OSS: in generale

$f: A \to B \qquad g: C \to D$

1) $f(A) \subset C \Rightarrow \exists\, g \circ f : A \to D$

2) $g(C) \subset A \Rightarrow \exists\, f \circ g : C \to B$

Anche se fosse $A = C$, in generale risulta

$$g \circ f \neq f \circ g$$

cioe', non vale la commutativita'!!!

Ricorderò che: $g \circ f \neq f \circ g$ per due ragioni possibili:

- $g \circ f$ e $f \circ g$ potrebbero operare su domini differenti
- $g \circ f$ e $f \circ g$ sono diverse come funzioni nel senso che hanno output diversi

ESEMPIO:

$f: A \to B$ iniettiva

$\Downarrow$

$\exists\, f^{-1}: f(A) \to A$

prendiamo $g = f^{-1}$

$g = f^{-1}: f(A) \to A$

$g \circ f: A \to A$ tale che $\forall x \in A$:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

allora

$$f^{-1} \circ f(x) = x$$

cioe'

$f^{-1} \circ f$ e' la funzione identica di A in A

$f \circ g: f(A) \to f(A)$ tale che $\forall x \in f(A)$:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

allora

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$

cioè

$f \circ f^{-1}$ è la funzione identica di $f(A)$ in $f(A)$

FUNZIONI MONOTONE

$A \subset \mathbb{R}$

$f : A \to \mathbb{R}$ (Attenzione: f è funzione reale di variabile reale !!!)

f si dice crescente se:

$$\forall \, x, y \in A : \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

PROPRIETÀ:

1) $x, y \in A$, $x < y$

$$x - y < 0 \qquad\qquad f(x) \leq f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

(2) $x, y \in A$, $y < x$

$x - y > 0$

$f(y) \le f(x) \Rightarrow f(x) - f(y) \ge 0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \ge 0$$

In conclusione, si ha:

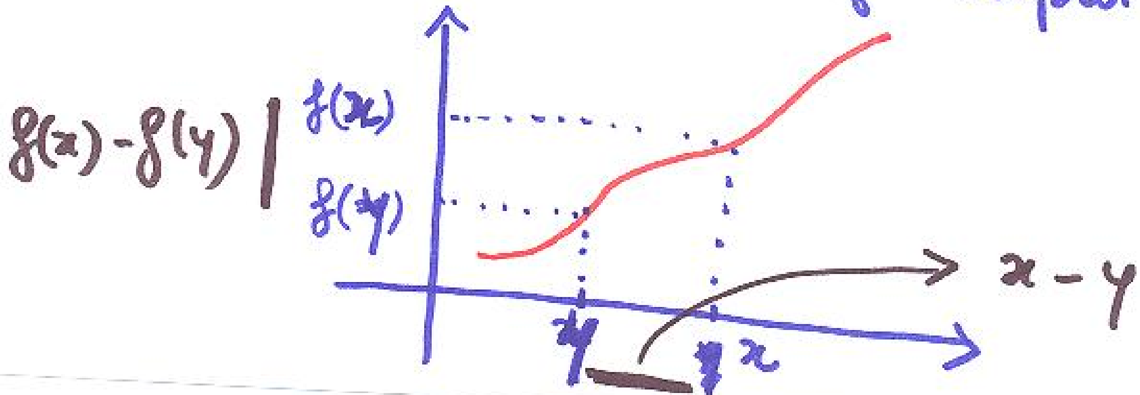
$$f \text{ crescente}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \, x, y \in A : \; x \neq y \Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \ge 0$$

si dice <u>rapporto incrementale</u>

rappresenta il rapporto tra l'incremento sugli output (dovuto ad un incremento degli input) e l'incremento degli input stessi



f si dice strettamente crescente se:

$$\forall \substack{x \\ y} \in A: \quad x < y \implies f(x) < f(y)$$

PROPRIETÀ:

$$f \text{ strettamente crescente}$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \substack{x \\ y} \in A: \quad x \neq y \implies \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$$

f si dice decrescente se:

$$\forall \substack{x \\ y} \in A: \quad x < y \implies f(x) \geq f(y)$$

PROPRIETÀ:

$$f \text{ decrescente}$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \substack{x \\ y} \in A: \quad x \neq y \implies \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 0$$

f si dice strettamente decrescente se:

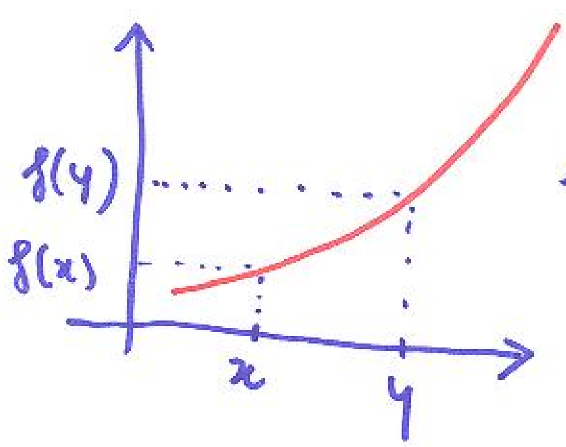
$$\forall\, {}^{x}_{y} \in A: \quad x < y \implies f(x) > f(y)$$

PROPRIETA':

