

Cognome

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nome

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

matricola

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Firma e indirizzo posta elettronica (solo per chi non si è registrato sul sito)

@

NOTA BENE: si accetta una sola correzione nel gruppo di quesiti 1-6

- Una banca capitalizza il primo gennaio di ogni anno le somme depositate e le fa crescere a regime composto a tasso i o a regime semplice a tasso $i_1 = 4\%$ a seconda che la giacenza sia superiore all'anno o meno. Inoltre, a partire dal primo gennaio 2017, trattiene ad ogni inizio di anno una commissione pari al 2% di quanto maturato fino a quel momento. Se depositate un capitale il 01/11/2014 da ritirare il 01/06/2017, trovare i per cui il montante risulti uguale al capitale iniziale aumentato del 2%.
 (a) 0,74% (b) 0,85% (c) 0,96% (d) 0,78%
- Se versate un capitale in un conto corrente a regime semplice a tasso $i = 10\%$ in cui la banca ogni due mesi capitalizza ma contemporaneamente trattiene una commissione pari ad α volte la somma maturata, con $\alpha \in]0, 1[$, per quale massimo α_M siete sicuri di non diminuire il vostro capitale dopo sei mesi?
 (a) $\alpha_M = 1,64\%$ (b) $\alpha_M = 1,75\%$ (c) $\alpha_M = 1,46\%$ (d) $\alpha_M = 1,57\%$
- Potete investire un credito C per un periodo superiore ai sei mesi a regime semplice a tasso $i = 2\%$ o a regime composto a tasso $i_1 = 2,01\%$. Possiamo dire che la seconda opzione è sempre preferibile?
 (a) dipende dal periodo (b) dipende dai tassi (c) sí, sempre (d) no, mai
- In un piano di ammortamento alla francese a rate mensili, durata pari a 10 anni e tasso mensile $i_m = 1,1\%$, dopo tre anni il tasso si porta a $i'_m = 1\%$. Se decidete di ridurre il piano di un anno, come è la nuova rata rispetto alla vecchia?
 (a) le è superiore per circa il 7% (b) le è superiore per circa il 5% (c) le è superiore per circa il 4% (d) le è superiore per circa il 8%
- Un acquisto di un bene di 9843,75€ viene contrattato in 2 rate semestrali di 6000€. A quanto ammonta il tasso annuo?
 (a) $i = 35,12\%$ (b) $i = 28,72\%$ (c) $i = 31,11\%$ (d) $i = 30,61\%$
- Un B.O.T. di nominale $N = 1000\text{€}$ costa 998€. Se la banca tramite cui lo negoziate vi applica una commissione fissa c al momento dell'acquisto, sapendo che l'aliquota fiscale è pari ad $\alpha = 11,5\%$, oltre quale valore limite di c il rendimento netto diviene negativo?
 (a) $c = 1,97\text{€}$ (b) $c = 1,47\text{€}$ (c) $c = 1,37\text{€}$ (d) $c = 1,77\text{€}$
- Un titolo presenta il seguente cash-flow:

$$\{(0; -1200), (1; 548), (2; 728)\}.$$

Determinare la *duration* di tale titolo esclusivamente in mesi (per difetto).

Risposta: $D = \dots\dots\dots$ mesi.

8. Un BTP Italia, emesso il primo marzo 2015, durata due anni, cedola semestrale a tasso cedolare $i = 1\%$, premio fedeltà al 4 per mille, viene acquistato per un nominale $N = 1000\text{€}$. La sequenza degli indici FOI già usciti, che indicheremo con I_j , $j = 0, 1, 2, 3$, è la seguente:

$$I_0 = 103, I_1 = 103,3, I_2 = 103,5, I_3 = 103,4.$$

In attesa dell'uscita dell'ultimo indice I_4 a marzo 2017, supponendo di tenere il titolo fino alla scadenza:

- determinare il minimo rendimento del titolo in percentuale, detto r_m , indipendentemente dal valore che uscirà di I_4 , con una approssimazione pari alla prima cifra decimale;
- determinare tra quali due valori deve uscire I_4 perché si abbia un rendimento compreso tra l'1,8% e il 2%.

Teoria

Dimostrare che il fattore di montante la cui funzione associata sia $f(t) = (1+i)^{t-1}$, ove $i > 0$, non è scindibile.

Soluzione primo quesito

Il montante fino al primo gennaio 2017 é

$$C(1+i_1t_1) \cdot (1+i)^2$$

ove $t_1 = 1/6$, mentre C é il capitale iniziale (dato che si rivelerá poi ininfluente). A questo punto, la banca si trattiene il 2% di tale somma, quindi rimane a maturare a regime semplice per cinque mesi solo il 98%. Il montante finale, all'uscita in data 01/06/2017, é dunque

$$0,98 \cdot C(1+i_1t_1) \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i_1t_2),$$

ove $t_2 = 5/12$. L'equazione da impostare é alla fine

$$0,98 \cdot C(1+i_1t_1) \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i_1t_2) = 1,02C.$$

Se dalla precedente formula si ricava i , si trova che

$$i = \sqrt{\frac{1,02}{0,98(1+i_1t_1)(1+i_1t_2)}} - 1 \cong 0,85\%.$$

Soluzione secondo quesito

Chiamando C il capitale versato sul conto corrente, dopo due mesi vi rimane

$$(1-\alpha)C\left(1+\frac{i}{6}\right).$$

Nei successivi due mesi, si capitalizza quella somma, poi le si toglie una percentuale pari ad α ossia rimane

$$(1-\alpha)\left((1-\alpha)C\left(1+\frac{i}{6}\right)\right)\left(1+\frac{i}{6}\right) = (1-\alpha)^2 \cdot C\left(1+\frac{i}{6}\right)^2.$$

Analogamente, nei successivi due mesi, quindi dopo sei mesi complessivi, la somma che rimane é

$$(1-\alpha)^3 \cdot C\left(1+\frac{i}{6}\right)^3.$$

Il massimo α é quello in corrispondenza del quale la suddetta quantità é uguale a C , ossia si deve risolvere l'equazione

$$(1-\alpha_M)^3 \cdot C\left(1+\frac{i}{6}\right)^3 = C$$

che ha come soluzione

$$\alpha_M = \frac{i/6}{1+i/6}.$$

Inserendo i dati, si trova che α_M é pari circa a 1,64%.

Soluzione terzo quesito

Si noti che $\exp(i) - 1 \cong 0,02020134 > i_1$, quindi siamo nella situazione in cui la retta del regime semplice interseca la curva del composto in corrispondenza di una sola epoca $t^* > 0$. Inoltre, se si calcola il montante relativo al capitale di un euro a regime semplice al sesto mese, ossia per $t = 0,5$, si trova $M_s(0,5) = 1 + 0,5 \cdot 0,02 = 1,01$, mentre se si fa lo stesso a regime composto a tasso $i_1 = 2,01\%$, si ha che $M_c(0,5) = (1 + 0,0201)^{0,5} = 1,01$, ossia t^* é esattamente 0,5, pertanto, per qualunque durata superiore ai sei mesi prevale sempre il regime composto.

Soluzione quarto quesito

La rata R del piano alla francese é data da

$$R = D_0 \cdot \frac{i_m}{1 - (1+i_m)^{-n}}, \quad (1)$$

ove $n = 120$, $i_m = 1,1\%$, mentre D_0 é il prestito iniziale. Dopo tre anni, ossia $k = 36$ rate mensili, cambia il tasso, quindi é come se si ricominciasse un nuovo piano alla francese con una nuova rata R^* , tasso $i'_m = 1\%$, durata pari a sei anni (perché si riduce la durata di un anno, quindi ne rimangono sei e non sette), ossia $p = 72$ rate mensili, e debito iniziale pari al debito residuo D_k , dato da

$$D_k = D_0 \cdot \frac{1 - (1+i_m)^{-n+k}}{1 - (1+i_m)^{-n}}. \quad (2)$$

La formula della rata di questo secondo piano, analogamente alla formula in eq. (22), è data da

$$R^* = D_k \cdot \frac{i'_m}{1 - (1 + i'_m)^{-p}}.$$

Se ora inseriamo nell'ultima formula quella dell'eq. (22), sostituendo D_k come nell'eq.(23), dopo qualche passaggio algebrico, si ha che

$$\frac{R^*}{R} = \frac{i'_m}{1 - (1 + i'_m)^{-72}} \cdot \frac{1 - (1 + i_m)^{-84}}{i_m}.$$

Inserendo i dati, si trova che

$$\frac{R^*}{R} \cong 1,0683,$$

quindi la nuova rata é superiore di circa il 7% alla vecchia.

Soluzione quinto quesito

L'equazione da impostare é la condizione di chiusura finanziaria, ossia

$$9843,75 = \frac{6000}{\sqrt{1+i}} + \frac{6000}{(1+i)}.$$

La suddetta equazione, con la sostituzione di variabile $v = 1/\sqrt{1+i}$, diventa di secondo grado, e l'unica soluzione finale accettabile é $i \cong 30,61\%$.

