ESERCIZI DI MATEMATICA FINANZIARIA
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E MANAGEMENT UNIFE
A.A. 2016/2017

1. Esercizi risolti a lezione (novembre 2016)

REGIME DI SCONTO COMMERCIALE

Esercizio 1. Un'impresa ha un credito C scadente tra due anni. In cambio di una somma immediata, lo cede ad una banca che applica il regime dello sconto commerciale a tasso annuo $d = 20\%$ e prevede, inoltre, una commissione pari allo $0,5\%$ del credito. Quale tasso di interesse i avrebbe generato per l'impresa, nel regime dello sconto composto (senza commissioni), la stessa somma immediata?

Soluzione. L'equazione da impostare è la seguente:

$$C \cdot (1 - dt) - 0,005 \cdot C = \frac{C}{(1+i)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - 0,2 \cdot 2 - 0,005 = \frac{1}{(1+i)^2} \Leftrightarrow 0,595 = \frac{1}{(1+i)^2}$$

da cui

$$i = \sqrt{\frac{1}{0,595}} - 1 \cong 29,64\%.$$

REGIMI ARBITRARI

Esercizio 2. Sia

$$f(t) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta t}{1 + \alpha t}$$

una funzione reale definita su $[0, +\infty[$, con $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

- a) Determinare per quali valori di α e β , la funzione $f(t)$ rappresenta un fattore di montante di un contratto finanziario.
- b) Calcolare il tasso unitario d'interesse determinato da tale fattore di montante.
- c) Si calcoli il montante garantito da tale contratto dopo 3 anni, con capitale iniziale pari a 1€ .
- d) Si determini, all'interno del regime composto, a quale t_{ui} si ottiene un montante, dopo 3 anni, equivalente a quello calcolato al punto precedente.

Soluzione.

- a) Affinché la funzione $f(t)$ rappresenti un fattore di montante di un contratto finanziario devono essere soddisfatte contemporaneamente le seguenti condizioni: $f(0) = 1$ e f deve essere monotona crescente, ossia deve essere $f'(t) > 0$, per ogni $t \in [0; +\infty[$.

Poiché $f(0) = \frac{\alpha}{2}$, dobbiamo avere $\alpha = 2$. Inoltre abbiamo chiaramente che, per ogni $t \geq 0$, si ha

$$f'(t) = \frac{\beta}{(1 + \alpha t)^2} > 0$$

se e solo se $\beta > 0$.

Dunque la funzione

$$f(t) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta t}{1 + \alpha t}$$

rappresenta un fattore di montante di un contratto finanziario se $\alpha = 2$ e per ogni $\beta > 0$. Dunque posto $\alpha = 2$, per ogni $\beta > 0$ otteniamo la seguente funzione fattore di montante

$$f(t) = 1 + \frac{\beta t}{1 + 2t} = \frac{(\beta + 2)t + 1}{1 + 2t}.$$

- b) Il *tui* determinato da tale fattore di montante è :

$$i = f(1) - f(0) = f(1) - 1 = 1 + \frac{\beta}{3} - 1 = \frac{\beta}{3}.$$

- c) $M_3 = C \cdot f(3) = f(3) = 1 + \frac{3}{7}\beta$.

- d) All'interno del regime composto, denominato con i^* l'incognito tasso annuo unitario, si ha $M = C \cdot (1 + i^*)^t$, quindi, posto $C = 1\text{€}$ e $t = 3$, si ha che $M = (1 + i^*)^3$. Poiché deve essere $M = M_3$, allora

$$(1 + i^*)^3 = 1 + \frac{3}{7}\beta \quad \Leftrightarrow \quad i^* = \sqrt[3]{1 + \frac{3}{7}\beta} - 1.$$

RENDIMENTO DI UN B.O.T.

Esercizio 3. Un capitale C viene chiesto in prestito alla banca per acquistare un B.O.T. di durata semestrale, valore nominale pari a N e rendimento $r = 2\%$. Sapendo che il prestito va restituito alla banca dopo 6 mesi ad interessi calcolati nel regime composto con *tui* pari a $i > 0$, trovare i valori di i per cui si possa fare arbitraggio.

Soluzione. Il valore nominale del B.O.T. è dato dalla seguente equazione:

$$N = C \cdot \left(1 + \frac{1}{2}r\right),$$

mentre dobbiamo restituire alla banca il seguente montante

$$M = C \cdot \sqrt{1+i}.$$

Dunque, per poter fare arbitraggio, deve essere $N > M$, ossia

$$C \cdot \left(1 + \frac{1}{2}r\right) > C \cdot \sqrt{1+i}$$

da cui si ottiene

$$i < \left(1 + \frac{1}{2}r\right)^2 - 1 = 2,01\%.$$

CAPITALIZZAZIONE A TASSI NON COSTANTI

Esercizio 4. Si impiega il capitale C per un anno nel regime composto, rispettivamente a $i_1 = 10\%$ annuo per i primi k mesi, poi a $i_2 = 8\%$ nel resto dell'anno. Alla fine dell'anno, una volta dedotte le spese, pari allo $0,5\%$ del capitale impiegato, si ottiene lo stesso saldo che è generato da un analogo impiego a regime semplice al tasso dell' $8,25\%$ fisso e senza spese. Determinare k .