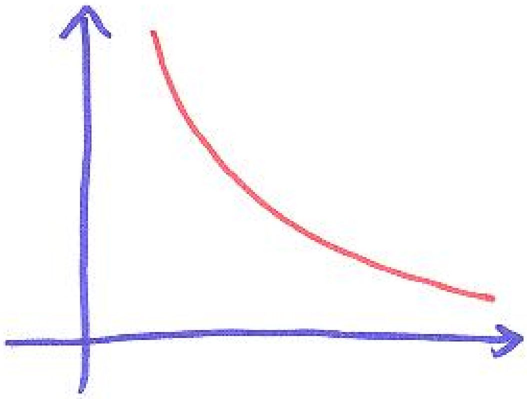
$$f \text{ strettamente decrescente}$$
$$\Downarrow$$
$$\forall\, {}^{x}_{y} \in A: \quad x \neq y \implies \frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0$$

$f \begin{cases} \text{crescente} \\ \text{decrescente} \end{cases}$ si dice monotóna

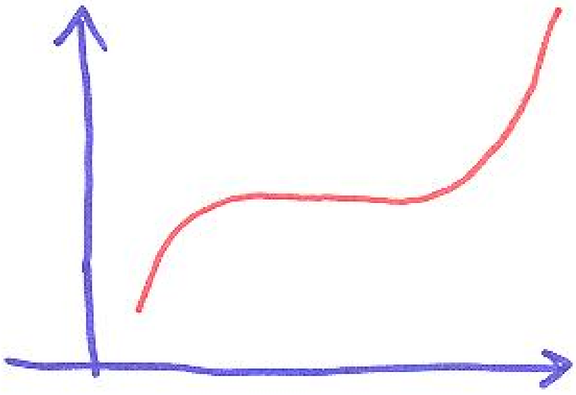
f strett. $\begin{cases} \text{crescente} \\ \text{decrescente} \end{cases}$ si dice strett. monotóna



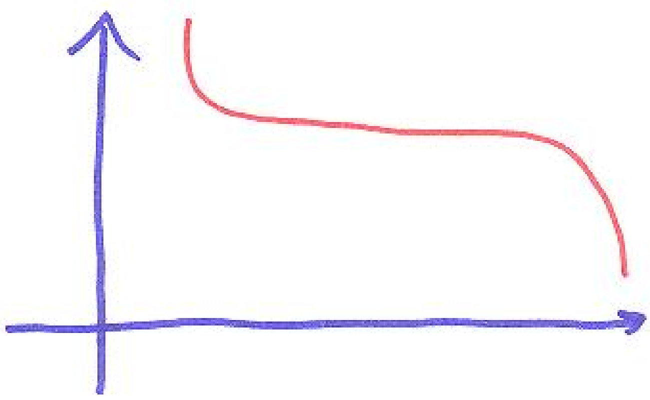
strett. crescente



strett. decrescente



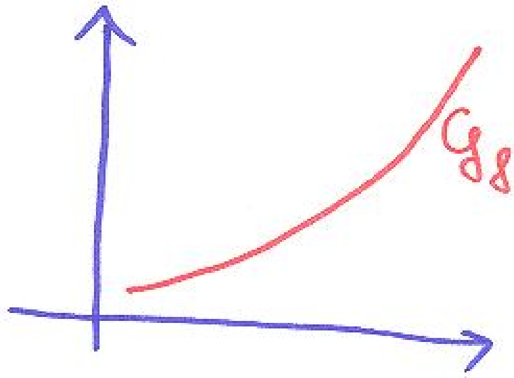
crescente
(non strett.)

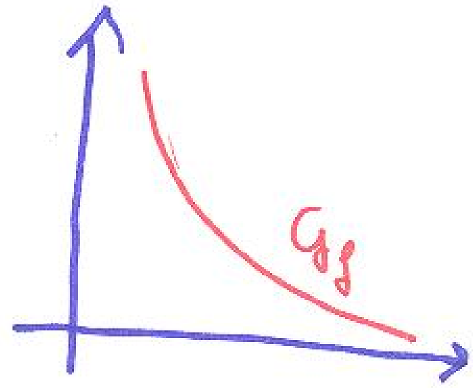


decrescente
(non strett.)

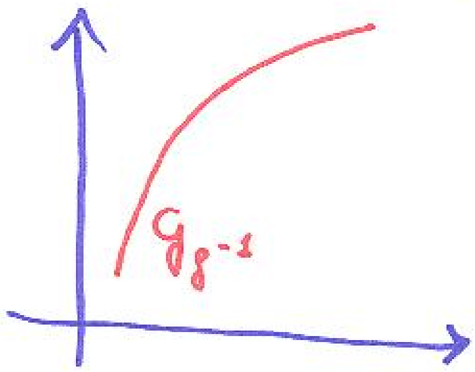
PROPRIETA':

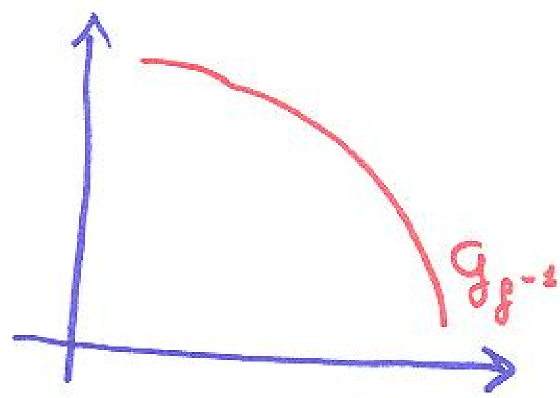
f strettamente monotone





Allora f e' iniettiva
(quindi invertibile!)
$\exists\ f^{-1}$





Quindi la f^{-1} e' anch'essa strettamente monotona e mantiene lo stesso tono di f.