Soluzione sesto quesito

Siccome il prezzo di acquisto $A = 998$ é inferiore al nominale $N = 1000$, scatta l'imposta da versare al momento dell'acquisto, ossia $\alpha(N - A)$, con $\alpha = 0,115$. Tenuto conto che si deve pagare anche una commissione fissa c alla banca che negozia il titolo, la somma finale complessiva da versare é $A + \alpha(N - A) + c$. Senza fare molti calcoli, é evidente che il rendimento diventa negativo se e solo se il nominale che ci verrà restituito alla scadenza (qualunque essa sia) é superiore alla somma effettivamente pagata all'acquisto, dunque l'equazione da impostare é

$$A + \alpha(N - A) + c = N,$$

da cui si ricava facilmente che

$$c = (N - A) \cdot (1 - \alpha) = 1,77.$$

Soluzione settimo quesito

Prima di tutto, bisogna determinare il rendimento di tale titolo, ossia il TIR. Il discounted cash-flow è dato da

$$G(x) = -1200 + \frac{548}{1+x} + \frac{728}{(1+x)^2}.$$

L'equazione algebrica $G(x) = 0$ è di secondo grado: se la risolvete nella variabile $v = 1/(1+x)$, dopo qualche semplificazione algebrica, risulterà

$$182v^2 + 137v - 300 = 0.$$

Tale equazione ammette una sola soluzione accettabile, ossia positiva, e, se poi ritornate alla variabile originaria, troverete che $x^* = 4\%$. Pertanto la duration di tale titolo è

$$D = \frac{\frac{548}{1,04} + \frac{728 \cdot 2}{(1,04)^2}}{1200} \simeq 1,561,$$

ossia diciotto mesi (per difetto).

Soluzione ottavo quesito

a) Si noti, dalla sequenza degli indici, che é presente inflazione nei primi due semestri, ma non nel terzo.

La formula piú generale che si può applicare, **qualunque sia l'andamento degli indici FOI semestre per semestre**, è

$$\alpha_j = \frac{M_j}{M_{j-1}} - 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

ove gli indici M_j , per ogni j che va da 1 fino a n (si noti che, nel nostro caso, $n = 4$), sono calcolati ricorsivamente nel seguente modo:

$$\begin{cases} M_j = \max\{I_j, M_{j-1}\}, & j = 1, \dots, n; \\ M_0 = I_0. \end{cases}$$

Nel nostro caso, si ha dunque che $M_0 = 103$, $M_1 = 103,3$, $M_2 = 103,5$, mentre $M_3 = M_2 = 103,5$.

Tenete conto che le formule per calcolarsi la cedola c_j , il capitale rivalutato CR_j e la remunerazione semestrale RS_j sono le stesse sia in caso inflazione che di deflazione, ossia

$$\begin{cases} c_j = \frac{1}{2}iN(1 + \alpha_j); \\ CR_j = \alpha_j N & j = 1, 2, 3, 4; \\ RS_j = c_j + CR_j, & j = 1, 2, 3; \\ RS_4 = c_4 + CR_4 + 1,004 \cdot N. \end{cases} \quad (4)$$

In particolare, si noti che RS_4 tiene conto del premio fedeltà, sotto l'ipotesi che il titolo sia portato a scadenza.

Facendo tutti i calcoli e ricordandosi di approssimare i coefficienti α_j alla quinta cifra decimale, per $j = 1, 2, 3$, si ha che:

Epoche	α_j	CR_j	c_j	RS_j
1	0,00291	2,91	5,01	7,92
2	0,00194	1,94	5,01	6,95
3	0	0	5	5

Pertanto, il *cash-flow* dell'investimento, che denoteremo A , è dato da

$$a_0 = -1000, \quad a_1 = 7,92, \quad a_2 = 6,95, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 1009 + z,$$

ove si noti che a_4 comprende una parte certa, ossia la restituzione del nominale più il premio fedeltà e la cedola minima classica pari a 5 euro, e una parte incerta, legata alla eventuale rivalutazione del quarto semestre, denotata con l'incognita z , ancora non conosciuta, perché dipende dall'indice I_4 , che al momento non possiamo conoscere, perché uscirà solo a marzo 2017. Si noti comunque che siccome a_4 , qui sopra scritta come $1009 + z$, altro non è che RS_4 come appare nell'eq. (25), si ricava facilmente che

$$z = 1005\alpha_4. \quad (5)$$

Il minimo rendimento possibile, detto r_m , si avrà ovviamente nel caso in cui anche nell'ultimo semestre non scatti il meccanismo di rivalutazione, in corrispondenza a $\alpha_4 = 0$, che comporta automaticamente $z = 0$ in base all'eq. (26). Pertanto, il *discounted cash-flow* del titolo nella peggiore prospettiva, denominato $G_{\text{Min}}(x)$, sarebbe

$$G_{\text{Min}}(x) = -1000 + \frac{7,92}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{6,95}{(1+x)} + \frac{5}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1009}{(1+x)^2}.$$

Considerate il fatto che non siete in grado di trovare la soluzione esatta, denotata appunto r_m , dell'equazione $G_{\text{Min}}(x) = 0$, che vi fornirebbe la risposta cercata, perché algebricamente troppo complicata (anche passando attraverso una opportuna sostituzione di variabile, avreste una equazione algebrica di quarto grado). Allora, ricordando che $G_{\text{Min}}(x)$ è una funzione strettamente decrescente, tale che $G_{\text{Min}}(x) > 0$ per $x < r_m$ e $G_{\text{Min}}(x) < 0$ per $x > r_m$, dobbiamo "testare il segno" di $G_{\text{Min}}(x)$ "buttandovi dentro" valori ragionevoli di x , rammentando che r_m è sicuramente superiore al tasso cedolare, quantomeno per il premio finale, e tenendo conto che il meccanismo di rivalutazione semestrale è scattato in due semestri, quindi ha senso considerare valori abbastanza superiori a i , anche se non eccessivamente. Se ad esempio inserite $r_1 = 1,4\%$, risulterà $G_{\text{Min}}(r_1) \simeq 0,946 > 0$, mentre con $r_2 = 1,5\%$ risulterà $G_{\text{Min}}(r_2) \simeq -1,004 < 0$, pertanto $r_1 < r_m < r_2$, con l'approssimazione richiesta.

b) Il *discounted cash-flow* del titolo è dato da

$$G(x) = -1000 + \frac{7,92}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{6,95}{(1+x)} + \frac{5}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1009+z}{(1+x)^2}.$$

Se desideriamo che il rendimento di tale titolo sia $r_3 = 1,8\%$ bisogna che r_3 sia il TIR di $G(x)$, ossia l'unica soluzione appartenente a $] -1, +\infty[$ dell'equazione $G(x) = 0$. Se inseriamo $r_3 = 0,018$ al posto di x ed eguagliamo a zero, si trova

$$z = 1000(1,018)^2 - 7,92(1,018)^{3/2} - 6,95(1,018) - 5\sqrt{1,018} - 1009.$$

Sfruttando poi l'eq. (26), ricaviamo direttamente che

$$\alpha_4 = \frac{1000(1,018)^2 - 7,92(1,018)^{3/2} - 6,95(1,018) - 5\sqrt{1,018} - 1009}{1005}. \quad (6)$$

Ricordandoci di calcolare α_4 con cinque cifre decimali, se è positivo, significa che nell'ultimo semestre è scattato il meccanismo di rivalutazione, quindi c'è stata inflazione per cui, in base alla formula data in eq. (24), l'indice I_4 si è alzato rispetto al valore massimo registrato fino al semestre precedente, ossia $I_4 > M_3 = 103,5$ e pertanto

$$I_4 = M_4 = (1 + \alpha_4) \cdot M_3 = (1 + \alpha_4) \cdot 103,5. \quad (7)$$

Alla fine della procedura descritta, quindi, attraverso l'eq. (27), l'eq. (28) ci fornisce il valore dell'indice I_4 relativo al tasso r_3 . Se ripetiamo il tutto con $r_4 = 2\%$ al posto di r_3 , troveremo un altro corrispondente I_4 (ovviamente superiore al precedente): tali due valori di I_4 sono quelli richiesti. In particolare, in corrispondenza di r_3 , le eqs. (27) e (28) ci forniscono rispettivamente $\alpha_4 = 0,00703$ e $I_4 = 104,23$, mentre in corrispondenza di r_4 , le eqs. (27) e (28) ci forniscono rispettivamente $\alpha_4 = 0,01105$ e $I_4 = 104,64$.

Soluzione quesito teorico

La scindibilità di un fattore di montante significa che la funzione $f(t)$ ad esso associata soddisfa la proprietà

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) \text{ per ogni } x, y > 0.$$

Nel nostro caso, si ha che

$$f(x) \cdot f(y) = (1+i)^{x-1} \cdot (1+i)^{y-1} = (1+i)^{x+y-2},$$

mentre

$$f(x+y) = (1+i)^{x+y-1} > (1+i)^{x+y-2},$$

quindi si verifica sempre che

$$f(x) \cdot f(y) < f(x+y).$$

Cognome

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nome

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

matricola

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Firma e indirizzo posta elettronica (solo per chi non si è registrato sul sito)

@

NOTA BENE: si accetta una sola correzione nel gruppo di quesiti 1-6

- Se versate un capitale in un conto corrente a regime semplice a tasso $i = 13\%$ in cui la banca ogni due mesi capitalizza ma contemporaneamente trattiene una commissione pari ad α volte la somma maturata, con $\alpha \in]0, 1[$, per quale massimo α_M siete sicuri di non diminuire il vostro capitale dopo sei mesi?

