 \\ 3x-4y+5z &= -2 \end{cases}$$

Esercizio 6.
Calcolare il determinante delle seguenti matrici

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.
Risolvere i seguenti sistemi lineari con Cramer

$$(1)\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x-y+z &= 0 \\ x+2y &= 1 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x-y+z &= 6 \\ 2x+y-z &= -3 \\ x-y-z &= 0 \end{cases}$$

Esercizio 8.
Calcolare il rango delle seguenti matrici

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.
Determinare al variare del parametro k il rango di

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ k & 4 & 9 & 14 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2-k^2 & 2 \\ k^2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.
Dopo aver determinato il numero di soluzioni, risolvere i seguenti sistemi lineari

$$(1)\begin{cases} -x+y-z &= 2 \\ 3x+3y+z &= 2 \\ x+5y-z &= 6 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ 2x - y + 4z &= 0 \\ 3x + 2y + 5z &= 0 \end{cases}$$

Esercizio 11.
Determinare il numero di soluzioni dei seguenti sistemi lineari al variare dei parametri a, b, k

$$(1)\begin{cases} x + ay + 2z &= 1 \\ ax + 9y &= -a \\ z &= 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} 4x + 2y + kz &= b \\ 2x + ky + z &= a \\ 2x + y + z &= a \end{cases}$$