ESERCIZI DI MATEMATICA FINANZIARIA
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E MANAGEMENT UNIFE
A.A. 2016/2017

Esercizi svolti a lezione (dicembre 2016)

Valutazioni di operazioni finanziarie

Esercizio 1. Un titolo con vita residua di 18 mesi, acquistato per un nominale pari a N, paga cedole annuali con tasso cedolare $i > 0$. Determinare quanto può essere al massimo il *corso secco* del titolo affinché il rendimento sia positivo.

Soluzione. Il valore della cedola del titolo è pari a $c = N \cdot i$. Il titolo prevede la corresponsione di una cedola fra 6 mesi e di un'altra cedola fra un anno e mezzo, unitamente al rimborso del valore nominale. Quindi

$$G(x) = -C_{tq} + \frac{iN}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{iN+N}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Poiché il rendimento r è il TIR dell'investimento, abbiamo che

$$-C_{tq} + \frac{iN}{(1+r)^{\frac{1}{2}}} + \frac{iN+N}{(1+r)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

da cui otteniamo che il *corso tel quel* del titolo è

$$C_{tq} = \frac{iN}{(1+r)^{\frac{1}{2}}} + \frac{iN+N}{(1+r)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il *corso secco* del titolo si ottiene scorporando dal suo *corso tel quel* una quota della cedola, ossia il rateo della cedola. Poiché il periodo di maturazione della cedola non di competenza dell'acquirente del titolo è di 6 mesi (esattamente la metà), il rateo è pari a

$$RT = c \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} i\, N,$$

quindi il *corso secco* del titolo è pari a

$$C_s = C_{tq} - RT = \frac{iN}{(1+r)^{\frac{1}{2}}} + \frac{iN+N}{(1+r)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2} i\, N.$$

Consideriamo il corso secco come funzione del rendimento r, con $r \geq 0$:

$$C_s(r) = \frac{iN}{(1+r)^{\frac{1}{2}}} + \frac{iN+N}{(1+r)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2} i\, N.$$

Tale funzione è evidentemente strettamente decrescente su tutto il dominio (si vede facilmente che $C'_s(r) < 0$ per ogni $r \geq 0$), dunque $C_s(r)$ ammette il suo massimo valore proprio in corrispondenza del minimo valore (limite) accettabile di r, ossia quando $r = 0$. Pertanto, essendo

$$C_s(r) < C_s(0) = N \cdot \Big(1 + \frac{3}{2}i\Big),$$

per ogni $r > 0$, il corso secco non puó mai raggiungere il valore limite $N(1 + \frac{3}{2}i)$. Tanto per fissare le idee, se $N = 100$ e $i = 10\%$, allora il massimo valore (limite) del corso secco di un tale titolo sarebbe pari a 115 euro.

Esercizio 2. Un investimento biennale è descritto dal seguente *cash-flow*

$$\{(0, -10000); (1, 8000); (2, 6500)\}.$$

a) Determinare il *TIR* dell'investimento;
b) se i costi opportunitá sono $i_1 = 20\%$ nel primo anno e $i_2 = 25\%$ nel secondo, si determini il GVAN dell'investimento;
c) determinare le due quote di periodo g_1 e g_2 che scompongono il GVAN trovato al punto precedente in funzione dell'outstanding capital non ricorsivo w relativo alla data $t = 1$ e verifcare che la loro somma dia effettivamente il GVAN trovato al punto precedente.

