ESERCIZI DI MATEMATICA FINANZIARIA
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E MANAGEMENT UNIFE
A.A. 2016/2017

Esercizi 5

VALUTAZIONI DI OPERAZIONI FINANZIARIE E TITOLI OBBLIGAZIONARI

Esercizio 1. Il titolo A , acquistato oggi per un nominale di 100€, scade tra 2 anni esatti e paga cedole annue con tasso cedolare pari al 2%. Il titolo B , di vita residua pari a 6 mesi, acquistato per un nominale di 100€, paga cedole annue con tasso cedolare pari al 3%. Per entrambi i titoli è assicurato, al momento attuale, un rendimento pari al 4%.

- a) Calcolare il *corso tel quel* del titolo A .
- b) Calcolare il *corso secco* del titolo B .

Soluzione.

- a) Il valore della cedola del titolo A è pari a $c = N \cdot i_c$, dove N è il valore nominale del titolo e i_c il tasso cedolare, allora $c = 100 \cdot 0,02 = 2$. Dunque il titolo A prevede la corresponsione di una cedola pari a 2€ fra un anno e di un'altra cedola pari a 2€ fra due anni, unitamente al rimborso del valore nominale. Quindi

$$G(x) = -C_{tq} + \frac{2}{1+x} + \frac{102}{(1+x)^2}.$$

Poiché il rendimento del 4% è il TIR dell'investimento, abbiamo che

$$-C_{tq} + \frac{2}{1,04} + \frac{102}{(1,04)^2} = 0$$

da cui otteniamo che il *corso tel quel* del titolo A è

$$C_{tq} = \frac{2}{1,04} + \frac{102}{(1,04)^2} \cong 96,23€.$$

- b) Il valore della cedola del titolo B è pari a $c = N \cdot i_c$, dove N è il valore nominale del titolo e i_c il tasso cedolare, allora $c = 100 \cdot 0,03 = 3$. Dunque il titolo B prevede la corresponsione di una cedola pari a 3€ fra 6 mesi,

unitamente al rimborso del valore nominale. Quindi

$$G(x) = -C_{tq} + \frac{103}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Poiché il rendimento del 4% è il TIR dell'investimento, abbiamo che

$$-C_{tq} + \frac{103}{(1,04)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

da cui otteniamo che il *corso tel quel* del titolo B è

$$C_{tq} = \frac{103}{(1,04)^{\frac{1}{2}}} \cong 101\text{€}.$$

Il *corso secco* del titolo B si ottiene scorporando dal suo *corso tel quel* una quota della cedola, ossia il rateo della cedola. Poiché il titolo è stato emesso un anno e mezzo fa con cedola annuale, è stata riconosciuta al venditore del titolo la parte di cedola di sua competenza (esattamente per la metà), ossia il rateo è pari a

$$RT = c \cdot \frac{1}{2} = 1,5\text{€},$$

quindi il *corso secco* del titolo B è pari a

$$C_s = C_{tq} - RT \cong 99,50\text{€}.$$

Esercizio 2. Un BTP a cedola semestrale, tasso cedolare i_c e scadenza tra 9 mesi esatti, vi viene offerto a prezzo P , con la assoluta garanzia che il rendimento effettivo sia $r > 0$.

- A quanto ammontava il valore nominale N del BTP? [Tale punto richiede una soluzione letterale, non numerica, quindi N dipenderà dai dati P , r e i_c .]
- Un altro gestore vi propone alternativamente di investire il vostro gruzzolo P in un titolo a zero coupon di 9 mesi, garantendovi un montante finale pari a $(1 + \alpha r) \cdot P$, ove $\alpha > 0$. Dal punto di vista del rendimento, per quali α tale investimento è più redditizio del precedente? [Tale punto richiede una disequazione nella variabile α : gli altri dati si dimostreranno ininfluenti.]
- In caso di accettazione della seconda opzione, supponendo che dopo 3 mesi vogliate vendere il titolo, a quale prezzo minimo P_V lo dovrete vendere per non andare sotto il rendimento r della prima opzione? [Tale punto richiede una soluzione letterale, non numerica, quindi P_V dipenderà dai dati P , r .]

Soluzione.

