Metodi Matematici per l'Economia A-K
Corso di Laurea in Economia - anno acc. 2012/2013
12 febbraio 2013

Tempo massimo 2 ore.
Consegnare solamente la bella copia.

1. Disegnare il grafico della funzione: [10 punti]

$$f(x) = \frac{3(\ln x) + 2}{x^2}$$

La funzione rappresenta per $x \geq 0,6$ la domanda di un bene in funzione del tempo x espresso in decine di anni. Dall'esame del grafico di f, al trascorrere del tempo, cosa si deduce riguardo alla domanda di quel bene?

2. Calcolare il seguente integrale. [6 punti]

$$\int_0^{+\infty} (5x^2 - x) \cdot e^{-x} \, dx$$

3. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sistema: [7 punti]

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbb{B}$$

essendo

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ k & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Risolvere poi il sistema per $k = 1$.

4. I costi di produzione, in regime di monopolio, di un'impresa sono espressi dalla funzione [4 punti]

$$C(x) = 2x^3 + 11x^2 - 204x$$

mentre il prezzo unitario di vendita di del bene prodotto è

$$p(x) = 5x + 6$$

dove x è la quantità del bene prodotta. Determinare:

a) la funzione del profitto;
b) la quantità da produrre per conseguire il massimo utile;
c) il valore massimo del profitto.

5. Fornire un esempio di legge esplicita di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NON continua in almeno due punti distinti del dominio. [4 punti]

Metodi Matematici per l'Economia A-K
Corso di Laurea in Economia - anno acc. 2012/2013
12 febbraio 2013

Tempo massimo 2 ore.
Consegnare solamente la bella copia.

1. Disegnare il grafico della funzione: [10 punti]

$$f(x) = \frac{8(\ln x) + 3}{x^2}$$

La funzione rappresenta per $x \geq 0,7$ la domanda di un bene in funzione del tempo x espresso in decine di anni. Dall'esame del grafico di f, al trascorrere del tempo, cosa si deduce riguardo alla domanda di quel bene?

2. Calcolare il seguente integrale. [6 punti]

$$\int_0^{+\infty} (x^2 - 4x) \cdot e^{-x} \, dx$$

3. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sistema: [7 punti]

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbb{B}$$

essendo

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2 & k & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Risolvere poi il sistema per $k = -1$.

4. I costi di produzione, in regime di monopolio, di un'impresa sono espressi dalla funzione [4 punti]

$$C(x) = 2x^3 + 13x^2 - 202x$$

mentre il prezzo unitario di vendita di del bene prodotto è

$$p(x) = 7x + 8$$

dove x è la quantità del bene prodotta. Determinare:

a) la funzione del profitto;
b) la quantità da produrre per conseguire il massimo utile;
c) il valore massimo del profitto.

5. Fornire un esempio di legge esplicita di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NON continua in almeno due punti distinti del dominio. [4 punti]

Metodi Matematici per l'Economia A-K
Corso di Laurea in Economia - anno acc. 2012/2013
12 febbraio 2013

Tempo massimo 2 ore.
Consegnare solamente la bella copia.

1. Disegnare il grafico della funzione: [10 punti]

$$f(x) = \frac{5(\ln x) + 2}{x^2}$$

La funzione rappresenta per $x \geq 0,7$ la domanda di un bene in funzione del tempo x espresso in decine di anni. Dall'esame del grafico di f, al trascorrere del tempo, cosa si deduce riguardo alla domanda di quel bene?

2. Calcolare il seguente integrale. [6 punti]

$$\int_0^{+\infty} (3x^2 + x) \cdot e^{-x}\, dx$$

3. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sistema: [7 punti]

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbb{B}$$

essendo

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & k \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Risolvere poi il sistema per $k = -1$.

4. I costi di produzione, in regime di monopolio, di un'impresa sono espressi dalla funzione [4 punti]

$$C(x) = 2x^3 + 12x^2 - 203x$$

mentre il prezzo unitario di vendita di del bene prodotto è

$$p(x) = 6x + 7$$

dove x è la quantità del bene prodotta. Determinare:

a) la funzione del profitto;
b) la quantità da produrre per conseguire il massimo utile;
c) il valore massimo del profitto.

5. Fornire un esempio di legge esplicita di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NON continua in almeno due punti distinti del dominio. [4 punti]