Soluzione.

a) Per il calcolo del TIR, si imposta l'equazione

$$-10000 + \frac{8000}{1+x} + \frac{6500}{(1+x)^2} = 0,$$

nella variabile $x > -1$. L'unica soluzione accettabile (si può facilmente scrivere come una equazione di secondo grado) è $x^* = 30\%$.

b) Il GVAN richiesto è dato da

$$GVAN = -10000 + \frac{8000}{1,2} + \frac{6500}{1,2 \cdot 1,25} = 1000 > 0,$$

il che significa che a quei costi opportunità l'investimento è conveniente, perché garantisce un pulsvalore di 1000 euro.

c) Ricordando che la formula generale della quota di periodo k-esima del VAN di un qualunque investimento A a costo opportunitá i è data da

$$g_k(i) = \frac{w_k + a_k - w_{k-1}(1+i)}{(1+i)^k},$$

e tenendo conto del fatto che dobbiamo adattarla perché noi in questo caso abbiamo a che fare con un GVAN, si ha che le due quote di periodo $g_1(i_1)$ e $g_2(i_1, i_2)$, che scompongono il GVAN trovato al punto precedente, tenendo conto che l'outstanding capital all'epoca $t = 1$ è genericamente w, sono date da

$$g_1(i_1) = \frac{w - 4000}{1,2}, \qquad g_2(i_1, i_2) = \frac{6500 - 1,25\,w}{(1,2)(1,25)}.$$

Verificate che effettivamente $g_1 + g_2 = 1000$, comunque sia scelto w.

Durata Media Finanziaria (Duration)

Esercizio 3. Un titolo in scadenza tra 2 anni paga una cedola di importo aleatorio tra un anno e un importo sicuro finale di 309€. Supponendo di richiedere a tale titolo un rendimento del 3%, a quanto dovrebbe ammontare la cedola del primo anno se desiderate che la *duration* sia esattamente di un anno e mezzo?

Soluzione. Il titolo è descritto dal seguente DCF:

$$G(x) = -P + \frac{c}{1+x} + \frac{309}{(1+x)^2}.$$

Poiché il rendimento richiesto del 3% coincide con il TIR dell'investimento, abbiamo che

$$-P + \frac{c}{1,03} + \frac{309}{(1,03)^2} = 0$$

da cui otteniamo che il prezzo del titolo è

$$P = \frac{c}{1,03} + \frac{309}{(1,03)^2}.$$

La duration del titolo si ottiene applicando la seguente formula:

$$D = \frac{\frac{c}{1,03} + \frac{309 \cdot 2}{(1,03)^2}}{P} = \frac{\frac{c}{1,03} + \frac{309 \cdot 2}{(1,03)^2}}{\frac{c}{1,03} + \frac{309}{(1,03)^2}} = \frac{1,03\,c + 618}{1,03\,c + 309}.$$

Poiché $D = 1,5$, allora deve essere

$$\frac{1,03\,c + 618}{1,03\,c + 309} = 1,5 \;\Leftrightarrow\; 1,03\,c + 618 = 1,545\,c + 463,5 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 0,515\,c = 154,5 \;\Leftrightarrow\; c = 300€.$$

Esercizio 4. Un titolo presenta il seguente cash-flow:

$$\{(0; -1000), (1; 500), (2; 538,125)\}.$$

Stabilire se la *duration* di tale titolo cade a meno di sei mesi della sua scadenza naturale.

Soluzione. Prima di tutto, bisogna determinare il rendimento di tale titolo, ossia il TIR. Il discounted cash-flow è dato da

$$\mathrm{G}(x) = -1000 + \frac{500}{1+x} + \frac{538,125}{(1+x)^2}.$$

L'equazione algebrica $G(x) = 0$ è di secondo grado: se la risolvete nella variabile $v = 1/(1+x)$, risulterá

$$538,125v^2 + 500v - 1000 = 0.$$

Tale equazione ammette una sola soluzione accettabile, ossia positiva, e, se poi ritornate alla variabile originaria, troverete che $x^* = 2,5\%$. Pertanto la duration di tale titolo è

$$D = \frac{\dfrac{500}{1,025} + \dfrac{538,125 \cdot 2}{(1,025)^2}}{1000} \simeq 1,512,$$

ossia un anno e poco piú di sei mesi, quindi a meno di sei mesi della sua scadenza naturale.

