CAPITOLO 1

I numeri reali

Il primo obiettivo che ci proponiamo in queste Note è di introdurre i numeri reali, indispensabili per tutto quello che vedremo nel seguito. Lo scopo non è di proporre una costruzione rigorosa dei reali (che va ricercata in qualche altro testo), quanto di presentare il concetto di numero reale in maniera "intuitivamente convincente", in modo da potere dedurne le proprietà fondamentali. Per completezza, comunque, verranno dati cenni relativi ad alcune versioni degli assiomi necessari per la definizione precisa dell'insieme dei numeri reali.

1. Numeri naturali, interi, razionali e irrazionali

Il percorso classico che porta alla definizione dell'insieme $\mathbb{R}$, pietra miliare di qualsiasi corso di Analisi Matematica, comincia dai numeri *naturali*, passa per gli *interi*, si sofferma sui *razionali*, ed arriva, infine, ai *reali*. Più in là presenteremo un ulteriore passo in avanti che conduce ai *numeri complessi*.

Numeri naturali. I numeri naturali nascono da uno dei problemi primordiali dell'uomo (specie se insonne): il "conteggio". Essi nascono dall'esigenza di rispondere alla domanda: "quanti?": $0, 1, 2, 3, \dots$. L'insieme di questi numeri, detti numeri naturali, si indica con il simbolo $\mathbb{N}$:

$$\text{numeri naturali:} \qquad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

Nell'insieme $\mathbb{N}$ sono definite le operazioni di addizione e moltiplicazione, per cui valgono le ben note *leggi commutative, associative, distributiva.*

I numeri naturali hanno due difetti fondamentali, che costringono, in qualche modo, a guardare più in là, cercando nuovi insiemi di numeri.

1. *Difetto "algebrico".* Le operazioni inverse, sottrazione e divisione, non sono sempre possibili nell'insieme dei numeri naturali: non è possibile sottrarre 2 da 1 o dividere 1 con 2 e ottenere un numero naturale. La soluzione "alla Salomone" (cioè dividere in due metà) nei naturali non è sempre praticabile: nel caso di un numero dispari, il concetto di "metà" non è rappresentato da nessun numero naturale.

Il desiderio di risolvere il difetto “algebrico” ci porterà, tra poche righe, ad introdurre prima i numeri interi relativi e poi quelli razionali.

2. *Difetto “metrico”.* Il secondo problema è collegato ad una questione fondamentale: la *misura*. Il concetto di misura si basa sulla procedura seguente:
– si sceglie un'unità di misura (ad esempio, il metro campione);
– si contano il numero di copie dell'oggetto unitario che ricoprono l'oggetto da misurare.

Nella maggior parte dei casi, la lunghezza del segmento da misurare non è pari ad multiplo <u>intero</u> del segmento unitario. Come fare? Semplice: si divide in sotto-segmenti il segmento unitario e si contano quante “parti” della sotto-unità servono per misurare il nuovo oggetto. Questo è il concetto di frazione, cioè di numero razionale. Come vedremo, però, bisognerà prendere atto della realtà delle cose: l'essere razionali non basta...

Numeri interi relativi. Per rendere possibili senza restrizioni le operazioni di sottrazione, si estende il concetto degli interi “negativi”, ottenendo l'insieme dei numeri interi relativi (o semplicemente interi):

$$\text{numeri interi:} \qquad \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$$

L'insieme $\mathbb{Z}$ è una estensione insiemistica di $\mathbb{N}$, nel senso che contiene l'insieme dei numeri naturali, ed inoltre è possibile definire l'operazione di somma in $\mathbb{Z}$ in modo che valgano le stesse proprietà che valevano in $\mathbb{N}$. C'è anche qualcosa in più: grazie all'introduzione dei numeri negativi, oltre a sommare, è sempre possibile sottrarre. In maniera più precisa, possiamo affermare che ogni elemento di $\mathbb{Z}$ ha un *elemento inverso* rispetto all'operazione di somma:

$$\forall\, k \in \mathbb{Z} \qquad \exists\, h \in \mathbb{Z} \qquad \text{tale che} \qquad k + h = 0.$$

Il numero h è quello che si ottiene cambiando di segno k. La presenza in $\mathbb{Z}$ di un'operazione di somma per cui vale la proprietà commutativa, l'esistenza di 0 e l'esistenza dell'elemento inverso, fanno di $\mathbb{Z}$ un gruppo commutativo (o gruppo abeliano).

