ESERCIZI DI MATEMATICA FINANZIARIA
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E MANAGEMENT UNIFE
A.A. 2016/2017

1. **Esercizi 4**

VALUTAZIONI DI OPERAZIONI FINANZIARIE

Esercizio 1. Un investimento è descritto dal seguente cash-flow:

Scadenze	0	1	2
Importi	$a_0 = -90$	$a_1 = -15$	$a_2 = 180$

a) Determinare il TIR;
b) trovare il VAN al costo opportunità di $i = 10\%$, stabilendone così l'eventuale convenienza.

Soluzione.

a) Abbiamo che $\text{DCF}(x) = -90 - \dfrac{15}{1+x} + \dfrac{180}{(1+x)^2}$, per $x > -1$, quindi poniamo $\text{DCF}(x) = 0$, per trovare nella variabile $v = \dfrac{1}{1+x}$, finanziariamente significativa per $v > 0$, l'equazione (dividendo entrambi i membri per 15)
$$12\,v^2 - v - 6 = 0,$$
che ha come unica soluzione accettabile $v^* = \dfrac{18}{24}$, dunque il TIR è
$$x^* = \frac{1}{v^*} - 1 = 0,\overline{3}, \quad \text{ossia } x^* \cong 33\%.$$
b) $\text{VAN}(10\%) = -90 - \dfrac{15}{1,1} + \dfrac{180}{(1,1)^2} \cong 45,12 > 0$, il che significa che, avendo un sovraprofitto di circa 45 euro, conviene aderire a tale offerta con quel tasso di mercato.

Esercizio 2. Un investimento è caratterizzato dal seguente cash-flow:

Scadenze	0	1	2
Importi	-100	40	77

a) Determinare il TIR dell'investimento;
b) determinare il GVAN dell'investimento ai tassi di mercato $i_1 = 5\%$ per il primo anno e $i_2 = 8\%$ per il secondo anno.
c) Se al posto del credito di 77, avete un debito di 77 e al posto di 40 avete un credito pari a R, con $R > 0$, determinate un valore di R affinché il nuovo investimento, valutato col metodo del VAN, non risulti mai conveniente rispetto a qualunque tasso di mercato, supposto ora costante nei due anni di investimento.

Soluzione.

a) Abbiamo che $\mathrm{DCF}(x) = -100 + \dfrac{40}{1+x} + \dfrac{77}{(1+x)^2}$, per $x > -1$, quindi poniamo $\mathrm{DCF}(x) = 0$, per trovare nella variabile $v = \dfrac{1}{1+x}$, finanziariamente significativa per $v > 0$, l'equazione
$$77\,v^2 + 40\,v - 100 = 0,$$
che ha come unica soluzione accettabile $v^* = \dfrac{10}{11}$, dunque il TIR è
$$x^* = \frac{1}{v^*} - 1 = 0,1,$$
ossia $x^* = 10\%$.

b) $\mathrm{GVAN}(5\%, 8\%) = -100 + \dfrac{40}{1,05} + \dfrac{77}{(1,05)\cdot(1,08)} = 5,6.$

c) Abbiamo che $\mathrm{DCF}_R(x) = -100 + \dfrac{R}{1+x} - \dfrac{77}{(1+x)^2}$. Affinché l'investimento non sia mai conveniente è necessario che il VAN risulti negativo, quindi si deve avere:
$$-100 + \frac{R}{1+x} - \frac{77}{(1+x)^2} < 0$$
per ogni $x > -1$, oppure, equivalentemente, che
$$77\,v^2 - R\,v + 100 > 0$$
per ogni $v > 0$, ove si pone come al solito $v = \dfrac{1}{1+x}$. Si noti che la funzione $v \mapsto f(v) = 77\,v^2 - R\,v + 100$ ha come grafico una parabola convessa (o rivolta verso l'alto), essendo il coefficiente di secondo grado positivo. Considerato che $f(0) = 100$ e che $f'(v) \geq 0$ se e solo se $v \geq \dfrac{R}{154} \in\,]0, +\infty[$, possiamo immediatamente dedurre che la condizione richiesta equivale a porre il

discriminante negativo:

$$\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad R^2 - 30800 < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < R < 175,50.$$

Dunque qualunque valore positivo di R inferiore a $175,50$ rende non conveniente l'investimento.