Esercizio 5. Un titolo obbligazionario A ha cash-flow pari a

$$\{(0; -1074,3419); (1; 50); (2; 50); (3; 50); (4; 1050)\};$$

mentre un secondo titolo B ha cash-flow pari a

$$\{(0; -565,7222); (1; 200); (2; 200); (3; 200)\}.$$

Supposto che i due titoli abbiano entrambi rendimento del 3%, volendo investire oggi un capitale pari a $C = 915141,65€$ in quote sia di A che di B con duration di portafoglio pari a 3, trovare quante quote del titolo A e di B si devono acquistare.

Soluzione. Calcoliamo la duration di ogni titolo, con approssimazione alla seconda cifra decimale. Abbiamo che

$$D_A = \frac{\dfrac{50}{1,03} + \dfrac{50 \cdot 2}{(1,03)^2} + \dfrac{50 \cdot 3}{(1,03)^3} + \dfrac{1050 \cdot 4}{(1,03)^4}}{1074,3419} \simeq 3,73$$

$$D_B = \frac{\dfrac{200}{1,03} + \dfrac{200 \cdot 2}{(1,03)^2} + \dfrac{200 \cdot 3}{(1,03)^3}}{565,7222} \simeq 1,98.$$

Usciamo per un attimo dal contesto del nostro esercizio per fare un discorso piú generale. Supponiamo di avere a disposizione un certo capitale C e di volerlo dividere in due parti, dette C_A e C_B, per comperare quote di due titoli, detti rispettivamente A e B, che abbiano lo stesso rendimento. Denotiamo ora con α la frazione di capitale totale destinata a comprare quote del titolo A, ossia $\alpha = C_A/C$. Conseguentemente, é evidente che C_B/C coincide con $1-\alpha$. A questo punto, si puó dimostrare che la duration di un portafoglio che contiene sia quote di A che di B è sempre data da

$$D_{A,B} = \alpha\, D_A + (1-\alpha) D_B. \tag{1}$$

Cosa si intende per quote di un determinato titolo? Nei nostri esercizi, supporremo sempre (**salvo diverso avviso**) che il prezzo di un determinato titolo A (in simboli, P_A) fornito nel relativo cash-flow sia **unitario**, ossia quello di **una** quota. Pertanto, per sapere a quante quote di un certo titolo A (in simboli, n_A) ho diritto avendo a disposizione il capitale C_A, é facile vedere che $n_A = C_A/P_A$. Ad esempio, se in un ipotetico titolo A io sapessi che $P_A = 100$€ e che ho a disposizione un capitale $C_A = 500$€, é chiaro che ho diritto a 5 quote da 100€ ciascuna, ossia $n_A = 500/100$. Infine, si noti che, essendo $\alpha = C_A/C$, posso anche scrivere in generale che

$$n_A = \alpha C/P_A.$$

Tornando al nostro esercizio, sfruttando l'equazione (1), si ha che

$$D_{A,B} = \alpha\, D_A + (1-\alpha) D_B = 3$$

e se ora sostituiamo $D_A = 3,73$ e $D_B = 1,98$, otteniamo

$$3,73\,\alpha + 1,98\,(1-\alpha) = 3 \;\Rightarrow\; 1,75\,\alpha = 1,02 \;\Rightarrow\; \alpha \simeq 0,58.$$

Pertanto, le quote del titolo A che si devono acquistare sono date da

$$n_A = \frac{C_A}{P_A} = \frac{\alpha\, C}{P_A} = \frac{0,58 \cdot 915141,65}{1074,3419} \simeq 494,05.$$

Allo stesso modo, si ha che le quote del titolo B da acquistare sono

$$n_B = \frac{C_B}{P_B} = \frac{(1-\alpha)\, C}{P_B} = \frac{(1-0,58) \cdot 915141,65}{565,7222} \simeq 679,41.$$