Numeri razionali. Non abbiamo ancora risolto completamente il difetto “algebrico” di $\mathbb{N}$, dato che anche nell'insieme $\mathbb{Z}$ non è sempre possibile dividere. Per questo motivo, introduciamo un terzo insieme di numeri: l'insieme dei numeri razionali, cioè numeri che sono rapporto di numeri interi

$$\text{numeri razionali:} \quad \mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,:\, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ q \neq 0 \right\}.$$

Attenzione! I numeri razionali possono essere scritti in molti modi diversi: ad esempio,

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{142}{71} = \dots$$

In genere si preferisce avere un'unica rappresentazione del numero e, per questo, si richiede che q sia positivo e che p e q abbiano massimo comune divisore pari a 1. Ci si riconduce sempre ad un'espressione di questo genere attraverso la "semplificazione" dei fattori comuni.

Per costruzione valgono le inclusioni insiemistiche

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Inoltre, nell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono ben definite tutte le *operazioni razionali*, cioè addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione, eccetto la divisione per zero. La maniera precisa di formulare il fatto che sia possibile "dividere per un qualsiasi numero razionale non nullo" consiste nell'affermare che ogni elemento di $\mathbb{Q}$, tranne 0, ha un *elemento inverso* rispetto all'operazione di prodotto:

$$\forall\, x \in \mathbb{Q},\, x \neq 0 \qquad \exists\, y \in \mathbb{Q} \qquad \text{tale che} \qquad xy = 1.$$

L'elemento y si indica con $\frac{1}{x}$ oppure con x^{-1}.

La presenza di somma e prodotto (e relative proprietà) fa di $\mathbb{Q}$ un campo.

ESERCIZIO 1.1. *Dimostrare che in $\mathbb{Q}$ vale la* legge di annullamento del prodotto*: se $ab = 0$, allora almeno uno degli elementi a, b è nullo.*

Soluzione. Infatti, se $a \neq 0$, allora moltiplicando $ab = 0$ per $\frac{1}{a}$ a destra e a sinistra dell'uguale, si ottiene $\frac{1}{a}\, ab = \frac{1}{a}\, 0$, da cui segue $b = 0$.

Risolto il problema delle operazioni inverse, rimane il difetto "metrico". È ragionevole sospettare che la definizione di $\mathbb{Q}$ possa risolvere in un colpo solo sia il problema della divisione che quello della misurazione di lunghezze... ma è così?

Rappresentazione grafica dei razionali. Disegniamo una retta R (o *asse numerico*) e procediamo secondo questa scaletta.

(i) Scegliamo un punto di R come rappresentante di 0, che chiameremo origine, e un altro punto arbitrario come rappresentante del numero 1. Definiamo la direzione da 0 a 1 come direzione positiva, in questo modo, la retta R diviene una retta *orientata* (d'ora in poi, penseremo di aver scelto 1 alla destra di 0).

(ii) Replicando copie del segmento unitario nella direzione positiva di R (cioè alla destra di 1), otteniamo una famiglia di punti che indichiamo con $2, 3, \ldots$. Detto in altre parole, rappresentiamo tutti i numeri naturali come punti sulla retta R.

(iii) Ripetendo lo stesso procedimento nella direzione negativa (alla sinistra di 0), otteniamo, allo stesso modo, una rappresentazione per gli interi negativi. Con questo procedimento, insieme a quanto fatto in (ii), arriviamo ad una rappresentazione i numeri interi sulla retta R.

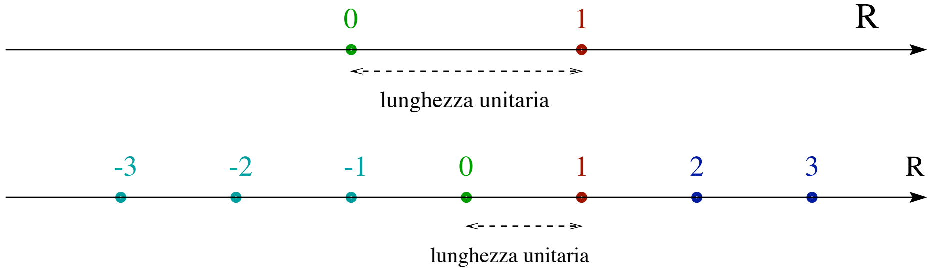

FIGURA 1. Dall'alto verso il basso: *(a)* i punti 0 e 1 sulla retta R determinano il segmento di lunghezza unitaria; *(b)* la rappresentazione dei numeri interi su R.

