1. Calcolare i seguenti determinanti:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 1/20 \end{vmatrix}.$$

2. Se

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

calcolare i seguenti determinanti:

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Imitando il procedimento usato nell'esercizio precedente, calcolare i seguenti determinanti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

4. Studiare il rango della seguente matrice al variare del parametro reale k:

$$\mathcal{A}(k) = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & k+1 \\ k & 0 & 1 & k \\ 0 & -k & k & -1 \\ 1+k & 0 & k & 2k \end{pmatrix}; \qquad \mathcal{A}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & k^2 \\ 1 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

5. Discutere e, se possibile, risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x-y-2z &= 0 \\ 2x-z &= 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x-y-2z &= 0 \\ 2x+y-z &= 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x-y &= 0 \\ 2x+z &= -1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 6 \\ 2x+3y+z &= 6 \\ 3x+y+2z &= 6 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x+y+z+t &= 1 \\ x-2y-2z &= 0 \\ 2x-z &= 1 \\ y+2z+t &= 0 \end{cases}$$

6. Discutere e, se possibile, risolvere i seguenti sistemi lineari, al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} x+2y+2z+t &= k \\ x-2y-2z+t &= 0 \\ x+t &= 0 \\ y+z+(k-1)t &= 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x+2y+2z+t &= k-1 \\ x-2y-2z+t &= -1 \\ 2x+kz+2t &= 0 \\ y+z+k^2t &= 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x+2y+3z-t &= k \\ x-2y-z+3t &= 0 \\ x+t &= 0 \\ y+z+(k-1)t &= 0 \end{cases}.$$