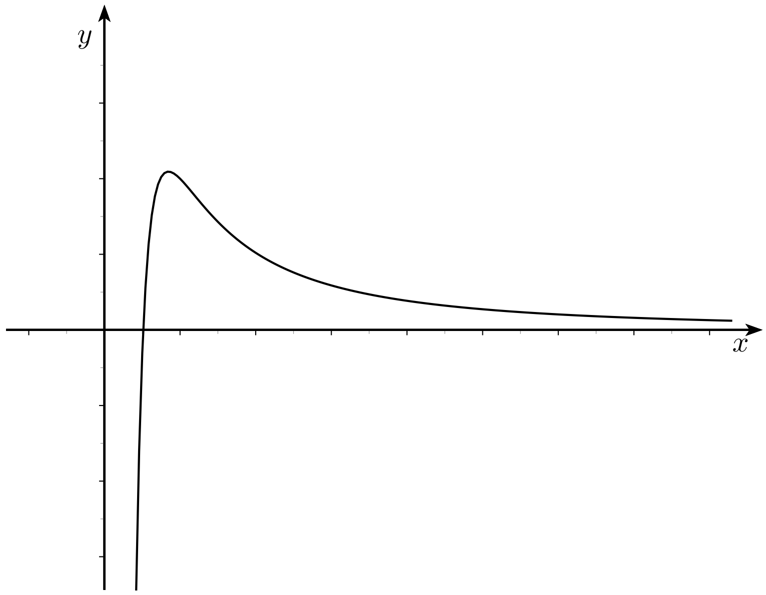
Brevi risposte ai quesiti

I compiti presentano le stesse difficoltà e sono, in parte, uguali: pertanto si riportano solo le risposte relative al primo compito.

1. $f(x) = \dfrac{3\ln x + 2}{x^2}$
   Dominio: $]0; +\infty[$
   Intersezione con gli assi: $\nexists$ intersezione con l'asse y; intersezione con l'asse x $(\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}; 0)$
   Segno: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$
   Limiti ed asintoti:
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\ln x + 2}{x^2} = -\infty$$
   quindi $x = 0$ è asintoto verticale destro
   $$\lim_{x\to +\infty} \frac{3\ln x + 2}{x^2} = 0$$
   quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale.
   Derivata prima: $f'(x) = \frac{-6\ln x - 1}{x^3}$
   $f'(x) \geq 0$
   Soluzione:
   $$0 < x \leq \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$$
   La funzione è strettamente crescente in $]0; \frac{1}{\sqrt[6]{e}}[$ e strettamente decrescente in $]\frac{1}{\sqrt[6]{e}}; +\infty[$
   $x = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$ punto di massimo relativo (e assoluto)
   Le coordinate del punto di massimo relativo sono:
   $M(\frac{1}{\sqrt[6]{e}}; \frac{3}{2}\sqrt[3]{e})$.
   Derivata seconda: $f''(x) = \frac{18\ln x - 3}{x^4}$

   $f''(x) \geq 0$
   Soluzione:
   $$x = \sqrt[6]{e}$$
   Pertanto la funzione ha un punto di flesso $F(\sqrt[6]{e}; \frac{5}{2\sqrt[3]{e}})$.
   La funzione è convessa in $]\sqrt[6]{e}; +\infty[$ ed è concava in $]0; \sqrt[6]{e}[$.
   La funzione domanda cresce fino a diventare massima dopo circa 8 anni, poi decresce indefinitamente fino a tendere a 0 per $x \to +\infty$.

Grafico:



2.

$$\int_0^{+\infty}(5x^2-x)\cdot e^{-x}\,dx$$

Integrando per parti si ottiene:

$$(5x^2-x)\cdot(-e^{-x})-\int -e^{-x}\cdot(10x-1)\,dx \;=\; (-5x^2+x)\cdot e^{-x}+\int(10x-1)\cdot e^{-x}\,dx=$$

$$=(-5x^2+x)\cdot e^{-x}+(10x-1)\cdot(-e^{-x})-\int -10\cdot e^{-x}\,dx=(-5x^2+x)\cdot e^{-x}+(-10x+1)\cdot e^{-x}-10\cdot e^{-x}+c=$$

$$=(-5x^2-9x-9)\cdot e^{-x}+c$$

$$\int_0^{+\infty}(5x^2-x)\cdot e^{-x}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-5b^2-9b-9}{e^b}\right]-(-9)=9$$

3. Si ha che $det\mathbb{A}=-k+1$.
   Risolvendo l'equazione di I grado associata, si trova che se $k\neq 1$, allora $det\mathbb{A}\neq 0$, il sistema è di Cramer e quindi ha una sola soluzione.
   Se $k=1$ il rango di $(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ e il rango di $\mathbb{A}$ sono uguali a 2, allora il sistema ammette ∞^1 soluzioni, per il teorema di Rouchè -Capelli.
   Ponendo $k=1$ e risolvendo il sistema, ad esempio, con il metodo di sostituzione, troviamo che le soluzioni sono $S=\{(x,13x-2,4x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$, con x parametro.

4. La funzione profitto è

$$f(x)=p(x)\cdot x-C(x)=(5x+6)\cdot x-(2x^3+11x^2-204x)=-2x^3-6x^2+210x$$

Il massimo profitto si ottiene studiando il segno della derivata prima della funzione, ossia $f'(x) = -6x^2 - 12x + 210$.
Tenendo presente che $x > 0$ perché corrisponde alla quantità di bene prodotta, ponendo $f'(x) \geq 0$ si ottiene che $0 < x \leq 5$. Dunque $x = 5$ è il punto di massimo relativo e assoluto della funzione in corrispondenza del quale si ottiene il massimo profitto, $f(5) = 650$.

5. Dobbiamo scrivere una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ che non sia continua in almeno due punti. Ad esempio:
$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$$
Abbiamo che la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, ma non è continua nei punti $x = 0$ e $x = 2$, infatti:
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$
e
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = 1 \neq \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4.$$