(iv) Rappresentiamo ora i numeri razionali $\dfrac{p}{q}$ su R per cui $p, q \in \mathbb{N}$ con p più piccolo di q. Dato che il numero $\frac{p}{q}$ è, moralmente, "p volte $1/q$", si divide l'intervallo unitario in q parti di uguale lunghezza e si prende come rappresentante di $\frac{p}{q}$ l'estremo destro del $p-$esimo intervallo.

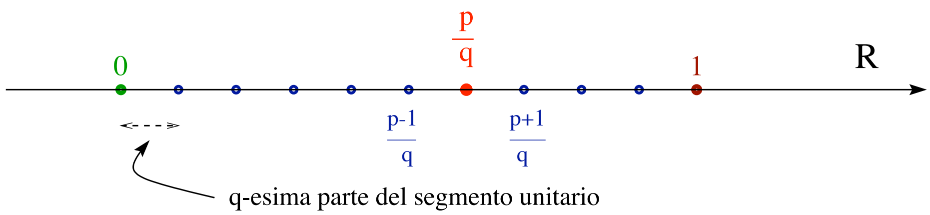

FIGURA 2. La rappresentazione su R di un numero razionale $\frac{p}{q}$ per cui $p, q \in \mathbb{N}$ e $p < q$.

(v) Nel caso di un qualsiasi numero razionale positivo p/q, si determinano p' e r positivi, con r più piccolo di q tali che

$$\frac{p}{q} = p' + \frac{r}{q},$$

e si ripete l'operazione spiegata nel passo precedente nel segmento di estremi p' e $p'+1$. Analogamente per i numeri razionali negativi.

Il significato geometrico della somma di numeri razionali è facile: se $x, y \in \mathbb{Q}$, il punto in R che corrisponde a $x+y$ corrisponde al punto che si ottiene applicando una copia del segmento di estremi 0 e y sul punto x in modo da far coincidere la copia del punto 0 con x.

Ordine, modulo e distanza nei numeri razionali. Una volta rappresentati i numeri razionali su una retta R che è orientata, è possibile mettere ordine in $\mathbb{Q}$.

DEFINIZIONE 1.2. *Ordinamento in $\mathbb{Q}$.* *Se $x, y \in \mathbb{Q}$, allora x* è minore di *y (o, equivalentemente, y* è maggiore di *x), se, nella rappresentazione su R, x si trova alla* *sinistra di y. In tal caso si scrive*

$$x < y.$$

Se x è minore di y o uguale ad y, si scrive $x \leq y$

$$x \leq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < y \quad \text{oppure} \quad x = y.$$

Un numero $x \in \mathbb{Q}$ è positivo[1] *se $x > 0$ ed è* negativo *se $x < 0$. Se x è positivo o è zero, si dice che è* non negativo *e si scrive $x \geq 0$ e, analogamente, se x è negativo o è zero, è* non positivo *e si scrive $x \geq 0$.*

A questo punto, si introduce un oggetto di fondamentale importanza: il *modulo*.

Definizione 1.3. *Modulo e distanza in $\mathbb{Q}$. Dato $x \in \mathbb{Q}$, il* modulo di x *(detto anche* valore assoluto *o* norma*) si indica con $|x|$ ed è definito da*

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Dati due numeri razionali $x, y \in \mathbb{Q}$, si chiama distanza di x da y *il numero $|x - y|$.*

Geometricamente, il numero (non negativo) $|x|$ rappresenta la lunghezza del segmento in R che ha per estremi il punto x ed il punto 0; analogamente $|x - y|$ è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto x ed il punto y.

Non tutte le lunghezze sono razionali. Passiamo al collaudo di $\mathbb{Q}$ (rappresentato sulla retta R), per la misurazione di lunghezze. Armiamoci di una fettuccia

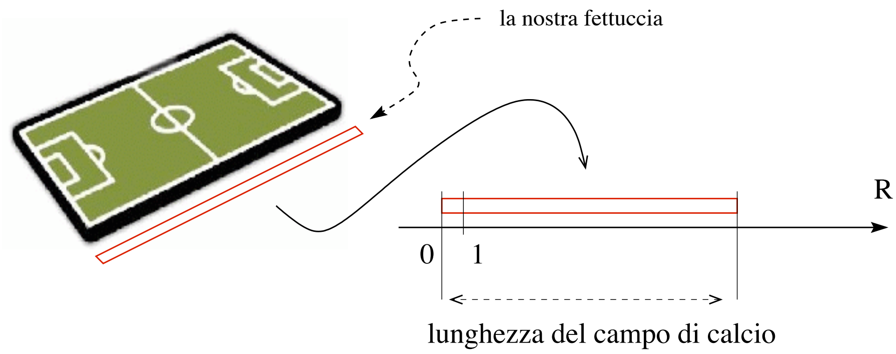

Figura 3. Il procedimento di misurazione: un campo di calcio.

di stoffa (o di fantasia) e procediamo nel modo più semplice possibile: se vogliamo

[1] Qualcuno usa una terminologia leggermente diversa: con il termine "positivo" indica un numero alla destra di 0, eventualmente anche 0 stesso, mentre un numero positivo, ma non zero, viene detto "strettamente positivo". Analogo discorso per i numeri negativi e per la relazione d'ordine. Se y è alla destra di x ed eventualmente è x dice che "y è maggiore di x"; se y è alla destra di x, ma non coincide con x, dice che "y è strettamente maggiore di x". Basta mettersi d'accordo.

misurare la lunghezza di un certo oggetto (un tavolo, un campo di calcio, quel che sia...), fissiamo un estremo della fettuccia ad una estremità dell'oggetto da misurare ed estendiamola fino all'altro estremo, tagliamo la fettuccia in concomitanza con il secondo estremo e riportiamo la fettuccia lungo la retta R. Collochiamo il primo estremo in corrispondenza del punto 0, stendiamo la fettuccia in tutta la sua lunghezza nella direzione positiva e vediamo il secondo estremo dove va a finire. **Se** quest'ultimo finisce in corrispondenza di un numero razionale, quel numero è la lunghezza desiderata... Non è un errore di stampa il fatto che il "Se" sia scritto in neretto: questo procedimento non sempre funziona: alcune lunghezze non corrispondono a nessun numero razionale!

Già i matematici greci scoprirono che esistono segmenti la cui lunghezza non è un numero razionale, cioè esistono punti della retta R che non corrispondono a nessun numero razionale: in simboli, $R \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$. L'esempio più elementare di lunghezza non razionale è la lunghezza ℓ della diagonale di un quadrato di lato unitario. Infatti, per

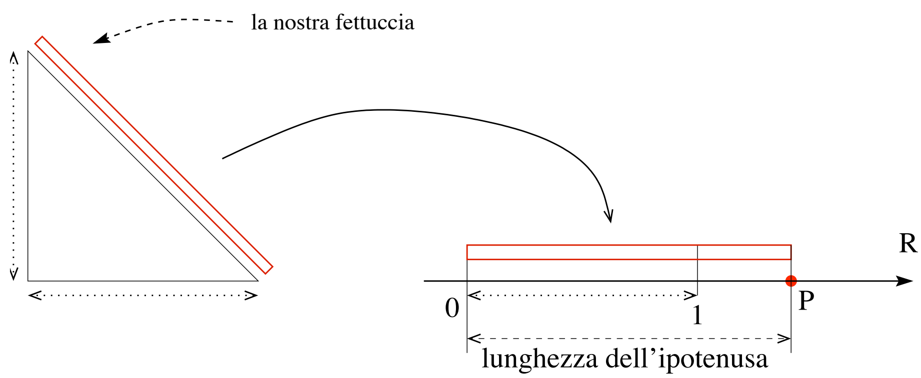

FIGURA 4. Il procedimento di misurazione dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo di lato unitario: il punto P non corrisponde a nessun numero razionale.

il teorema di Pitagora, $\ell^2 = 2$, ma *nessun numero razionale elevato al quadrato dà per risultato il valore* 2.[2]

ESERCIZIO 1.4. *Dimostrare che $\sqrt{p}$ non è razionale per ogni numero p primo. Lo stesso per $\sqrt[n]{p}$ con $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Quali altre classi di numeri irrazionali sai immaginare a partire da questo esempio?*

[2]Per dimostrare questa affermazione, supponiamo, al contrario, che $\ell = p/q$ per opportuni p, q interi positivi. Senza restrizione, possiamo supporre che p e q non abbiano fattori comuni (altrimenti si possono semplificare). Allora si deve avere $p^2 = 2q^2$, quindi p^2 deve essere un numero pari. Dato che il quadrato di un numero dispari è dispari, anche p deve essere pari, cioè della forma $p = 2r$ con r intero positivo. Sostituendo, si ottiene $4r^2 = 2q^2$, e, semplificando il fattore 2, $2r^2 = q^2$. Ne segue che q^2 è pari e, di conseguenza, lo è anche q. Quindi p e q avrebero un fattore comune in contraddizione con la nostra ipotesi. Pertanto ℓ non può essere razionale.

