ESERCIZIO:

Data la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

dire, giustificando esaurientemente la risposta,

a) se f e' continua in $x_0 = 0$;

b) se f e' regolare per $x \to +\infty$, in caso affermativo indicare il valore del limite;

c) se f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[1, 2]$.

SVOLGIMENTO:

a) Si ha $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0)$.

Dunque f e' continua in 0.

b) Poiche' $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x} =$

$$= +\infty - 0 = +\infty,$$

f e' regolare a $+\infty$.

c) Nell'intervallo $[1, 2]$ la funzione $f(x)$ si comporta come $\dfrac{e^x - 1}{x}$. Pertanto, f e' continua in $[1, 2]$

(in quanto rapporto di funzioni continue) e derivabile in $]1,2[$ (in quanto rapporto di funzioni derivabili). Allora f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange in $[1,2]$.

ESERCIZIO:

Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = e^{-\frac{x}{x+2}}$$

e tracciarne approssimativamente il grafico. Determinare, inoltre, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

DOMINIO: $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

SEGNO:

$f(x) > 0$ per ogni $x \in D_f$

$f(x) = 0 \iff x \in \emptyset$

$f(x) < 0 \iff x \in \emptyset$

LIMITI SIGNIFICATIVI:

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{x}{x+2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$ $\left(\text{poiché } \lim_{x \to \pm\infty} -\frac{x}{x+2} = -1\right)$

$$\lim_{x \to -2^-} e^{-\frac{x}{x+2}} = 0$$

$$\lim_{x \to -2^+} e^{-\frac{x}{x+2}} = +\infty$$

$$\left(\text{poiché } \begin{array}{l} \lim_{x \to -2^-} -\frac{x}{x+2} = -\infty \\ \lim_{x \to -2^+} -\frac{x}{x+2} = +\infty \end{array} \right)$$

ASINTOTI:

r: $y = \frac{1}{e}$ asintoto orizzontale destro e sinistro

s: $x = -2$ asintoto verticale destro

DERIVATA PRIMA:

$$f'(x) = e^{-\frac{x}{x+2}} \cdot \left(-\frac{x+2-x}{(x+2)^2} \right) = \frac{-2\, e^{-\frac{x}{x+2}}}{(x+2)^2}$$ per ogni $x \in D_f$

MONOTONIA:

$f'(x) > 0 \iff x \in \emptyset$

$f'(x) = 0 \iff x \in \emptyset$

$f'(x) < 0 \iff x \in D_f$

Intervalli in cui f e' strettamente crescente:

nessuno

Intervalli in cui f e' strettamente decrescente:

$]-\infty, -2[\,,\ ]-2, +\infty[$

Punti di estremo locale:

nessuno

DERIVATA SECONDA:

$$f''(x) = D\left(e^{-\frac{x}{x+2}}\right) \cdot \left(\frac{-2}{(x+2)^2}\right) + e^{-\frac{x}{x+2}} \cdot D\left(\frac{-2}{(x+2)^2}\right) =$$

$$= e^{-\frac{x}{x+2}} \, \frac{4(x+3)}{(x+2)^4} \qquad \text{per ogni } x \in D_f$$

CONCAVITA'/CONVESSITA':

$f''(x) > 0 \iff x > -3$ e $x \neq -2$

$f''(x) = 0 \iff x = -3$

$f''(x) < 0 \iff x < -3$

Intervalli in cui f e' convessa:

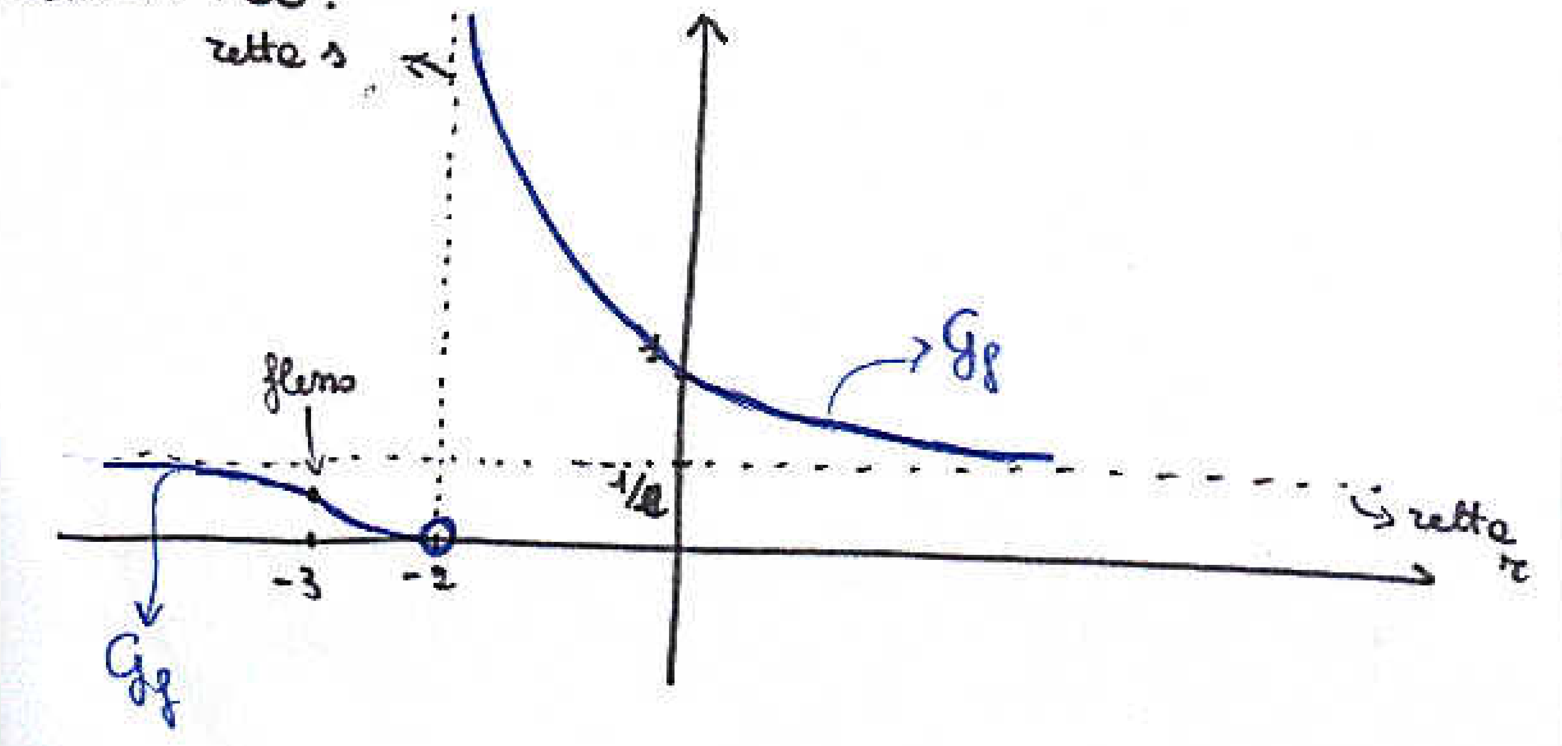
$$]-3, -2[\,,\ ]-2, +\infty[$$

Intervalli in cui f e' concava:

$$]-\infty, -3[$$

Punti di flesso: $x_0 = -3$ con $f(x_0) = e^{-3}$

GRAFICO:



La tangente richiesta ha equazione

$$t: \quad y = -\frac{1}{8\sqrt{e}}(x-2)+\frac{1}{\sqrt{e}}$$

poiché $f(2) = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

$$f'(2) = \frac{-2e^{-1/2}}{16} = -\frac{1}{8\sqrt{e}}$$

ESERCIZIO:

Data la funzione $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x)=\begin{cases} x^2+c & \text{se } -1\leq x<1 \\ \log(e\cdot x) & \text{se } 1\leq x\leq 2 \end{cases}$$

determinare il valore di c in modo che f sia continua.

In corrispondenza di tale valore del parametro c, determinare i punti di estremo globale di f.