- Poiché la cedola è semestrale, il valore della cedola è

$$c = \frac{N \cdot i_c}{2}.$$

L'investimento prevede la corresponsione di una cedola pari a c fra 3 mesi e di un'altra cedola pari a c fra 9 mesi, unitamente al rimborso del valore nominale. Quindi

$$\begin{aligned} \text{DCF}(x) &= -P + \frac{c}{(1+x)^{\frac{1}{4}}} + \frac{c+N}{(1+x)^{\frac{3}{4}}} = \\ &= -P + \frac{\frac{N \cdot i_c}{2}}{(1+x)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\frac{N \cdot i_c}{2} + N}{(1+x)^{\frac{3}{4}}}. \end{aligned}$$

Poiché il rendimento effettivo r è il TIR dell'investimento, abbiamo che $\text{DCF}(r) = 0$, ossia

$$-P + \frac{\frac{N \cdot i_c}{2}}{(1+r)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\frac{N \cdot i_c}{2} + N}{(1+r)^{\frac{3}{4}}} = 0.$$

Dobbiamo ora ricavare N . Quindi abbiamo:

$$N \cdot \left(\frac{\frac{i_c}{2}}{(1+r)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\frac{i_c}{2} + 1}{(1+r)^{\frac{3}{4}}} \right) = P$$

da cui

$$\begin{aligned} N &= \frac{P}{\frac{\frac{i_c}{2}}{(1+r)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\frac{i_c}{2} + 1}{(1+r)^{\frac{3}{4}}}} = \frac{P}{\frac{i_c}{2(1+r)^{\frac{1}{4}}} + \frac{i_c + 2}{2(1+r)^{\frac{3}{4}}}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow N &= \frac{P}{\frac{i_c \cdot (1+r)^{\frac{1}{2}} + i_c + 2}{2(1+r)^{\frac{3}{4}}}} = \frac{2P \cdot (1+r)^{\frac{3}{4}}}{i_c \cdot (1+r)^{\frac{1}{2}} + i_c + 2}. \end{aligned}$$

- b) Sia r_0 il rendimento del B.O.T., allora dobbiamo trovare α in modo tale che risulti $r_0 > r$.

Il valore nominale del B.O.T. coincide col montante di tale investimento (nel regime semplice) dopo 9 mesi: se lo indichiamo col simbolo M_0 , si ha che

$$M_0 = P \cdot \left(1 + r_0 \cdot \frac{9}{12} \right) = P \cdot \left(1 + r_0 \cdot \frac{3}{4} \right).$$

Poiché deve essere $M_0 = (1 + \alpha r) \cdot P$, si ha:

$$P \cdot \left(1 + r_0 \cdot \frac{3}{4} \right) = (1 + \alpha r) \cdot P$$

da cui dobbiamo ricavare r_0 . Essendo $P \neq 0$, otteniamo che

$$1 + r_0 \cdot \frac{3}{4} = 1 + \alpha r \Leftrightarrow r_0 = \frac{4}{3} \alpha r.$$

Dobbiamo porre $r_0 > r$, allora abbiamo che

$$\frac{4}{3} \alpha r > r,$$

da cui si ricava (essendo $r > 0$)

$$\alpha > \frac{3}{4}.$$

c) Se supponiamo di vendere il B.O.T. dopo 3 mesi dall'acquisto, abbiamo che

$$P_V = P \cdot \left(1 + r^* \cdot \frac{3}{12}\right) = P \cdot \left(1 + r^* \cdot \frac{1}{4}\right),$$

dove r^* è il rendimento. Dobbiamo trovare P_V in modo tale che $r^* \geq r$.
Abbiamo che:

$$P_V = P \cdot \left(1 + r^* \cdot \frac{1}{4}\right) \Rightarrow 1 + r^* \cdot \frac{1}{4} = \frac{P_V}{P} \Rightarrow r^* = 4 \cdot \left(\frac{P_V}{P} - 1\right).$$

Poiché deve essere $r^* \geq r$, allora otteniamo

$$4 \cdot \left(\frac{P_V}{P} - 1\right) \geq r \Rightarrow \frac{P_V}{P} - 1 \geq \frac{r}{4} \Rightarrow P_V \geq P \left(1 + \frac{r}{4}\right).$$

Esercizio 3. Un investimento è descritto dal seguente cash-flow:

Scadenze	0	1	2	3
Importi	-5000	1700	2560	2280

- a) Dopo aver scritto il DCF (discounted cash-flow), determinare qual è tra i seguenti il TIR di tale operazione finanziaria:
- a) 12% b) 13% c) 14% d) 15%
- b) Si stabilisca il sovrapprofitto attuale dell'investimento rispetto ad un impiego bancario al costo-opportunità del 10% nelle ipotesi che la cifra iniziale di 5000€ sia:
- i) finanziata interamente con mezzi propri;
 - ii) coperta per il 30% da un finanziamento bancario della durata di 2 anni con rimborso globale alla scadenza al tasso del 20%.
- c) Si determini la prima quota di periodo del VAN nel caso ii) del precedente punto b) adottando i capitali residui ricorsivi e usando un TIR (nella forma già espressa in percentuale) approssimato per difetto sulla seconda cifra decimale, sapendo che è compreso tra l'11,3% e l'11,4%.