L'introduzione dei numeri razionali, che sembrava così promettente, non ha risolto il difetto "metrico" che avevamo già trovato in $\mathbb{N}$. Infatti è possibile costruire oggetti la cui lunghezza non è misurabile con un elemento di $\mathbb{Q}$. Prossima tappa: estendere $\mathbb{Q}$ in modo da ottenere un insieme (con le stesse proprietà algebriche e metriche di $\mathbb{Q}$) in cui sia possibile misurare tutte le lunghezze possibili. Questa estensione è l'oggetto che chiamiamo *insieme dei numeri reali.*

Descrizione (naïf) dei numeri reali. Dato che i numeri razionali non sono sufficienti per le misurazioni, è necessario "inventare" nuovi numeri che permettano di misurare tutti i possibili segmenti. Prendiamo il toro per le corna e dichiariamo che: "ogni punto della retta R è un numero", che chiameremo numero reale:

$$\text{insieme dei numeri reali:} \qquad \mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \{\text{punti di } R \text{ che non sono in } \mathbb{Q}\}.$$

Un elemento di $\mathbb{R}$ che non sia in $\mathbb{Q}$ si dice numero irrazionale. I numeri reali quindi, per definizione, coincidono con quelli della retta reale R. Esattamente come detto e fatto in precedenza, pensiamo la retta $\mathbb{R}$ con orientamento da sinistra verso destra. La scelta del simbolo $\mathbb{R}$ (che sostuisce R) sta a ricordare che stiamo pensando i punti della retta come oggetti per cui sono definite operazioni di somma e prodotto.

Questa definizione di numero reale grida vendetta: è intuitiva e andrebbe precisata rigorosamente. A questo livello, però, ci accontentiamo di questa versione naïf.[3]

Si tratta ora di capire quale rappresentazione possiamo dare ad un qualsiasi numero reale, cosa significano le operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{R}$ e i concetti di ordine e distanza?

Per la somma (e quindi la differenza) basta ricordare il significato della somma di razionali come punti sulla retta. Se x, y sono due numeri reali, per determinare dove si trovi sulla retta $\mathbb{R}$ il punto $x + y$, basta procedere come segue. Rappresentiamo y come una freccia che parte da 0 e arriva nel punto corrispondente y. Per ottenere $x + y$ basta fare un "cut'n'paste" della freccia da 0 a y: se ne fa una copia e si trasla in modo da far coincidere il punto di partenza della freccia con x. Il nuovo punto di arrivo della freccia determina la posizione di $x + y$. Nel caso della differenza $x - y$, bisogna invertire la freccia che rappresenta y.

Le operazioni di prodotto e divisione in $\mathbb{Q}$ possono essere estese, per approssimazione, ad $\mathbb{R}$, ma non ci soffermeremo qui sulla questione. Ci limitiamo a comunicare che valgono le stesse proprietà elencate per i numeri razionali, che, per completezza, riportiamo qui di seguito:

[3] L'idea intuitiva di numero reale come punto dell'asse numerico è stata alla base della matematica per lunghissimo tempo. Solo più tardi, nel XIX secolo, tale ipotesi è stata giustificata in modo rigoroso.

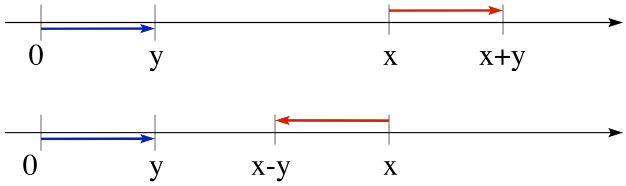

FIGURA 5. Somma e differenza di numeri reali.

leggi associative: $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a(bc) = (ab)c$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$;
leggi commutative: $a + b = b + a$ e $ab = ba$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$;
esistenza dell'elemento neutro per la somma: $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;
esistenza dell'elemento neutro per il prodotto: $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;
esistenza dell'opposto per la somma: $a + (-a) = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;
esistenza dell'inverso per il prodotto: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;
legge distributiva: $a(b + c) = ab + ac$;
annullamento del prodotto: se $ab = 0$, allora almeno uno tra a, b è 0.

Anche ordinamento e distanza si possono estendere da $\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 1.5. *Ordinamento in $\mathbb{R}$.* *Se $x, y \in \mathbb{R}$, allora x* è minore di *y (o y* è maggiore di *x), se x si trova alla sinistra di y. In tal caso si scrive $x < y$.*

Per i simboli $\leq$ e $\geq$, e per i termini positivo/negativo/non negativo/non positivo si utilizza lo stesso significato già visto per i numeri razionali.

DEFINIZIONE 1.6. *Modulo e distanza in $\mathbb{R}$.* *Dato $x \in \mathbb{R}$, il* modulo di *x (detto anche* valore assoluto *o* norma*) si indica con $|x|$ ed è definito da*

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Dati due numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, si chiama distanza di *x* da *y il numero $|x - y|$.*

Tutte le proprietà che abbiamo descritto fanno di $\mathbb{R}$ (così come lo era $\mathbb{Q}$) un campo totalmente ordinato dotato di metrica... più qualcosa... Mentre $\mathbb{Q}$ è, in un certo senso, "bucato", $\mathbb{R}$ non lo è... Cosa vuol dire rigorosamente che "$\mathbb{R}$ non ha buchi"? Ci dedicheremo tra una manciata di pagine a spiegare in maniera più precisa come trasformare questa idea intuitiva in un oggetto matematicamente chiaro.

M'approssimo in un denso. Sebbene i numeri razionali non coprano tutta la retta dei numeri reali $\mathbb{R}$ per via della presenza di numeri irrazionali, è vero che ci vanno molto vicini... Comunque si fissa una soglia di errore ammissibile, è possibile approssimare un numero reale con un numero razionale commettendo un errore più piccolo della soglia consentita. Infatti, supponiamo (per semplicità) che la soglia sia della forma $1/q_0$ con $q_0 \in \mathbb{N}$ (ad esempio, per $q_0 = 1000$, l'errore ammesso è $1/1000$). Dividiamo la retta reale $\mathbb{R}$ in segmenti di lunghezza $1/q_0$ e consideriamo i punti della forma p/q_0 con $p \in \mathbb{Z}$. Dato che $\mathbb{R}$ è l'unione dei segmenti con estremi p/q_0 e $(p+1)/q_0$ per $p \in \mathbb{Z}$, per ogni punto x di $\mathbb{R}$ esiste p_0 tale che

$$\frac{p_0}{q_0} \leq x \leq \frac{p_0+1}{q_0}.$$

Quindi è possibile approssimare il punto x con un razionale p_0/q_0 commettendo un errore minore di $1/q_0$. Il fatto che i punti razionali siano arbitrariamente vicini ad ogni punto x di $\mathbb{R}$ si esprime in simboli come segue

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, y \in \mathbb{Q} \quad \text{tale che} \quad |x - y| < \varepsilon,$$

e si esprime dicendo che *l'insieme dei razionali è* <u>*denso*</u> *nell'insieme dei numeri reali.*

Dal punto di vista della misurazione concreta, la densità è una proprietà notevole! In linea di principio, tenendo conto che c'è sempre un errore di misurazione, ogni misura può essere compiuta in $\mathbb{Q}$: un qualsiasi elemento di $\mathbb{R}$ può essere individuato con un arbitrario grado di precisione usando punti razionali. Ad esempio, anche un qualsiasi computer ragiona sempre e solo con (un sottoinsieme dei) numeri razionali.

Rappresentazione decimale dei numeri reali. I numeri reali possono essere rappresentati tramite una "successione di decimali". Vediamo in che maniera.