(a) $\alpha_M = 2,20\%$ (b) $\alpha_M = 2,23\%$ (c) $\alpha_M = 2,12\%$ (d) $\alpha_M = 2,32\%$
- Potete investire un credito C per un periodo superiore ai sei mesi a regime semplice a tasso $i = 2\%$ o a regime composto a tasso $i_1 = 2,01\%$. Possiamo dire che la seconda opzione é sempre preferibile?

(a) sí, sempre (b) no, mai (c) dipende dal periodo (d) dipende dai tassi
- Una banca capitalizza il primo gennaio di ogni anno le somme depositate e le fa crescere a regime composto a tasso i o a regime semplice a tasso $i_1 = 1\%$ a seconda che la giacenza sia superiore all'anno o meno. Inoltre, a partire dal primo gennaio 2017, trattiene ad ogni inizio di anno una commissione pari al 2% di quanto maturato fino a quel momento. Se depositate un capitale il 01/11/2014 da ritirare il 01/06/2017, trovare i per cui il montante risulti uguale al capitale iniziale aumentato del 2%.

(a) 1,72% (b) 1,27% (c) 1,64% (d) 1,46%
- Un acquisto di un bene di 9843,75€ viene contrattato in 2 rate semestrali di 6000€. A quanto ammonta il tasso annuo?

(a) $i = 28,72\%$ (b) $i = 31,11\%$ (c) $i = 30,61\%$ (d) $i = 35,12\%$
- Un B.O.T. di nominale $N = 1000\text{€}$ costa 998€. Se la banca tramite cui lo negoziate vi applica una commissione fissa c al momento dell'acquisto, sapendo che l'aliquota fiscale é pari ad $\alpha = 11,5\%$, oltre quale valore limite di c il rendimento netto diviene negativo?

(a) $c = 1,97\text{€}$ (b) $c = 1,77\text{€}$ (c) $c = 1,47\text{€}$ (d) $c = 1,37\text{€}$
- In un piano di ammortamento alla francese a rate mensili, durata pari a 10 anni e tasso mensile $i_m = 1,1\%$, dopo tre anni il tasso si porta a $i'_m = 1\%$. Se decidete di ridurre il piano di un anno, come é la nuova rata rispetto alla vecchia?

(a) le é superiore per circa il 8% (b) le é superiore per circa il 7% (c) le é superiore per circa il 5% (d) le é superiore per circa il 4%
- Un titolo presenta il seguente cash-flow:

$$\{(0; -1200), (1; 548), (2; 728)\}.$$

Determinare la *duration* di tale titolo esclusivamente in mesi (per difetto).

Risposta: $D = \dots\dots\dots$ mesi.

8. Un BTP Italia, emesso il primo marzo 2015, durata due anni, cedola semestrale a tasso cedolare $i = 1\%$, premio fedeltà al 4 per mille, viene acquistato per un nominale $N = 1000\text{€}$. La sequenza degli indici FOI già usciti, che indicheremo con I_j , $j = 0, 1, 2, 3$, è la seguente:

$$I_0 = 103, I_1 = 103,3, I_2 = 103,5, I_3 = 103,4.$$

In attesa dell'uscita dell'ultimo indice I_4 a marzo 2017, supponendo di tenere il titolo fino alla scadenza:

- determinare il minimo rendimento del titolo in percentuale, detto r_m , indipendentemente dal valore che uscirà di I_4 , con una approssimazione pari alla prima cifra decimale;
- determinare tra quali due valori deve uscire I_4 perché si abbia un rendimento compreso tra l'1,8% e il 2%.

Teoria

Dimostrare che il fattore di montante la cui funzione associata sia $f(t) = (1+i)^{t-1}$, ove $i > 0$, non è scindibile.

Soluzione primo quesito

Chiamando C il capitale versato sul conto corrente, dopo due mesi vi rimane

$$(1 - \alpha)C\left(1 + \frac{i}{6}\right).$$

Nei successivi due mesi, si capitalizza quella somma, poi le si toglie una percentuale pari ad α ossia rimane

$$(1 - \alpha)\left((1 - \alpha)C\left(1 + \frac{i}{6}\right)\right)\left(1 + \frac{i}{6}\right) = (1 - \alpha)^2 \cdot C\left(1 + \frac{i}{6}\right)^2.$$

Analogamente, nei successivi due mesi, quindi dopo sei mesi complessivi, la somma che rimane é

$$(1 - \alpha)^3 \cdot C\left(1 + \frac{i}{6}\right)^3.$$

Il massimo α é quello in corrispondenza del quale la suddetta quantità é uguale a C , ossia si deve risolvere l'equazione

$$(1 - \alpha_M)^3 \cdot C\left(1 + \frac{i}{6}\right)^3 = C$$

che ha come soluzione

$$\alpha_M = \frac{i/6}{1 + i/6}.$$

Inserendo i dati, si trova che α_M é pari circa a 2,12%.

Soluzione secondo quesito

Si noti che $\exp(i) - 1 \cong 0,02020134 > i_1$, quindi siamo nella situazione in cui la retta del regime semplice interseca la curva del composto in corrispondenza di una sola epoca $t^* > 0$. Inoltre, se si calcola il montante relativo al capitale di un euro a regime semplice al sesto mese, ossia per $t = 0,5$, si trova $M_s(0,5) = 1 + 0,5 \cdot 0,02 = 1,01$, mentre se si fa lo stesso a regime composto a tasso $i_1 = 2,01\%$, si ha che $M_c(0,5) = (1 + 0,0201)^{0,5} = 1,01$, ossia t^* é esattamente 0,5, pertanto, per qualunque durata superiore ai sei mesi prevale sempre il regime composto.

Soluzione terzo quesito

Il montante fino al primo gennaio 2017 é

$$C(1 + i_1 t_1) \cdot (1 + i)^2$$

ove $t_1 = 1/6$, mentre C é il capitale iniziale (dato che si rivelerá poi ininfluente). A questo punto, la banca si trattiene il 2% di tale somma, quindi rimane a maturare a regime semplice per cinque mesi solo il 98%. Il montante finale, all'uscita in data 01/06/2017, é dunque

$$0,98 \cdot C(1 + i_1 t_1) \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i_1 t_2),$$

ove $t_2 = 5/12$. L'equazione da impostare é alla fine

$$0,98 \cdot C(1 + i_1 t_1) \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i_1 t_2) = 1,02C.$$

Se dalla precedente formula si ricava i , si trova che

$$i = \sqrt{\frac{1,02}{0,98(1 + i_1 t_1)(1 + i_1 t_2)}} - 1 \cong 1,72\%.$$

Soluzione quarto quesito

L'equazione da impostare é la condizione di chiusura finanziaria, ossia

$$9843,75 = \frac{6000}{\sqrt{1+i}} + \frac{6000}{(1+i)}.$$

La suddetta equazione, con la sostituzione di variabile $v = 1/\sqrt{1+i}$, diventa di secondo grado, e l'unica soluzione finale accettabile é $i \cong 30,61\%$.

Soluzione quinto quesito

Siccome il prezzo di acquisto $A = 998$ è inferiore al nominale $N = 1000$, scatta l'imposta da versare al momento dell'acquisto, ossia $\alpha(N - A)$, con $\alpha = 0,115$. Tenuto conto che si deve pagare anche una commissione fissa c alla banca che negozia il titolo, la somma finale complessiva da versare è $A + \alpha(N - A) + c$. Senza fare molti calcoli, è evidente che il rendimento diventa negativo se e solo se il nominale che ci verrà restituito alla scadenza (qualunque essa sia) è superiore alla somma effettivamente pagata all'acquisto, dunque l'equazione da impostare è

$$A + \alpha(N - A) + c = N,$$

da cui si ricava facilmente che

$$c = (N - A) \cdot (1 - \alpha) = 1,77.$$

Soluzione sesto quesito

La rata R del piano alla francese è data da

$$R = D_0 \cdot \frac{i_m}{1 - (1 + i_m)^{-n}}, \quad (8)$$

ove $n = 120$, $i_m = 1,1\%$, mentre D_0 è il prestito iniziale. Dopo tre anni, ossia $k = 36$ rate mensili, cambia il tasso, quindi è come se si ricominciasse un nuovo piano alla francese con una nuova rata R^* , tasso $i'_m = 1\%$, durata pari a sei anni (perché si riduce la durata di un anno, quindi ne rimangono sei e non sette), ossia $p = 72$ rate mensili, e debito iniziale pari al debito residuo D_k , dato da

$$D_k = D_0 \cdot \frac{1 - (1 + i_m)^{-n+k}}{1 - (1 + i_m)^{-n}}. \quad (9)$$

La formula della rata di questo secondo piano, analogamente alla formula in eq. (22), è data da

$$R^* = D_k \cdot \frac{i'_m}{1 - (1 + i'_m)^{-p}}.$$

Se ora inseriamo nell'ultima formula quella dell'eq. (22), sostituendo D_k come nell'eq.(23), dopo qualche passaggio algebrico, si ha che

$$\frac{R^*}{R} = \frac{i'_m}{1 - (1 + i'_m)^{-72}} \cdot \frac{1 - (1 + i_m)^{-84}}{i_m}.$$

Inserendo i dati, si trova che

$$\frac{R^*}{R} \cong 1,0683,$$

quindi la nuova rata è superiore di circa il 7% alla vecchia.