Soluzione.

a) Abbiamo che $G(x) = -5000 + \frac{1700}{1+x} + \frac{2560}{(1+x)^2} + \frac{2280}{(1+x)^3}$, ponendo $x = 0,14$ si ottiene $G(0,14) = 0$, quindi il TIR è $x^* = 14\%$.

b) i) In tal caso bisogna calcolare il VAN al costo opportunità pari al 10%, quindi:

$$\text{VAN}(10\%) = -5000 + \frac{1700}{1,1} + \frac{2560}{(1,1)^2} + \frac{2280}{(1,1)^3} \cong 374,15 > 0,$$

quindi il sovrapprofito (attuale) dell'operazione al costo-opportunità del 10% è circa pari a 374 euro.

ii) L'investimento iniziale è descritto dal seguente cash-flow:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-5000, 1700, 2560, 2280).$$

Il costo iniziale di 5000€ viene coperto per il 30% da un finanziamento bancario della durata di 2 anni con rimborso globale alla scadenza al tasso del 20%, quindi

$$f_0 = 5000 \cdot 0,3 = 1500\text{€};$$

$$|f_2| = f_0 \cdot (1,2)^2 = 1500 \cdot (1,2)^2 = 2160\text{€}.$$

Allora il finanziamento è descritto dal seguente cash-flow:

$$(f_0, f_1, f_2, f_3) = (1500, 0, -2160, 0).$$

Abbiamo così un nuova operazione finanziaria descritta dal seguente cash-flow:

$$(a_0 + f_0, a_1 + f_1, a_2 + f_2, a_3 + f_3) = (-3500, 1700, 400, 2280),$$

con discounted cash-flow

$$G_1(x) = -3500 + \frac{1700}{1+x} + \frac{400}{(1+x)^2} + \frac{2280}{(1+x)^3}.$$

Dunque dobbiamo calcolare il VAN al costo opportunità pari al 10% sul capitale proprio, ossia l'APV (adjusted present value):

$$\text{VAN}(10\%) = -3500 + \frac{1700}{1,1} + \frac{400}{(1,1)^2} + \frac{2280}{(1,1)^3} \cong 89,031 > 0,$$

il che significa che il nuovo sovrapprofito (attuale) è pari a circa 89 euro, abbassandosi rispetto al caso del solo capitale proprio di circa 285 euro.

- c) Il *discounted cash-flow* dell'operazione finanziaria come da ii) punto b), chiamato $G_1(x)$, é appunto dato da

$$G_1(x) = -3500 + \frac{1700}{(1+x)^2} + \frac{400}{(1+x)} + \frac{2280}{(1+x)^3}.$$

Dobbiamo "testare il segno" di $G_1(x)$ "buttandovi dentro" valori ragionevoli di x , compresi, secondo l'aiuto dato nella domanda stessa, tra 11,3% e 11,4%. Se ad esempio inserite $x = 11,36\%$, risulterà $G_1(11,36\%) > 0$, mentre con $x = 11,37\%$, risulterà $G_1(11,37\%) < 0$, pertanto la soluzione richiesta é proprio $x^* = 11,36\%$.

Allora, la prima quota di periodo del VAN con capitali residui in forma ricorsiva é data dalla formula semplificata

$$g_1(i) = \frac{w_0(x^* - i)}{(1+i)},$$

ove si ricordi che $i = 10\%$, per cui si ha che

$$g_1 = 43,27.$$

DURATA MEDIA FINANZIARIA (DURATION)

Esercizio 4. Un titolo obbligazionario biennale di prezzo €100 e frutti $a_1 = 96$ e $a_2 = 31,2$ ha duration pari a 1 anno e mezzo. Calcolare il rendimento.

Soluzione. Dalla formula della duration biennale di tasso i , frutti a_1, a_2 e prezzo 100, data da

$$D = \frac{\frac{a_1}{1+i} + 2 \cdot \frac{a_2}{(1+i)^2}}{100},$$

sapendo che $D = 1,5$, ricaviamo l'equazione nell'incognita $v = 1/(1+i) > 0$ data da

$$2a_2 v^2 + a_1 v - 150 = 0.$$

Inserendo i dati relativi a a_1 e a_2 , otteniamo

$$62,40 v^2 + 96 v - 150 = 0$$

la cui unica soluzione accettabile, già trasformata nella variabile i , è 4%.

Esercizio 5. (Difficile) Consideriamo tre titoli obbligazionari descritti dai seguenti cash-flow:

	0	1	2	3
A	-100	0	110,25	0
B	-100	0	0	115,7625
E	-100	5	105	0

- a) Calcolare il rendimento dei tre titoli, sapendo con certezza che è il medesimo.
 b) Calcolare la *duration* dei tre titoli.
 c) Volendo investire un certo capitale C_0 in un portafoglio titoli $\mathcal{P}(A, B, E)$, comprendente quote sia di A che di B che di E , in modo che tra due anni e mezzo possiate saldare un debito di 225,945264€, calcolate quanto deve essere C_0 e quante quote rispettivamente dei titoli A , B e E si devono acquistare, con il vincolo che le quote di A e di B devono essere le stesse.

Soluzione.

- a) Assumendo che il rendimento sia uguale per tutti e tre i titoli, basta calcolare il rendimento di uno dei tre. Pertanto, determiniamo il rendimento di A :

$$-100 + \frac{110,25}{(1+x)^2} = 0 \Rightarrow \frac{110,25}{(1+x)^2} = 100 \Rightarrow \frac{(1+x)^2}{110,25} = \frac{1}{100} \Rightarrow$$

$$(1+x)^2 = \frac{110,25}{100} = 1,1025 \Rightarrow x = \sqrt{1,1025} - 1 = 0,05,$$

dunque il rendimento (comune) dei tre titoli è il 5%. Se si vuole verificare che il rendimento sia effettivamente comune anche agli altri due, basta ripetere la stessa procedura di calcolo per B e C .

- b) I titoli A e B sono titoli a *zero coupon*, quindi le loro *duration* sono esattamente le scadenze finali, ossia

$$D_A = 2; \quad D_B = 3.$$

Calcoliamo la *duration* del titolo E :

$$D_E = \frac{\frac{5}{1,05} + \frac{105 \cdot 2}{(1,05)^2}}{100} \simeq 1,95.$$

- c) Volendo investire un certo capitale C_0 per poi ricavare tra due anni e mezzo un montante almeno pari al debito che devo saldare, è ovvio che io mi debba prefiggere di comprare un portafoglio di titoli, fra A , B ed E , che abbia *duration* pari a 2,5. Siccome a tale scadenza io so che il mio portafoglio (per definizione stessa di *duration*) avrà alla scadenza indicata un rendimento almeno pari al 5%, allora questo significa che al rendimento minimo del 5% il mio capitale C_0 , capitalizzato per due anni e mezzo, deve dare come montante esattamente 225,945264€. Pertanto, per trovare C_0 , dobbiamo attualizzare di 2 anni e mezzo il valore del debito al rendimento del 5%, quindi otteniamo:

$$C_0 = \frac{225,945264}{(1,05)^{\frac{5}{2}}} \simeq 200€.$$

Denotiamo ora con α e β le frazioni di C_0 destinate a comprare rispettivamente quote del titolo A e B , ossia $\alpha = C_A/C_0$ e $\beta = C_B/C_0$. Conseguentemente, è evidente che C_E/C_0 coincide con $1 - \alpha - \beta$. La duration di portafoglio diviene quindi:

$$D_{A,B,E} = \alpha D_A + \beta D_B + (1 - \alpha - \beta) D_E, \quad (1)$$

dove $D_{A,B,E} = 2,5$; $D_A = 2$; $D_B = 3$ e $D_E = 1,95$. Poiché si devono acquistare lo stesso numero di quote di A e B , abbiamo che:

$$n_A = n_B \Rightarrow \frac{C_A}{P_A} = \frac{C_B}{P_B} \Rightarrow \frac{\alpha C_0}{P_A} = \frac{\beta C_0}{P_B}.$$

Siccome $P_A = P_B = 100$, otteniamo direttamente che $\alpha = \beta$. Dunque la (1) diventa:

$$D_{A+B+E} = \alpha D_A + \alpha D_B + (1 - 2\alpha) D_E,$$

ossia

$$2,5 = 2\alpha + 3\alpha + (1 - 2\alpha) \cdot 1,95$$

da cui si ricava

$$5\alpha + 1,95 - 3,9\alpha - 2,5 = 0 \Rightarrow 1,1\alpha = 0,55 \Rightarrow \alpha = 0,5.$$

Allora il numero di quote di A , B e E che dobbiamo acquistare è dato da:

$$n_A = n_B = \frac{\alpha C_0}{100} = 1;$$

$$n_E = \frac{(1 - 2\alpha) C_0}{100} = 0,$$

ossia una quota di A e una di B e nessuna di E .