Soluzione. Il secondo tipo di investimento produce un montante pari a:

$$M_2 = C(1 + it) = C(1 + 0,0825) = 1,0825 C.$$

Il primo tipo, che invece prevede due diversi tassi d'interesse e le spese, determina un montante netto:

$$M_1 = M - SP,$$

dove M è il montante prodotto dall'investimento del capitale C per un anno ai tassi i_1 per $t_k := k/12$ e i_2 per $1 - t_k$, mentre $SP = 0,5\% C = 0,005 C$ sono le spese. Dunque:

$$M_1 = C(1 + i_1)^{t_k} \cdot (1 + i_2)^{1-t_k} - 0,005C.$$

Poiché $M_2 = M_1$ si ha che:

$$\left(\frac{1 + i_1}{1 + i_2}\right)^{t_k} = \frac{1,0875}{1 + i_2}$$

da cui

$$t_k = \frac{\log\left(\frac{1,0875}{1+i_2}\right)}{\log\left(\frac{1+i_1}{1+i_2}\right)}$$

e, facendo i calcoli, si trova infine che

$$k \cong 4,5,$$

ossia circa quattro mesi e mezzo.

COSTITUZIONE DI UN CAPITALE (MONTANTE DI UNA RENDITA)

Esercizio 5. Si vuole costituire un capitale di 2500 euro al *tui* $i = 3,7\%$ con venti versamenti posticipati mensili alle seguenti modalità: i versamenti di epoca dispari a rata costante pari a R , mentre quelli di epoca pari a rata costante pari a $\frac{5}{4}R$. Trovare il valore di R .

NOTA BENE: in pratica, si tratta di determinare il valore della rata R per cui la rendita $\mathcal{R}$ (posticipata) che permetta di godere, per la durata complessiva di venti mesi, di R nei mesi dispari e $\frac{5}{4}R$ nei mesi pari, abbia un montante pari a 2500 euro.

Soluzione. Dobbiamo vedere la nostra rendita $\mathcal{R}$ come l'unione di due rendite $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, ove $\mathcal{R}_1$ è costituita da 10 versamenti bimestrali, relativi ai mesi dispari, da $t = 1m$ (ove m sta per mese) a $t = 19m$, della rata R , mentre $\mathcal{R}_2$ è costituita da 10 versamenti bimestrali, relativi ai mesi pari, da $t = 2m$ a $t = 20m$, della rata $\frac{5}{4}R$. Nel caso $\mathcal{R}_1$, si tratta di una rendita standard, con periodicità bimestrale e tasso i_b : attraverso la formula classica, ne trovo il montante riferito all'epoca $t = 19m$, denominato $M_{19}^{(1)}$, dato da

$$(1) \quad M_{19}^{(1)} = R \cdot \frac{(1 + i_b)^{10} - 1}{i_b},$$

ove

$$(2) \quad i_b = (1 + i)^{1/6} - 1.$$

Se ora voglio sapere a quanto ammonta il mio montante dovuto a $\mathcal{R}_1$ all'epoca prefissata $t = 20m$, devo capitalizzare $M_{19}^{(1)}$ per un mese, attraverso il tasso mensile i_m , ossia

$$(3) \quad M_{20}^{(1)} = M_{19}^{(1)} \cdot (1 + i_m).$$

Tenendo conto delle Eq. (1) e (2) e del fatto che

$$i_m = (1 + i)^{1/12} - 1,$$

si ricava facilmente che l'Eq. (3) diviene

$$(4) \quad M_{20}^{(1)} = R(1 + i)^{1/12} \cdot \frac{(1 + i)^{5/3} - 1}{(1 + i)^{1/6} - 1}.$$

Nel caso $\mathcal{R}_2$, si tratta di una rendita standard, con periodicità bimestrale e tasso i_b : attraverso la formula classica, ne trovo il montante riferito all'epoca $t = 20m$, denominato $M_{20}^{(2)}$, dato da

$$(5) \quad M_{20}^{(2)} = \frac{5}{4}R \cdot \frac{(1 + i_b)^{10} - 1}{i_b} = \frac{5}{4}R \cdot \frac{(1 + i)^{5/3} - 1}{(1 + i)^{1/6} - 1}.$$

Siccome $2500 = M_{20}^{(1)} + M_{20}^{(2)}$, imposto tale equazione sfruttando le Eq. (4) e (5), isolando l'incognita R .

Dopo un pó di algebra elementare, si arriva alla formula finale nella forma piú semplificata data da

$$R = 2500 \cdot \frac{(1+i)^{1/6} - 1}{[(1+i)^{5/3} - 1][\frac{5}{4} + (1+i)^{1/12}]} \cong 107,96.$$