Soluzione settimo quesito

Prima di tutto, bisogna determinare il rendimento di tale titolo, ossia il TIR. Il discounted cash-flow è dato da

$$G(x) = -1200 + \frac{548}{1+x} + \frac{728}{(1+x)^2}.$$

L'equazione algebrica $G(x) = 0$ è di secondo grado: se la risolvete nella variabile $v = 1/(1+x)$, dopo qualche semplificazione algebrica, risulterà

$$182v^2 + 137v - 300 = 0.$$

Tale equazione ammette una sola soluzione accettabile, ossia positiva, e, se poi ritornate alla variabile originaria, troverete che $x^* = 4\%$. Pertanto la duration di tale titolo è

$$D = \frac{\frac{548}{1,04} + \frac{728 \cdot 2}{(1,04)^2}}{1200} \simeq 1,561,$$

ossia diciotto mesi (per difetto).

Soluzione ottavo quesito

a) Si noti, dalla sequenza degli indici, che é presente inflazione nei primi due semestri, ma non nel terzo.

La formula piú generale che si può applicare, **qualunque sia l'andamento degli indici FOI semestre per semestre**, è

$$\alpha_j = \frac{M_j}{M_{j-1}} - 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (10)$$

ove gli indici M_j , per ogni j che va da 1 fino a n (si noti che, nel nostro caso, $n = 4$), sono calcolati ricorsivamente nel seguente modo:

$$\begin{cases} M_j = \max\{I_j, M_{j-1}\}, & j = 1, \dots, n; \\ M_0 = I_0. \end{cases}$$

Nel nostro caso, si ha dunque che $M_0 = 103$, $M_1 = 103,3$, $M_2 = 103,5$, mentre $M_3 = M_2 = 103,5$.

Tenete conto che le formule per calcolarsi la cedola c_j , il capitale rivalutato CR_j e la remunerazione semestrale RS_j sono le stesse sia in caso inflazione che di deflazione, ossia

$$\begin{cases} c_j = \frac{1}{2}iN(1 + \alpha_j); \\ CR_j = \alpha_j N \quad j = 1, 2, 3, 4; \\ RS_j = c_j + CR_j, \quad j = 1, 2, 3; \\ RS_4 = c_4 + CR_4 + 1,004 \cdot N. \end{cases} \quad (11)$$

In particolare, si noti che RS_4 tiene conto del premio fedeltá, sotto l'ipotesi che il titolo sia portato a scadenza.

Facendo tutti i calcoli e ricordandosi di approssimare i coefficienti α_j alla quinta cifra decimale, per $j = 1, 2, 3$, si ha che:

Epoche	α_j	CR_j	c_j	RS_j
1	0,00291	2,91	5,01	7,92
2	0,00194	1,94	5,01	6,95
3	0	0	5	5

Pertanto, il *cash-flow* dell'investimento, che denoteremo **A**, é dato da

$$a_0 = -1000, \quad a_1 = 7,92, \quad a_2 = 6,95, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 1009 + z,$$

ove si noti che a_4 comprende una parte certa, ossia la restituzione del nominale piú il premio fedeltá e la cedola minima classica pari a 5 euro, e una parte incerta, legata alla eventuale rivalutazione del quarto semestre, denotata con l'incognita z , ancora non conosciuta, perché dipende dall'indice I_4 , che al momento non possiamo conoscere, perché uscirá solo a marzo 2017. Si noti comunque che siccome a_4 , qui sopra scritta come $1009 + z$, altro non é che RS_4 come appare nell'eq. (25), si ricava facilmente che

$$z = 1005\alpha_4. \quad (12)$$

Il minimo rendimento possibile, detto r_m , si avrà ovviamente nel caso in cui anche nell'ultimo semestre non scatti il meccanismo di rivalutazione, in corrispondenza a $\alpha_4 = 0$, che comporta automaticamente $z = 0$ in base all'eq. (26). Pertanto, il *discounted cash-flow* del titolo nella peggiore prospettiva, denominato $G_{\text{Min}}(x)$, sarebbe

$$G_{\text{Min}}(x) = -1000 + \frac{7,92}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{6,95}{(1+x)} + \frac{5}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1009}{(1+x)^2}.$$

Considerate il fatto che non siete in grado di trovare la soluzione esatta, denotata appunto r_m , dell'equazione $G_{\text{Min}}(x) = 0$, che vi fornirebbe la risposta cercata, perché algebricamente troppo complicata (anche passando attraverso una opportuna sostituzione di variabile, avreste una equazione algebrica di quarto grado). Allora, ricordando che $G_{\text{Min}}(x)$ è una funzione strettamente decrescente, tale che $G_{\text{Min}}(x) > 0$ per $x < r_m$ e $G_{\text{Min}}(x) < 0$ per $x > r_m$, dobbiamo "testare il segno" di $G_{\text{Min}}(x)$ "buttandovi dentro" valori ragionevoli di x , rammentando che r_m é sicuramente superiore al tasso cedolare, quantomeno per il premio finale, e tenendo conto che il meccanismo di rivalutazione semestrale é scattato in due semestri, quindi ha senso considerare valori abbastanza superiori a i , anche se non eccessivamente. Se ad esempio inserite $r_1 = 1,4\%$, risulterà $G_{\text{Min}}(r_1) \simeq 0,946 > 0$, mentre con $r_2 = 1,5\%$ risulterà $G_{\text{Min}}(r_2) \simeq -1,004 < 0$, pertanto $r_1 < r_m < r_2$, con l'approssimazione richiesta.

b) Il *discounted cash-flow* del titolo é dato da

$$G(x) = -1000 + \frac{7,92}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{6,95}{(1+x)} + \frac{5}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1009+z}{(1+x)^2}.$$

Se desideriamo che il rendimento di tale titolo sia $r_3 = 1,8\%$ bisogna che r_3 sia il TIR di $G(x)$, ossia l'unica soluzione appartenente a $] -1, +\infty[$ dell'equazione $G(x) = 0$. Se inseriamo $r_3 = 0,018$ al posto di x ed eguagliamo a zero, si trova

$$z = 1000(1,018)^2 - 7,92(1,018)^{3/2} - 6,95(1,018) - 5\sqrt{1,018} - 1009.$$

Sfruttando poi l'eq. (26), ricaviamo direttamente che

$$\alpha_4 = \frac{1000(1,018)^2 - 7,92(1,018)^{3/2} - 6,95(1,018) - 5\sqrt{1,018} - 1009}{1005}. \quad (13)$$

Ricordandoci di calcolare α_4 con cinque cifre decimali, se é positivo, significa che nell'ultimo semestre é scattato il meccanismo di rivalutazione, quindi c'è stata inflazione per cui, in base alla formula data in eq. (24), l'indice I_4 si é alzato rispetto al valore massimo registrato fino al semestre precedente, ossia $I_4 > M_3 = 103,5$ e pertanto

$$I_4 = M_4 = (1 + \alpha_4) \cdot M_3 = (1 + \alpha_4) \cdot 103,5. \quad (14)$$

Alla fine della procedura descritta, quindi, attraverso l'eq. (27), l'eq. (28) ci fornisce il valore dell'indice I_4 relativo al tasso r_3 . Se ripetiamo il tutto con $r_4 = 2\%$ al posto di r_3 , troveremo un altro corrispondente I_4 (ovviamente superiore al precedente): tali due valori di I_4 sono quelli richiesti. In particolare, in corrispondenza di r_3 , le eqs. (27) e (28) ci forniscono rispettivamente $\alpha_4 = 0,00703$ e $I_4 = 104,23$, mentre in corrispondenza di r_4 , le eqs. (27) e (28) ci forniscono rispettivamente $\alpha_4 = 0,01105$ e $I_4 = 104,64$.