Esercizio 3. Dovete scegliere, in base al criterio del TIR, tra due investimenti: a seguito di un versamento di 100 €, il primo vi garantisce un guadagno di 143 € dopo 2 anni a fronte di un ulteriore versamento di 43 € dopo un anno, mentre il secondo vi garantisce solo una cedola finale pari ad a dopo 2 anni. Stabilire per quali $a > 0$ il secondo é migliore del primo.

Soluzione. La prima operazione ha un *discounted cash-flow* (DCF) pari a

$$G_1(x) = -100 - \frac{43}{1+x} + \frac{143}{(1+x)^2}.$$

Il suo TIR si ottiene dall'unica soluzione finanziariamente accettabile dell'equazione $G_1(x) = 0$, che é pari a zero. In base al criterio del TIR, quindi, la seconda operazione finanziaria, che ha DCF pari a

$$G_2(x) = -100 + \frac{a}{(1+x)^2},$$

sará piú conveniente se il suo TIR é maggiore di zero, il che si vede facilmente equivalere alla condizione $a > 100$.

Esercizio 4. Un'operazione finanziaria è descritta dal seguente cash-flow, con $R > 0$:

Scadenze	0	1	2	3
Importi	-10000	3800	R	2160

a) Si scriva l'espressione analitica del DCF $G(x)$ in funzione del tasso annuo $x > -1$ e si individui l'importo R per il quale il TIR è $0,08$.
b) Si stabilisca la quantitá comune da sottrarre agli importi relativi alle scadenze 1 e 3 affinché il TIR diminuisca di un punto percentuale.

Soluzione.

a) Abbiamo che $G(x) = -10000 + \dfrac{3800}{1+x} + \dfrac{R}{(1+x)^2} + \dfrac{2160}{(1+x)^3}$.

Poiché $x^* = 8\%$ è il TIR dell'investimento, abbiamo che $G(0,08) = 0$, ossia

$$-10000 + \frac{3800}{1,08} + \frac{R}{(1,08)^2} + \frac{2160}{(1,08)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-10000 \cdot (1,08)^3 + 3800 \cdot (1,08)^2 + R \cdot (1,0,8) + 2160}{(1,08)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -12597,12 + 4432,32 + 1,08\,R + 2160 = 0,$$

da cui $R = 5560$€.

Dunque il cash-flow dell'investimento è

Scadenze	0	1	2	3
Importi	-10000	3800	5560	2160

b) Sia $y > 0$ la quantità di cui devono diminuire i movimenti di cassa alle scadenze 1 e 3 affinché il TIR sia pari al 7%. Consideriamo il nuovo cash-flow:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-10000, 3800 - y, 5560, 2160 - y)$$

con DCF:

$$G_1(x) = -10000 + \frac{3800 - y}{1 + x} + \frac{5560}{(1 + x)^2} + \frac{2160 - y}{(1 + x)^3}.$$

Poiché $x = 0,07$ è il TIR dell'operazione finanziaria, abbiamo che $G_1(0,07) = 0$, dunque

$$-10000 + \frac{3800 - y}{1,07} + \frac{5560}{(1,07)^2} + \frac{2160 - y}{(1,07)^3} = 0$$

da cui si ricava

$$-12250,43 + 4350,62 - 2,1449\,y + 5949,2 + 2160 - y = 0 \;\Rightarrow\; y \cong 97,62\text{€}.$$

Possiamo concludere che, affinché il TIR sia pari al 7%, i movimenti di cassa alle scadenze 1 e 3 devono diminuire entrambi di $97,62$€.

Esercizio 5. Un esercente vende computer, ciascuno di valore $719,731097$€, a rate trimestrali costanti pari a 100€, su 2 anni con TAEG pari al 10%. Dire se il TAEG esposto è attendibile oppure no.

Soluzione. Il cash-flow dell'operazione, relativo ai primi 8 trimestri, è il seguente:

$$(-719,731097; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100).$$

Pertanto, si ha che

$$\mathrm{DCF}(x_t) = a_0 + \sum_{s=1}^{8} \frac{100}{(1 + x_t)^s},$$

ove $a_0 = -719,731097$, mentre x_t è l'incognita espressa in termini di tasso trimestrale, perché le nostre epoche sono trimestri e non anni.

Dall'equazione $\mathrm{DCF}(x_t) = 0$, abbiamo che

$$719,731097 = \sum_{s=1}^{8} \frac{100}{(1+x_t)^s}.$$

Usando la formula compatta dell'ammortamento alla francese, si ottiene

$$719,731097 = \sum_{s=1}^{8} \frac{100}{(1+x_t)^s} = 100 \cdot \frac{1-(1+x_t)^{-8}}{x_t}.$$

Dalla solita conversione temporale dal tasso trimestrale a quello annuo, ossia

$$x_t = \sqrt[4]{1+x} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{4}} - 1,$$

risulta dunque che

$$719,731097 = 100 \cdot \frac{1-((1+x)^{\frac{1}{4}})^{-8}}{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1} = 100 \cdot \frac{1-(1+x)^{-2}}{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}.$$

Il TAEG esposto è attendibile se, sostituendo a x il valore $0,1$ nell'equazione

$$719,731097 = 100 \cdot \frac{1-(1+x)^{-2}}{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}$$

otteniamo un'identità. Sostituendo otteniamo che:

$$100 \cdot \frac{1-(1+x)^{-2}}{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1} = 100 \cdot \frac{1-(1,1)^{-2}}{(1,1)^{\frac{1}{4}}-1} \simeq 719,7310973,$$

quindi il TAEG esposto è attendibile.

Esercizio 6. Il progetto finanziario A è descritto dal seguente cash-flow:

Scadenze	0	1	2
Importi	-100	0	121

Il progetto finanziario B è descritto dal seguente cash-flow:

Scadenze	0	1	2
Importi	-100	10	110

a) Si stabilisca un ordine di preferenza tra i due progetti nell'ipotesi che il costo opportunità sia 8%.
b) Dimostrare che per qualunque costo opportunità $i \neq 10\%$ i criteri del TIR e del VAN, utilizzati per valutare i progetti, sono contrastanti.

Soluzione.

a) I VAN al costo opportunità pari all'8% sono i seguenti:

$$G_A(0,08) = -100 + \frac{121}{(1,08)^2} \simeq 3,74$$

e

$$G_B(0,08) = -100 + \frac{10}{1,08} + \frac{110}{(1,08)^2} \simeq 3,57$$

quindi $G_A(0,08) > G_B(0,08)$, ossia, nell'ipotesi che il costo opportunità sia 8%, è preferibile il progetto A.

b) Osserviamo che entrambi i progetti hanno TIR $x^* = 10\%$, infatti:

$$G_A(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -100 + \frac{121}{(1+x)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0,1$$

e

$$G_B(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -100 + +\frac{10}{1+x} + \frac{110}{(1+x)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0,1$$

dunque, utilizzando il criterio del TIR, i due progetti sono equivalenti. Per dimostrare che per qualunque costo opportunità $i < 10\%$ i criteri del TIR e del VAN sono contrastanti, basta provare che $G_A(i) > G_B(i)$, per ogni $i < 10\%$. Abbiamo che $G_A(i) > G_B(i)$ se e solo se $G_A(i) - G_B(i) > 0$, ossia $G_{A-B}(i) > 0$, dunque basta considerare il progetto $A - B$ e studiare il segno della funzione $G_{A-B}(i)$.

Il progetto finanziario $A - B$ è descritto dal seguente cash-flow:

Scadenze	0	1	2
Importi	0	-10	11

quindi

$$G_{A-B}(i) = \frac{-10}{1+i} + \frac{11}{(1+i)^2} = \frac{1-10\,i}{(1+i)^2}.$$

Abbiamo che

$$G_{A-B}(i) > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1-10\,i}{(1+i)^2} > 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - 10\,i > 0 \;\Leftrightarrow\; i < 0,1,$$

allora, utilizzando il criterio del VAN, il progetto A è preferibile rispetto a B per ogni $i < 10\%$, ossia per ogni $i < 10\%$ i criteri del TIR e del VAN sono contrastanti.

Osserviamo che per ogni $i > 10\%$, utilizzando il criterio del VAN, il progetto B è preferibile rispetto a A, perché $G_{A-B}(i) < 0$, dunque possiamo concludere che i criteri del TIR e del VAN sono contrastanti per ogni costo opportunità $i \neq 10\%$.