Fissato $x \in \mathbb{R}$, c'è (almeno) un intero $c_0 \in \mathbb{Z}$ per cui $c_0 \leq x \leq c_0 + 1$. Indichiamo con I_0 il segmento che ha come estremi i punti c_0 e $c_0 + 1$, cioè

$$I_0 = \{y \in \mathbb{R} \,:\, c_0 \leq y \leq c_0 + 1\}.$$

L'insieme I_0 si chiama *intervallo*. Quindi possiamo dire che

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists\, c_0 \in \mathbb{Z} \quad \text{tale che} \quad x \in I_0$$

Se dividiamo I_0 in dieci parti uguali tramite i punti $c_0 + \frac{1}{10}, c_0 + \frac{2}{10}, \ldots, c_0 + \frac{9}{10}$, il numero x è in almeno uno dei sottointervalli di I_0. In altre parole, c'è un intero c_1, compreso tra $0, 1, 2, \ldots, 9$ (nel seguito, diciamo che intero c compreso in $\{0, 1, \ldots, 9\}$ è una cifra) tale che x appartiene all'intervallo I_1 dove

$$I_1 = \left\{ y \in \mathbb{R} \,:\, c_0 + \frac{1}{10}\, c_1 \leq y \leq c_0 + \frac{1}{10}\, c_1 + \frac{1}{10} \right\}.$$

Quindi vale la seguente affermazione

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists\, c_0 \in \mathbb{Z},\ c_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\} \quad \text{tali che } x \in I_1.$$

Di nuovo, dividiamo I_1 in dieci parti uguali e troviamo una cifra c_2 tale che x sia nell'intervallo I_2 definito da:

$$I_2 = \left\{ y \in \mathbb{R} \, : \, c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \frac{1}{100}c_2 \le y \le c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \frac{1}{100}c_2 + \frac{1}{100} \right\}.$$

Ripetendo il procedimento, dopo n passi, troviamo $c_0 \in \mathbb{Z}$, $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. tali che $x \in I_n$ con I_n dato da

$$I_n = \left\{ y \in \mathbb{R} \, : \, c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \cdots + \frac{1}{10^n}c_n \le y \le c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \cdots + \frac{1}{10^n}c_n + \frac{1}{10^n} \right\}.$$

In modo equivalente possiamo dire

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\, c_0 \in \mathbb{Z},\ c_1, \ldots, c_n \in \{0, 1, \ldots, 9\} \quad \text{tali che } x \in I_n.$$

L'errore che si commette approssimando il numero x con la sequenza $c_0, c_1, \ldots, c_n$ è minore o uguale a 10^{-n}. Dato che, per n che cresce, l'errore tende a zero, una volta assegnati tutti i numeri $c_0, c_1, c_2, \ldots,$ (che sono una successione infinita!) è possibile determinare il punto x. In altre parole, un qualsiasi numero reale può essere descritto completamente con una successione infinita di interi. Nella notazione decimale ordinaria, la corrispondenza tra x e la successione $c_0, c_1, c_2, \ldots$ è indicata scrivendo

$$x = c_0, c_1 c_2 c_3 \cdots .$$

dove anche l'intero c_0 viene espresso in notazione decimale.[4] La sequenza $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ corrisponde (in qualche senso) al "numero civico" dell'abitante x di "via dei $\mathbb{R}$eali": ad ogni decimale in più che considera, un alacre postino determina la collocazione di x con un errore più piccolo di un fattore dieci. Per determinare esattamente la collocazione del numero x, il poveretto dovrà considerare un numero infinito di cifre!

Nella rappresentazione decimale dei numeri reali, il ruolo speciale giocato dal numero dieci è puramente accidentale ed è legato ad un problema di dita (dieci nel caso degli esseri umani). L'unica ragione dell'ampio uso del sistema decimale è proprio dovuto alla facilità di contare fino a dieci con le nostre mani. Non per niente, in inglese "cifra" si dice "digit", che manifesta in modo più immediato l'origine "manuale" del conteggio.... Avremmo potuto utilizzare un qualsiasi altro intero $p > 1$ e procedere in modo analogo, ottenendo una rappresentazione diversa, ma altrettanto valida. Ad

[4] E' possibile che ci siano due diverse rappresentazioni decimali dello stesso numero. Per esempio,

$$1 = 0,99999 \cdots = 1,00000 \cdots .$$

Nella costruzione, l'intero c_0 è determinato in maniera univoca da x solo se x non è esso stesso un intero. Se $x \in \mathbb{Z}$, è possibile scgeliere sia $c_0 = x$ che $c_0 = x - 1$. Una volta fatta questa scelta, la cifra c_1 è unica a meno che x non sia uno dei nuovi punti che suddividono I_0 in dieci parti uguali. Continuando così, troviamo che c_0 e tutti i c_k sono determinati unicamente da x, a meno che x non sia uno dei punti della suddivisione ad un certo livello.