Soluzione quesito teorico

La scindibilità di un fattore di montante significa che la funzione $f(t)$ ad esso associata soddisfa la proprietà

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) \text{ per ogni } x, y > 0.$$

Nel nostro caso, si ha che

$$f(x) \cdot f(y) = (1+i)^{x-1} \cdot (1+i)^{y-1} = (1+i)^{x+y-2},$$

mentre

$$f(x+y) = (1+i)^{x+y-1} > (1+i)^{x+y-2},$$

quindi si verifica sempre che

$$f(x) \cdot f(y) < f(x+y).$$

Cognome

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nome

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

matricola

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Firma e indirizzo posta elettronica (solo per chi non si è registrato sul sito)

-----@-----

NOTA BENE: si accetta una sola correzione nel gruppo di quesiti 1-6

- Potete investire un credito C per un periodo superiore ai sei mesi a regime semplice a tasso $i = 2\%$ o a regime composto a tasso $i_1 = 2,01\%$. Possiamo dire che la seconda opzione é sempre preferibile?
(a) dipende dal periodo (b) sí, sempre (c) dipende dai tassi (d) no, mai
- Una banca capitalizza il primo gennaio di ogni anno le somme depositate e le fa crescere a regime composto a tasso i o a regime semplice a tasso $i_1 = 2,5\%$ a seconda che la giacenza sia superiore all'anno o meno. Inoltre, a partire dal primo gennaio 2017, trattiene ad ogni inizio di anno una commissione pari al 2% di quanto maturato fino a quel momento. Se depositate un capitale il 01/11/2014 da ritirare il 01/06/2017, trovare i per cui il montante risulti uguale al capitale iniziale aumentato del 2%.
(a) 1,10% (b) 1,33% (c) 1,62% (d) 1,28%
- Se versate un capitale in un conto corrente a regime semplice a tasso $i = 11\%$ in cui la banca ogni due mesi capitalizza ma contemporaneamente trattiene una commissione pari ad α volte la somma maturata, con $\alpha \in]0, 1[$, per quale massimo α_M siete sicuri di non diminuire il vostro capitale dopo sei mesi?
(a) $\alpha_M = 1,60\%$ (b) $\alpha_M = 1,80\%$ (c) $\alpha_M = 1,50\%$ (d) $\alpha_M = 1,70\%$
- Un B.O.T. di nominale $N = 1000\text{€}$ costa 998€. Se la banca tramite cui lo negoziate vi applica una commissione fissa c al momento dell'acquisto, sapendo che l'aliquota fiscale é pari ad $\alpha = 11,5\%$, oltre quale valore limite di c il rendimento netto diviene negativo?
(a) $c = 1,47\text{€}$ (b) $c = 1,97\text{€}$ (c) $c = 1,77\text{€}$ (d) $c = 1,37\text{€}$
- In un piano di ammortamento alla francese a rate mensili, durata pari a 10 anni e tasso mensile $i_m = 1,1\%$, dopo tre anni il tasso si porta a $i'_m = 1\%$. Se decidete di ridurre il piano di un anno, come é la nuova rata rispetto alla vecchia?
(a) le é superiore per circa il 4% (b) le é superiore per circa il 5% (c) le é superiore per circa il 7% (d) le é superiore per circa il 8%
- Un acquisto di un bene di 9843,75€ viene contrattato in 2 rate semestrali di 6000€. A quanto ammonta il tasso annuo?
(a) $i = 30,61\%$ (b) $i = 35,12\%$ (c) $i = 31,11\%$ (d) $i = 28,72\%$
- Un titolo presenta il seguente cash-flow:

$$\{(0; -1200), (1; 548), (2; 728)\}.$$

Determinare la *duration* di tale titolo esclusivamente in mesi (per difetto).

Risposta: $D = \dots\dots\dots$ mesi.

8. Un BTP Italia, emesso il primo marzo 2015, durata due anni, cedola semestrale a tasso cedolare $i = 1\%$, premio fedeltà al 4 per mille, viene acquistato per un nominale $N = 1000\text{€}$. La sequenza degli indici FOI già usciti, che indicheremo con I_j , $j = 0, 1, 2, 3$, è la seguente:

$$I_0 = 103, I_1 = 103,3, I_2 = 103,5, I_3 = 103,4.$$

In attesa dell'uscita dell'ultimo indice I_4 a marzo 2017, supponendo di tenere il titolo fino alla scadenza:

- determinare il minimo rendimento del titolo in percentuale, detto r_m , indipendentemente dal valore che uscirà di I_4 , con una approssimazione pari alla prima cifra decimale;
- determinare tra quali due valori deve uscire I_4 perché si abbia un rendimento compreso tra l'1,8% e il 2%.

Teoria

Dimostrare che il fattore di montante la cui funzione associata sia $f(t) = (1+i)^{t-1}$, ove $i > 0$, non è scindibile.

Soluzione primo quesito

Si noti che $\exp(i) - 1 \cong 0,02020134 > i_1$, quindi siamo nella situazione in cui la retta del regime semplice interseca la curva del composto in corrispondenza di una sola epoca $t^* > 0$. Inoltre, se si calcola il montante relativo al capitale di un euro a regime semplice al sesto mese, ossia per $t = 0,5$, si trova $M_s(0,5) = 1 + 0,5 \cdot 0,02 = 1,01$, mentre se si fa lo stesso a regime composto a tasso $i_1 = 2,01\%$, si ha che $M_c(0,5) = (1 + 0,0201)^{0,5} = 1,01$, ossia t^* é esattamente 0,5, pertanto, per qualunque durata superiore ai sei mesi prevale sempre il regime composto.

Soluzione secondo quesito

Il montante fino al primo gennaio 2017 é

$$C(1 + i_1 t_1) \cdot (1 + i)^2$$

ove $t_1 = 1/6$, mentre C é il capitale iniziale (dato che si rivelerá poi ininfluente). A questo punto, la banca si trattiene il 2% di tale somma, quindi rimane a maturare a regime semplice per cinque mesi solo il 98%. Il montante finale, all'uscita in data 01/06/2017, é dunque

$$0,98 \cdot C(1 + i_1 t_1) \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i_1 t_2),$$

ove $t_2 = 5/12$. L'equazione da impostare é alla fine

$$0,98 \cdot C(1 + i_1 t_1) \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i_1 t_2) = 1,02C.$$

Se dalla precedente formula si ricava i , si trova che

$$i = \sqrt{\frac{1,02}{0,98(1 + i_1 t_1)(1 + i_1 t_2)}} - 1 \cong 1,28\%.$$

Soluzione terzo quesito

Chiamando C il capitale versato sul conto corrente, dopo due mesi vi rimane

$$(1 - \alpha)C \left(1 + \frac{i}{6}\right).$$

Nei successivi due mesi, si capitalizza quella somma, poi le si toglie una percentuale pari ad α ossia rimane

$$(1 - \alpha) \left((1 - \alpha)C \left(1 + \frac{i}{6}\right) \right) \left(1 + \frac{i}{6}\right) = (1 - \alpha)^2 \cdot C \left(1 + \frac{i}{6}\right)^2.$$

Analogamente, nei successivi due mesi, quindi dopo sei mesi complessivi, la somma che rimane é

$$(1 - \alpha)^3 \cdot C \left(1 + \frac{i}{6}\right)^3.$$

Il massimo α é quello in corrispondenza del quale la suddetta quantità é uguale a C , ossia si deve risolvere l'equazione

$$(1 - \alpha_M)^3 \cdot C \left(1 + \frac{i}{6}\right)^3 = C$$

che ha come soluzione

$$\alpha_M = \frac{i/6}{1 + i/6}.$$

Inserendo i dati, si trova che α_M é pari circa a 1,80%.

Soluzione quarto quesito

Siccome il prezzo di acquisto $A = 998$ é inferiore al nominale $N = 1000$, scatta l'imposta da versare al momento dell'acquisto, ossia $\alpha(N - A)$, con $\alpha = 0,115$. Tenuto conto che si deve pagare anche una commissione fissa c alla banca che negozia il titolo, la somma finale complessiva da versare é $A + \alpha(N - A) + c$. Senza fare molti calcoli, é evidente che il rendimento diventa negativo se e solo se il nominale che ci verrà restituito alla scadenza (qualunque essa sia) é superiore alla somma effettivamente pagata all'acquisto, dunque l'equazione da impostare é

$$A + \alpha(N - A) + c = N,$$

da cui si ricava facilmente che

$$c = (N - A) \cdot (1 - \alpha) = 1,77.$$

Soluzione quinto quesito

La rata R del piano alla francese é data da

$$R = D_0 \cdot \frac{i_m}{1 - (1 + i_m)^{-n}}, \quad (15)$$

ove $n = 120$, $i_m = 1,1\%$, mentre D_0 é il prestito iniziale. Dopo tre anni, ossia $k = 36$ rate mensili, cambia il tasso, quindi é come se si ricominciasse un nuovo piano alla francese con una nuova rata R^* , tasso $i'_m = 1\%$, durata pari a sei anni (perché si riduce la durata di un anno, quindi ne rimangono sei e non sette), ossia $p = 72$ rate mensili, e debito iniziale pari al debito residuo D_k , dato da

$$D_k = D_0 \cdot \frac{1 - (1 + i_m)^{-n+k}}{1 - (1 + i_m)^{-n}}. \quad (16)$$

La formula della rata di questo secondo piano, analogamente alla formula in eq. (22), è data da

$$R^* = D_k \cdot \frac{i'_m}{1 - (1 + i'_m)^{-p}}.$$

Se ora inseriamo nell'ultima formula quella dell'eq. (22), sostituendo D_k come nell'eq.(23), dopo qualche passaggio algebrico, si ha che

$$\frac{R^*}{R} = \frac{i'_m}{1 - (1 + i'_m)^{-72}} \cdot \frac{1 - (1 + i_m)^{-84}}{i_m}.$$

Inserendo i dati, si trova che

$$\frac{R^*}{R} \cong 1,0683,$$

quindi la nuova rata é superiore di circa il 7% alla vecchia.

Soluzione sesto quesito

L'equazione da impostare é la condizione di chiusura finanziaria, ossia

$$9843,75 = \frac{6000}{\sqrt{1+i}} + \frac{6000}{(1+i)}.$$

La suddetta equazione, con la sostituzione di variabile $v = 1/\sqrt{1+i}$, diventa di secondo grado, e l'unica soluzione finale accettabile é $i \cong 30,61\%$.

Soluzione settimo quesito

Prima di tutto, bisogna determinare il rendimento di tale titolo, ossia il TIR. Il discounted cash-flow è dato da

$$G(x) = -1200 + \frac{548}{1+x} + \frac{728}{(1+x)^2}.$$

L'equazione algebrica $G(x) = 0$ è di secondo grado: se la risolvete nella variabile $v = 1/(1+x)$, dopo qualche semplificazione algebrica, risulterà

$$182v^2 + 137v - 300 = 0.$$

Tale equazione ammette una sola soluzione accettabile, ossia positiva, e, se poi ritornate alla variabile originaria, troverete che $x^* = 4\%$. Pertanto la duration di tale titolo è

$$D = \frac{\frac{548}{1,04} + \frac{728 \cdot 2}{(1,04)^2}}{1200} \simeq 1,561,$$

ossia diciotto mesi (per difetto).

Soluzione ottavo quesito

a) Si noti, dalla sequenza degli indici, che é presente inflazione nei primi due semestri, ma non nel terzo.

La formula piú generale che si può applicare, **qualunque sia l'andamento degli indici FOI semestre per semestre**, è

$$\alpha_j = \frac{M_j}{M_{j-1}} - 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (17)$$

ove gli indici M_j , per ogni j che va da 1 fino a n (si noti che, nel nostro caso, $n = 4$), sono calcolati ricorsivamente nel seguente modo:

$$\begin{cases} M_j = \max\{I_j, M_{j-1}\}, & j = 1, \dots, n; \\ M_0 = I_0. \end{cases}$$

Nel nostro caso, si ha dunque che $M_0 = 103$, $M_1 = 103,3$, $M_2 = 103,5$, mentre $M_3 = M_2 = 103,5$.

Tenete conto che le formule per calcolarsi la cedola c_j , il capitale rivalutato CR_j e la remunerazione semestrale RS_j sono le stesse sia in caso inflazione che di deflazione, ossia

$$\begin{cases} c_j = \frac{1}{2}iN(1 + \alpha_j); \\ CR_j = \alpha_j N & j = 1, 2, 3, 4; \\ RS_j = c_j + CR_j, & j = 1, 2, 3; \\ RS_4 = c_4 + CR_4 + 1,004 \cdot N. \end{cases} \quad (18)$$

In particolare, si noti che RS_4 tiene conto del premio fedeltà, sotto l'ipotesi che il titolo sia portato a scadenza.

Facendo tutti i calcoli e ricordandosi di approssimare i coefficienti α_j alla quinta cifra decimale, per $j = 1, 2, 3$, si ha che:

Epoche	α_j	CR_j	c_j	RS_j
1	0,00291	2,91	5,01	7,92
2	0,00194	1,94	5,01	6,95
3	0	0	5	5

Pertanto, il *cash-flow* dell'investimento, che denoteremo A , è dato da

$$a_0 = -1000, \quad a_1 = 7,92, \quad a_2 = 6,95, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 1009 + z,$$

ove si noti che a_4 comprende una parte certa, ossia la restituzione del nominale più il premio fedeltà e la cedola minima classica pari a 5 euro, e una parte incerta, legata alla eventuale rivalutazione del quarto semestre, denotata con l'incognita z , ancora non conosciuta, perché dipende dall'indice I_4 , che al momento non possiamo conoscere, perché uscirà solo a marzo 2017. Si noti comunque che siccome a_4 , qui sopra scritta come $1009 + z$, altro non è che RS_4 come appare nell'eq. (25), si ricava facilmente che

$$z = 1005\alpha_4. \quad (19)$$

Il minimo rendimento possibile, detto r_m , si avrà ovviamente nel caso in cui anche nell'ultimo semestre non scatti il meccanismo di rivalutazione, in corrispondenza a $\alpha_4 = 0$, che comporta automaticamente $z = 0$ in base all'eq. (26). Pertanto, il *discounted cash-flow* del titolo nella peggiore prospettiva, denominato $G_{\text{Min}}(x)$, sarebbe

$$G_{\text{Min}}(x) = -1000 + \frac{7,92}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{6,95}{(1+x)} + \frac{5}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1009}{(1+x)^2}.$$

Considerate il fatto che non siete in grado di trovare la soluzione esatta, denotata appunto r_m , dell'equazione $G_{\text{Min}}(x) = 0$, che vi fornirebbe la risposta cercata, perché algebricamente troppo complicata (anche passando attraverso una opportuna sostituzione di variabile, avreste una equazione algebrica di quarto grado). Allora, ricordando che $G_{\text{Min}}(x)$ è una funzione strettamente decrescente, tale che $G_{\text{Min}}(x) > 0$ per $x < r_m$ e $G_{\text{Min}}(x) < 0$ per $x > r_m$, dobbiamo "testare il segno" di $G_{\text{Min}}(x)$ "buttandovi dentro" valori ragionevoli di x , rammentando che r_m è sicuramente superiore al tasso cedolare, quantomeno per il premio finale, e tenendo conto che il meccanismo di rivalutazione semestrale è scattato in due semestri, quindi ha senso considerare valori abbastanza superiori a i , anche se non eccessivamente. Se ad esempio inserite $r_1 = 1,4\%$, risulterà $G_{\text{Min}}(r_1) \simeq 0,946 > 0$, mentre con $r_2 = 1,5\%$ risulterà $G_{\text{Min}}(r_2) \simeq -1,004 < 0$, pertanto $r_1 < r_m < r_2$, con l'approssimazione richiesta.

b) Il *discounted cash-flow* del titolo è dato da

$$G(x) = -1000 + \frac{7,92}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{6,95}{(1+x)} + \frac{5}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1009+z}{(1+x)^2}.$$

Se desideriamo che il rendimento di tale titolo sia $r_3 = 1,8\%$ bisogna che r_3 sia il TIR di $G(x)$, ossia l'unica soluzione appartenente a $] -1, +\infty[$ dell'equazione $G(x) = 0$. Se inseriamo $r_3 = 0,018$ al posto di x ed eguagliamo a zero, si trova

$$z = 1000(1,018)^2 - 7,92(1,018)^{3/2} - 6,95(1,018) - 5\sqrt{1,018} - 1009.$$

Sfruttando poi l'eq. (26), ricaviamo direttamente che

$$\alpha_4 = \frac{1000(1,018)^2 - 7,92(1,018)^{3/2} - 6,95(1,018) - 5\sqrt{1,018} - 1009}{1005}. \quad (20)$$

Ricordandoci di calcolare α_4 con cinque cifre decimali, se è positivo, significa che nell'ultimo semestre è scattato il meccanismo di rivalutazione, quindi c'è stata inflazione per cui, in base alla formula data in eq. (24), l'indice I_4 si è alzato rispetto al valore massimo registrato fino al semestre precedente, ossia $I_4 > M_3 = 103,5$ e pertanto

$$I_4 = M_4 = (1 + \alpha_4) \cdot M_3 = (1 + \alpha_4) \cdot 103,5. \quad (21)$$

Alla fine della procedura descritta, quindi, attraverso l'eq. (27), l'eq. (28) ci fornisce il valore dell'indice I_4 relativo al tasso r_3 . Se ripetiamo il tutto con $r_4 = 2\%$ al posto di r_3 , troveremo un altro corrispondente I_4 (ovviamente superiore al precedente): tali due valori di I_4 sono quelli richiesti. In particolare, in corrispondenza di r_3 , le eqs. (27) e (28) ci forniscono rispettivamente $\alpha_4 = 0,00703$ e $I_4 = 104,23$, mentre in corrispondenza di r_4 , le eqs. (27) e (28) ci forniscono rispettivamente $\alpha_4 = 0,01105$ e $I_4 = 104,64$.