SVOLGIMENTO:

Affinché f sia continua, basta richiedere che

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \log(e\cdot 1) = \log e = 1$$

Osservando che:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2+c = 1+c$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \log(e\cdot x) = \log(e\cdot 1) = \log e = 1 = f(1)$$

imponiamo che

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow 1+c=1 \Rightarrow c=0$$

Pertanto, f è continua per c = 0

In tal caso, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \le x < 1 \\ \log(e \cdot x) & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } -1 \le x < 1 \\ \dfrac{\log(e \cdot x)}{x} & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

per $-1 \le x < 1$ si ha: $\begin{cases} f'(x) = 2x > 0 & \text{se } 0 < x < 1 \\ f'(x) = 2x < 0 & \text{se } -1 \le x < 0 \end{cases}$

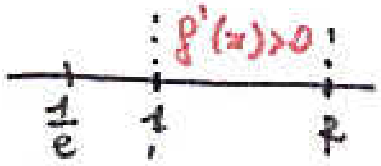
per $1 < x \le 2$ si ha: $f'(x) > 0 \iff \log(e \cdot x) > 0$

$$\Updownarrow$$

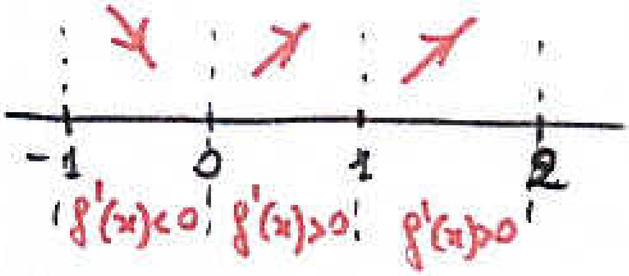
$$e \cdot x > 1$$

$$\Updownarrow$$

$$x > \frac{1}{e}$$



Ricapitolando:



$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(0) = 0$

$f(1) = \log(e \cdot 1) = 1$

$f(2) = \log(2e)$

$x_0 = 0$ e' $p^{\underline{to}}$ di min globale. $\bar{x}_0 = 2$ e' $p^{\underline{to}}$ di max globale

ESERCIZIO:

Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \log(x-1) + 2$$

e tracciarne approssimativamente il grafico.

DOMINIO: $D_f =]1, +\infty[$

SEGNO:

$f(x) > 0 \iff x > 1 + e^{-2}$

$f(x) = 0 \iff x = 1 + e^{-2}$

$f(x) < 0 \iff x < 1 + e^{-2} \wedge 1 < x \iff 1 < x < 1 + e^{-2}$

LIMITI SIGNIFICATIVI:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x-1)}{x} + \frac{2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x-1)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x-1)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \cdot 1 = 0$$

ASINTOTI:

$r: x = 1$ asintoto verticale destro

DERIVATA PRIMA:

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{per ogni } x \in D_f$$

MONOTONIA:

$f'(x) > 0 \iff x \in D_f$

$f'(x) = 0 \iff x \in \emptyset$

$f'(x) < 0 \iff x \in \emptyset$

Intervalli in cui f e' strett. crescente:

$$]1, +\infty[$$

Intervalli in cui f e' strett. decrescente:

nessuno

Punti di estremo locale:

nessuno

DERIVATA SECONDA:

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \qquad \text{per ogni } x \in D_f$$

CONCAVITA'/CONVESSITA':

$f''(x) > 0 \iff x \in \emptyset$

$f''(x) = 0 \iff x \in \emptyset$

$f''(x) < 0 \iff x \in D_f$

Intervalli in cui f e' convessa:

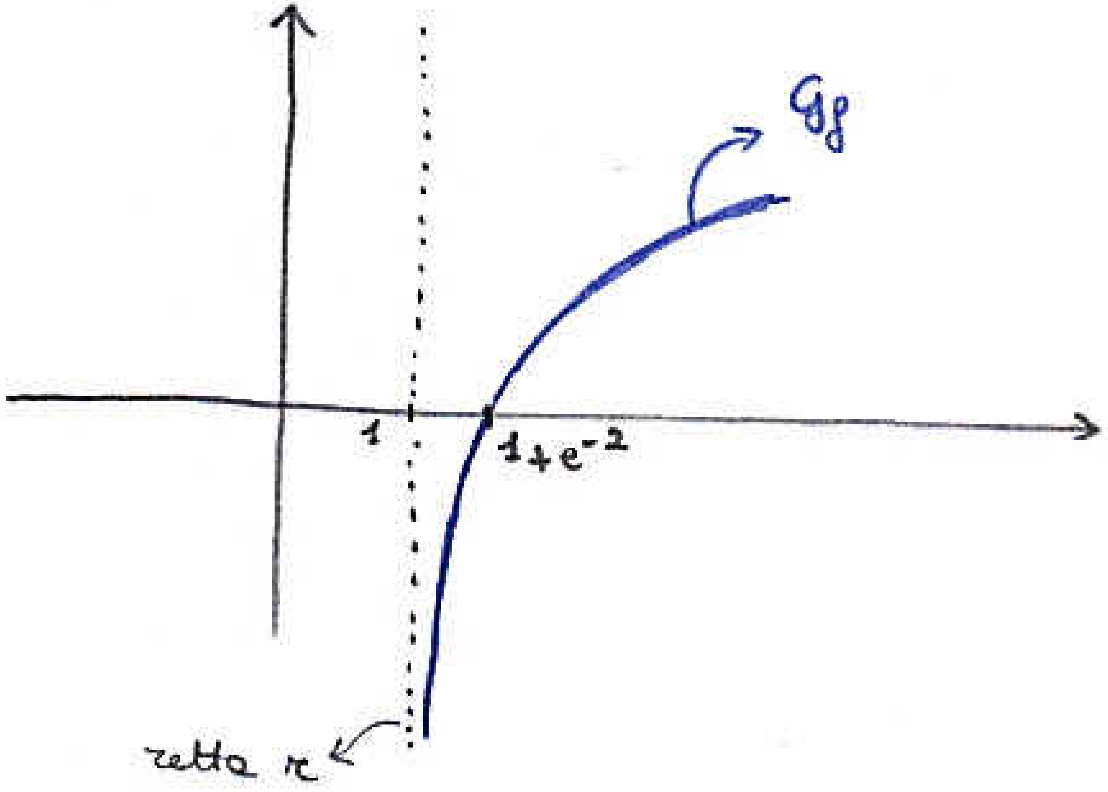
nessuno

Intervalli in cui f e' concava:

$$]1, +\infty[$$

Punti di flesso: nessuno

GRAFICO:



ESERCIZIO:

Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{3x^2+1}$$

e tracciarne approssimativamente il grafico.

DOMINIO: $D_f = \mathbb{R}$

SEGNO:

$f(x) > 0 \iff x \in D_f$

$f(x) = 0 \iff x \in \emptyset$

$f(x) < 0 \iff x \in \emptyset$

LIMITI SIGNIFICATIVI:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3}\,|x|}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3}\,x}{x} = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\sqrt{3}x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3}x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3}x)(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3}x)}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3}x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1-3x^2}{\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+1}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3}\,|x|}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3}(-x)}{x} = -\sqrt{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+\sqrt{3}x = 0$$ (come nel caso precedente!!!)

ASINTOTI:

r: $y=\sqrt{3}\,x$ asintoto obliquo a destra

s: $y=-\sqrt{3}\,x$ asintoto obliquo a sinistra

DERIVATA PRIMA:

$$f'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$$ per ogni $x \in D_f$

MONOTONIA:

$f'(x) > 0 \iff x > 0$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

$f'(x) < 0 \iff x < 0$

Intervalli in cui f e' strett. crescente:

$$]0, +\infty[$$

Intervalli in cui f e' strett. decrescente:

$$]-\infty, 0[$$

Punti di estremo locale:

$x_0 = 0$ e' p$^{\underline{to}}$ di min con $f(0) = 1$

DERIVATA SECONDA:

$$f''(x) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3x^2+1} - x\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}}{3x^2+1} = 3 \cdot \frac{3x^2+1-3x^2}{(3x^2+1)\sqrt{3x^2+1}} =$$

$$= \frac{3}{(3x^2+1)\sqrt{3x^2+1}} \quad \text{per ogni } x \in D_f$$

CONCAVITA'/CONVESSITA':

$f''(x) > 0 \iff x \in D_f$

$f''(x) = 0 \iff x \in \emptyset$

$f''(x) < 0 \iff x \in \emptyset$

Intervalli in cui f e' convessa:

$$\mathbb{R}$$

Intervalli in cui f e' concava:

nessuno

Punti di flesso:

nessuno

GRAFICO: