

Corso di Laurea in Economia**Metodi Matematici per l'economia****Gruppo B****Esercizi sui limiti e funzioni continue****Limiti di Successioni. Uso della definizione.**

1. Utilizzando la definizione di limite verificare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+4}{n} = 1$
2. Utilizzando la definizione di limite verificare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-4}{3n+1} = \frac{1}{3}$
3. Verificare che la successione $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge a zero.

Limiti di Successioni. Operazioni e forme indeterminate.

1. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{n+3}$
2. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$
3. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4+5}{n^5+7n-1}$
4. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3+1}{2n-1}$
5. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-n^2}{(n+2)^2}$
6. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
7. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}$
8. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}$
9. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - n$

Limiti di Successioni. Limiti notevoli.

1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & -1 < a < 1 \\ \text{non esiste} & a \leq -1 \end{cases}$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & b > 0 \\ 1 & b = 0 \\ 0 & b < 0 \end{cases}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n)}{n^b} = 0, \quad (b > 0)$$

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0, a > 1, b > 0$
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, a > 1$
6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1, (a_n \rightarrow 0, a_n \neq 0, \forall n)$

Limiti di successioni. Uso dei limiti notevoli.

1. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n$
2. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$
3. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n - 2^n$
4. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n + 4^n - 5^n$
5. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1} - 4^{n-1}}{3^n}$
6. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-e}$
7. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \log n$
8. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - n^2$
9. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - n!$
10. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\log n}$
11. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$
12. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
13. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{3}{n}\right)$

Limiti di Funzioni. Uso della definizione.

1. Utilizzando la definizione di limite verificare che $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{2x-1} = 5$
2. Utilizzando la definizione di limite verificare che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = 0$
3. Utilizzando la definizione di limite verificare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$

Limiti di Funzioni. Limiti notevoli.

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = \begin{cases} +\infty & b > 0 \\ +\infty & b < 0 \end{cases}$$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b \log x = 0, b > 0$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0, b > 0$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0, b > 0, a > 1$

9. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

11. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$

12. $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

Limiti di funzioni. Uso dei limiti notevoli.

1. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{a^x}$

2. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x$

3. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

4. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

5. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$

6. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

7. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$

8. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$

9. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

10. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x - x^2$

11. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x - \sqrt{x}$

12. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{x}$

13. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$

14. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

Funzioni continue.

1. Sia $f(x)$ la funzione definita in $(0, 2)$ da

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Determinare l'insieme dei punti di discontinuità di $f(x)$.

2. Sia $f(x)$ la funzione definita in $(0, 2)$ da

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Determinare l'insieme dei punti di discontinuità di $f(x)$.

3. Dire se la funzione $f(x) = \frac{1}{x-2}$ è continua in $x_0 = 2$.

4. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ la funzione definita in \mathbb{R} da

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq x_0 \\ c & x > x_0 \end{cases}$$

Sotto quali condizioni su a, b, c la funzione $f(x)$ è continua?

5. Studiare la continuità della funzione $f(x)$ definita in \mathbb{R} da

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Asintoti.

1. Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = \frac{2x-1}{1-x}$

2. Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x^2-x-2}$

3. Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2+1}$

4. Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = \frac{x^4+1}{x^3+1}$

5. Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = \log x$

6. Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = \sin x$

7. Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = e^x$

8. Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = \arctan x$

9. Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = \sqrt{1+x^2}$