Soluzione quesito teorico

La scindibilità di un fattore di montante significa che la funzione $f(t)$ ad esso associata soddisfa la proprietà

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) \text{ per ogni } x, y > 0.$$

Nel nostro caso, si ha che

$$f(x) \cdot f(y) = (1+i)^{x-1} \cdot (1+i)^{y-1} = (1+i)^{x+y-2},$$

mentre

$$f(x+y) = (1+i)^{x+y-1} > (1+i)^{x+y-2},$$

quindi si verifica sempre che

$$f(x) \cdot f(y) < f(x+y).$$

Cognome

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nome

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

matricola

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Firma e indirizzo posta elettronica (solo per chi non si è registrato sul sito)

@

NOTA BENE: si accetta una sola correzione nel gruppo di quesiti 1-6

- In un piano di ammortamento alla francese a rate mensili, durata pari a 10 anni e tasso mensile $i_m = 1,1\%$, dopo tre anni il tasso si porta a $i'_m = 1\%$. Se decidete di ridurre il piano di un anno, come è la nuova rata rispetto alla vecchia?
(a) le è superiore per circa il 5% (b) le è superiore per circa il 4% (c) le è superiore per circa il 8% (d) le è superiore per circa il 7%
- Un acquisto di un bene di 9843,75€ viene contrattato in 2 rate semestrali di 6000€. A quanto ammonta il tasso annuo?
(a) $i = 35,12\%$ (b) $i = 30,61\%$ (c) $i = 31,11\%$ (d) $i = 28,72\%$
- Potete investire un credito C per un periodo superiore ai sei mesi a regime semplice a tasso $i = 2\%$ o a regime composto a tasso $i_1 = 2,01\%$. Possiamo dire che la seconda opzione è sempre preferibile?
(a) dipende dal periodo (b) dipende dai tassi (c) no, mai (d) sí, sempre
- Una banca capitalizza il primo gennaio di ogni anno le somme depositate e le fa crescere a regime composto a tasso i o a regime semplice a tasso $i_1 = 3,5\%$ a seconda che la giacenza sia superiore all'anno o meno. Inoltre, a partire dal primo gennaio 2017, trattiene ad ogni inizio di anno una commissione pari al 2% di quanto maturato fino a quel momento. Se depositate un capitale il 01/11/2014 da ritirare il 01/06/2017, trovare i per cui il montante risulti uguale al capitale iniziale aumentato del 2%.
(a) 0,87% (b) 0,65% (c) 0,99% (d) 0,76%
- Se versate un capitale in un conto corrente a regime semplice a tasso $i = 14\%$ in cui la banca ogni due mesi capitalizza ma contemporaneamente trattiene una commissione pari ad α volte la somma maturata, con $\alpha \in]0, 1[$, per quale massimo α_M siete sicuri di non diminuire il vostro capitale dopo sei mesi?
(a) $\alpha_M = 1,99\%$ (b) $\alpha_M = 2,50\%$ (c) $\alpha_M = 2,45\%$ (d) $\alpha_M = 2,28\%$
- Un B.O.T. di nominale $N = 1000\text{€}$ costa 998€. Se la banca tramite cui lo negoziate vi applica una commissione fissa c al momento dell'acquisto, sapendo che l'aliquota fiscale è pari ad $\alpha = 11,5\%$, oltre quale valore limite di c il rendimento netto diviene negativo?
(a) $c = 1,77\text{€}$ (b) $c = 1,97\text{€}$ (c) $c = 1,47\text{€}$ (d) $c = 1,37\text{€}$
- Un titolo presenta il seguente cash-flow:

$$\{(0; -1200), (1; 548), (2; 728)\}.$$

Determinare la *duration* di tale titolo esclusivamente in mesi (per difetto).

Risposta: $D = \dots\dots\dots$ mesi.

8. Un BTP Italia, emesso il primo marzo 2015, durata due anni, cedola semestrale a tasso cedolare $i = 1\%$, premio fedeltà al 4 per mille, viene acquistato per un nominale $N = 1000\text{€}$. La sequenza degli indici FOI già usciti, che indicheremo con I_j , $j = 0, 1, 2, 3$, è la seguente:

$$I_0 = 103, I_1 = 103,3, I_2 = 103,5, I_3 = 103,4.$$

In attesa dell'uscita dell'ultimo indice I_4 a marzo 2017, supponendo di tenere il titolo fino alla scadenza:

- determinare il minimo rendimento del titolo in percentuale, detto r_m , indipendentemente dal valore che uscirà di I_4 , con una approssimazione pari alla prima cifra decimale;
- determinare tra quali due valori deve uscire I_4 perché si abbia un rendimento compreso tra l'1,8% e il 2%.

Teoria

Dimostrare che il fattore di montante la cui funzione associata sia $f(t) = (1+i)^{t-1}$, ove $i > 0$, non è scindibile.

Soluzione primo quesito

La rata R del piano alla francese é data da

$$R = D_0 \cdot \frac{i_m}{1 - (1 + i_m)^{-n}}, \quad (22)$$

ove $n = 120$, $i_m = 1,1\%$, mentre D_0 é il prestito iniziale. Dopo tre anni, ossia $k = 36$ rate mensili, cambia il tasso, quindi é come se si ricominciasse un nuovo piano alla francese con una nuova rata R^* , tasso $i'_m = 1\%$, durata pari a sei anni (perché si riduce la durata di un anno, quindi ne rimangono sei e non sette), ossia $p = 72$ rate mensili, e debito iniziale pari al debito residuo D_k , dato da

$$D_k = D_0 \cdot \frac{1 - (1 + i_m)^{-n+k}}{1 - (1 + i_m)^{-n}}. \quad (23)$$

La formula della rata di questo secondo piano, analogamente alla formula in eq. (22), é data da

$$R^* = D_k \cdot \frac{i'_m}{1 - (1 + i'_m)^{-p}}.$$

Se ora inseriamo nell'ultima formula quella dell'eq. (22), sostituendo D_k come nell'eq.(23), dopo qualche passaggio algebrico, si ha che

$$\frac{R^*}{R} = \frac{i'_m}{1 - (1 + i'_m)^{-72}} \cdot \frac{1 - (1 + i_m)^{-84}}{i_m}.$$

Inserendo i dati, si trova che

$$\frac{R^*}{R} \cong 1,0683,$$

quindi la nuova rata é superiore di circa il 7% alla vecchia.

Soluzione secondo quesito

L'equazione da impostare é la condizione di chiusura finanziaria, ossia

$$9843,75 = \frac{6000}{\sqrt{1+i}} + \frac{6000}{(1+i)}.$$

La suddetta equazione, con la sostituzione di variabile $v = 1/\sqrt{1+i}$, diventa di secondo grado, e l'unica soluzione finale accettabile é $i \cong 30,61\%$.

Soluzione terzo quesito

Si noti che $\exp(i) - 1 \cong 0,02020134 > i_1$, quindi siamo nella situazione in cui la retta del regime semplice interseca la curva del composto in corrispondenza di una sola epoca $t^* > 0$. Inoltre, se si calcola il montante relativo al capitale di un euro a regime semplice al sesto mese, ossia per $t = 0,5$, si trova $M_s(0,5) = 1 + 0,5 \cdot 0,02 = 1,01$, mentre se si fa lo stesso a regime composto a tasso $i_1 = 2,01\%$, si ha che $M_c(0,5) = (1 + 0,0201)^{0,5} = 1,01$, ossia t^* é esattamente 0,5, pertanto, per qualunque durata superiore ai sei mesi prevale sempre il regime composto.

Soluzione quarto quesito

Il montante fino al primo gennaio 2017 é

$$C(1 + i_1 t_1) \cdot (1 + i)^2$$

ove $t_1 = 1/6$, mentre C é il capitale iniziale (dato che si rivelerá poi ininfluente). A questo punto, la banca si trattiene il 2% di tale somma, quindi rimane a maturare a regime semplice per cinque mesi solo il 98%. Il montante finale, all'uscita in data 01/06/2017, é dunque

$$0,98 \cdot C(1 + i_1 t_1) \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i_1 t_2),$$

ove $t_2 = 5/12$. L'equazione da impostare é alla fine

$$0,98 \cdot C(1 + i_1 t_1) \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i_1 t_2) = 1,02C.$$

Se dalla precedente formula si ricava i , si trova che

$$i = \sqrt{\frac{1,02}{0,98(1 + i_1 t_1)(1 + i_1 t_2)}} - 1 \cong 0,99\%.$$

Soluzione quinto quesito

Chiamando C il capitale versato sul conto corrente, dopo due mesi vi rimane

$$(1 - \alpha)C \left(1 + \frac{i}{6}\right).$$

Nei successivi due mesi, si capitalizza quella somma, poi le si toglie una percentuale pari ad α ossia rimane

$$(1 - \alpha) \left((1 - \alpha)C \left(1 + \frac{i}{6}\right) \right) \left(1 + \frac{i}{6}\right) = (1 - \alpha)^2 \cdot C \left(1 + \frac{i}{6}\right)^2.$$

Analogamente, nei successivi due mesi, quindi dopo sei mesi complessivi, la somma che rimane é

$$(1 - \alpha)^3 \cdot C \left(1 + \frac{i}{6}\right)^3.$$

Il massimo α é quello in corrispondenza del quale la suddetta quantità é uguale a C , ossia si deve risolvere l'equazione

$$(1 - \alpha_M)^3 \cdot C \left(1 + \frac{i}{6}\right)^3 = C$$

che ha come soluzione

$$\alpha_M = \frac{i/6}{1 + i/6}.$$

Inserendo i dati, si trova che α_M é pari circa a 2,28%.

Soluzione sesto quesito

Siccome il prezzo di acquisto $A = 998$ é inferiore al nominale $N = 1000$, scatta l'imposta da versare al momento dell'acquisto, ossia $\alpha(N - A)$, con $\alpha = 0,115$. Tenuto conto che si deve pagare anche una commissione fissa c alla banca che negozia il titolo, la somma finale complessiva da versare é $A + \alpha(N - A) + c$. Senza fare molti calcoli, é evidente che il rendimento diventa negativo se e solo se il nominale che ci verrà restituito alla scadenza (qualunque essa sia) é superiore alla somma effettivamente pagata all'acquisto, dunque l'equazione da impostare é

$$A + \alpha(N - A) + c = N,$$

da cui si ricava facilmente che

$$c = (N - A) \cdot (1 - \alpha) = 1,77.$$

Soluzione settimo quesito

Prima di tutto, bisogna determinare il rendimento di tale titolo, ossia il TIR. Il discounted cash-flow é dato da

$$G(x) = -1200 + \frac{548}{1+x} + \frac{728}{(1+x)^2}.$$

L'equazione algebrica $G(x) = 0$ é di secondo grado: se la risolvete nella variabile $v = 1/(1+x)$, dopo qualche semplificazione algebrica, risulterà

$$182v^2 + 137v - 300 = 0.$$

Tale equazione ammette una sola soluzione accettabile, ossia positiva, e, se poi ritornate alla variabile originaria, troverete che $x^* = 4\%$. Pertanto la duration di tale titolo é

$$D = \frac{\frac{548}{1,04} + \frac{728 \cdot 2}{(1,04)^2}}{1200} \simeq 1,561,$$

ossia diciotto mesi (per difetto).

Soluzione ottavo quesito

a) Si noti, dalla sequenza degli indici, che é presente inflazione nei primi due semestri, ma non nel terzo.

La formula piú generale che si può applicare, **qualunque sia l'andamento degli indici FOI semestre per semestre**, é

$$\alpha_j = \frac{M_j}{M_{j-1}} - 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (24)$$

ove gli indici M_j , per ogni j che va da 1 fino a n (si noti che, nel nostro caso, $n = 4$), sono calcolati ricorsivamente nel seguente modo:

$$\begin{cases} M_j = \max\{I_j, M_{j-1}\}, & j = 1, \dots, n; \\ M_0 = I_0. \end{cases}$$

Nel nostro caso, si ha dunque che $M_0 = 103$, $M_1 = 103,3$, $M_2 = 103,5$, mentre $M_3 = M_2 = 103,5$.

Tenete conto che le formule per calcolarsi la cedola c_j , il capitale rivalutato CR_j e la remunerazione semestrale RS_j sono le stesse sia in caso inflazione che di deflazione, ossia

$$\begin{cases} c_j = \frac{1}{2}iN(1 + \alpha_j); \\ CR_j = \alpha_j N & j = 1, 2, 3, 4; \\ RS_j = c_j + CR_j, & j = 1, 2, 3; \\ RS_4 = c_4 + CR_4 + 1,004 \cdot N. \end{cases} \quad (25)$$

In particolare, si noti che RS_4 tiene conto del premio fedeltà, sotto l'ipotesi che il titolo sia portato a scadenza.

Facendo tutti i calcoli e ricordandosi di approssimare i coefficienti α_j alla quinta cifra decimale, per $j = 1, 2, 3$, si ha che:

Epoche	α_j	CR_j	c_j	RS_j
1	0,00291	2,91	5,01	7,92
2	0,00194	1,94	5,01	6,95
3	0	0	5	5

Pertanto, il *cash-flow* dell'investimento, che denoteremo A , è dato da

$$a_0 = -1000, \quad a_1 = 7,92, \quad a_2 = 6,95, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 1009 + z,$$

ove si noti che a_4 comprende una parte certa, ossia la restituzione del nominale più il premio fedeltà e la cedola minima classica pari a 5 euro, e una parte incerta, legata alla eventuale rivalutazione del quarto semestre, denotata con l'incognita z , ancora non conosciuta, perché dipende dall'indice I_4 , che al momento non possiamo conoscere, perché uscirà solo a marzo 2017. Si noti comunque che siccome a_4 , qui sopra scritta come $1009 + z$, altro non è che RS_4 come appare nell'eq. (25), si ricava facilmente che

$$z = 1005\alpha_4. \quad (26)$$

Il minimo rendimento possibile, detto r_m , si avrà ovviamente nel caso in cui anche nell'ultimo semestre non scatti il meccanismo di rivalutazione, in corrispondenza a $\alpha_4 = 0$, che comporta automaticamente $z = 0$ in base all'eq. (26). Pertanto, il *discounted cash-flow* del titolo nella peggiore prospettiva, denominato $G_{\text{Min}}(x)$, sarebbe

$$G_{\text{Min}}(x) = -1000 + \frac{7,92}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{6,95}{(1+x)} + \frac{5}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1009}{(1+x)^2}.$$

Considerate il fatto che non siete in grado di trovare la soluzione esatta, denotata appunto r_m , dell'equazione $G_{\text{Min}}(x) = 0$, che vi fornirebbe la risposta cercata, perché algebricamente troppo complicata (anche passando attraverso una opportuna sostituzione di variabile, avreste una equazione algebrica di quarto grado). Allora, ricordando che $G_{\text{Min}}(x)$ è una funzione strettamente decrescente, tale che $G_{\text{Min}}(x) > 0$ per $x < r_m$ e $G_{\text{Min}}(x) < 0$ per $x > r_m$, dobbiamo "testare il segno" di $G_{\text{Min}}(x)$ "buttandovi dentro" valori ragionevoli di x , rammentando che r_m è sicuramente superiore al tasso cedolare, quantomeno per il premio finale, e tenendo conto che il meccanismo di rivalutazione semestrale è scattato in due semestri, quindi ha senso considerare valori abbastanza superiori a i , anche se non eccessivamente. Se ad esempio inserite $r_1 = 1,4\%$, risulterà $G_{\text{Min}}(r_1) \simeq 0,946 > 0$, mentre con $r_2 = 1,5\%$ risulterà $G_{\text{Min}}(r_2) \simeq -1,004 < 0$, pertanto $r_1 < r_m < r_2$, con l'approssimazione richiesta.

b) Il *discounted cash-flow* del titolo è dato da

$$G(x) = -1000 + \frac{7,92}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{6,95}{(1+x)} + \frac{5}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1009+z}{(1+x)^2}.$$

Se desideriamo che il rendimento di tale titolo sia $r_3 = 1,8\%$ bisogna che r_3 sia il TIR di $G(x)$, ossia l'unica soluzione appartenente a $] -1, +\infty[$ dell'equazione $G(x) = 0$. Se inseriamo $r_3 = 0,018$ al posto di x ed eguagliamo a zero, si trova

$$z = 1000(1,018)^2 - 7,92(1,018)^{3/2} - 6,95(1,018) - 5\sqrt{1,018} - 1009.$$

Sfruttando poi l'eq. (26), ricaviamo direttamente che

$$\alpha_4 = \frac{1000(1,018)^2 - 7,92(1,018)^{3/2} - 6,95(1,018) - 5\sqrt{1,018} - 1009}{1005}. \quad (27)$$

Ricordandoci di calcolare α_4 con cinque cifre decimali, se è positivo, significa che nell'ultimo semestre è scattato il meccanismo di rivalutazione, quindi c'è stata inflazione per cui, in base alla formula data in eq. (24), l'indice I_4 si è alzato rispetto al valore massimo registrato fino al semestre precedente, ossia $I_4 > M_3 = 103,5$ e pertanto

$$I_4 = M_4 = (1 + \alpha_4) \cdot M_3 = (1 + \alpha_4) \cdot 103,5. \quad (28)$$

Alla fine della procedura descritta, quindi, attraverso l'eq. (27), l'eq. (28) ci fornisce il valore dell'indice I_4 relativo al tasso r_3 . Se ripetiamo il tutto con $r_4 = 2\%$ al posto di r_3 , troveremo un altro corrispondente I_4 (ovviamente superiore al precedente): tali due valori di I_4 sono quelli richiesti. In particolare, in corrispondenza di r_3 , le eqs. (27) e (28) ci forniscono rispettivamente $\alpha_4 = 0,00703$ e $I_4 = 104,23$, mentre in corrispondenza di r_4 , le eqs. (27) e (28) ci forniscono rispettivamente $\alpha_4 = 0,01105$ e $I_4 = 104,64$.

Soluzione quesito teorico

La scindibilità di un fattore di montante significa che la funzione $f(t)$ ad esso associata soddisfa la proprietà

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) \text{ per ogni } x, y > 0.$$

Nel nostro caso, si ha che

$$f(x) \cdot f(y) = (1+i)^{x-1} \cdot (1+i)^{y-1} = (1+i)^{x+y-2},$$

mentre

$$f(x+y) = (1+i)^{x+y-1} > (1+i)^{x+y-2},$$

quindi si verifica sempre che

$$f(x) \cdot f(y) < f(x+y).$$