Leggi di capitalizzazione e di attualizzazione

Alcuni appunti di supporto al corso di Matematica Finanziaria (L-Z)

Stefania Ragni

Facoltà di Economia & Management- Università di Ferrara

Funzioni di capitalizzazione

Capitalizzazione semplice e composta

2. Parte II: Capitalizzazione semplice e composta
    - Capitalizzazione semplice
    - Capitalizzazione composta
    - Confronto fra le due capitalizzazioni
    - La forza istantanea di interesse
    - Capitalizzazione istantanea

Attualizzazione

3. Parte III: Attualizzazione
   - Introduzione all'attualizzazione

Parte I

Funzioni di capitalizzazione

Descrizione del problema

$\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ sono due agenti economici.

All'istante t_0, $\mathcal{E}$ affida il capitale C_0 a $\mathcal{B}$ che si impegna a restituire il capitale C_1 al tempo $t_1 > t_0$.

La transazione $\mathcal{E} \to \mathcal{B}$ si dice **prestazione**.
La restituzione $\mathcal{B} \to \mathcal{E}$ si dice **controprestazione**.

$\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ concordano un criterio con cui **regolamentare** lo scambio di partite monetarie distinte in tempi diversi.
In tal senso, è opportuno costruire un legame funzionale tra le due situazioni finanziarie (t_0, C_0) e (t_1, C_1).

Perciò si definisce una funzione di tre variabili $m(\cdot,\cdot,\cdot)$, detta **legge di capitalizzazione**, tale che $C_1 = m(t_0, t_1, C_0)$.

Leggi di capitalizzazione: definizioni

Una funzione $m : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\times [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ **CONTINUA** si dice **legge di capitalizzazione** o **funzione montante** se:

a) per ogni $t_0 \leq t_1$ e per ogni $C, D \geq 0$,

$$m(t_0, t_1, C + D) = m(t_0, t_1, C) + m(t_0, t_1, D)$$

b) per ogni $t_0 \leq t_1 < t_2$ e per ogni $C \geq 0$,

$$m(t_0, t_1, C) < m(t_0, t_2, C)$$

c) per ogni $t \geq 0$ e per ogni $C \geq 0$,

$$m(t, t, C) = C$$

Due situazioni finanziarie (t_0, C_0) e (t_1, C_1) si dicono **equivalenti** se: $C_1 = m(t_0, t_1, C_0)$.

La quantità $t_1 - t_0$ rappresenta la **durata** dell'investimento.

Alcune osservazioni:

La proprietà

a) per ogni $t_0 \leq t_1$ e per ogni $C, D \geq 0$,

$$m(t_0, t_1, C + D) = m(t_0, t_1, C) + m(t_0, t_1, D)$$

significa che il capitale investito può essere frazionato senza alterare il risultato della capitalizzazione.
La proprietà

b) per ogni $t_0 \leq t_1 < t_2$ e per ogni $C \geq 0$,

$$m(t_0, t_1, C) < m(t_0, t_2, C)$$

significa che più è duraturo l'investimento, maggiore risulta la sua capitalizzazione
(NB: $t_1 - t_0 < t_2 - t_0$ sono le durate degli investimenti considerati.)

Alcune osservazioni:

La proprietà

c) per ogni $t \geq 0$ e per ogni $C \geq 0$,

$$m(t, t, C) = C$$

significa che il capitale non aumenta se non viene investito.
(NB: In questo caso la durata dell'investimento è nulla.)

La richiesta di continuità è dettata dal buon senso:
non è ragionevole una situazione ove un piccolo aumento del capitale investito o della durata dell'investimento, generi una grande variazione del montante capitalizzato!!!

Alcune definizioni:

Se (t_0, C_0) e (t_1, C_1) sono equivalenti (i.e. $C_1 = m(t_0, t_1, C_0)$), si dice che:

- C_0 è il **valore attuale** di C_1;
- C_1 è il **montante** o è il **capitale finale** di C_0 in t_1;
- $C_1 - C_0$ è l'**interesse**;
- $\dfrac{C_1 - C_0}{C_0}$ è l'**interesse per unità di capitale iniziale** relativo a $[t_0, t_1]$.

  Se $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$, l'interesse per unità di capitale iniziale si dice **tasso unitario di interesse** (**tui**);
- $\dfrac{C_1 - C_0}{C_1}$ è lo **sconto per unità di capitale finale** relativo a $[t_0, t_1]$.

  Se $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$, lo sconto per unità di capitale finale si dice **tasso unitario di sconto** (**tus**).

Alcune convenzioni:

Indicheremo con $\mathcal{V}$ il valore attuale di un investimento, con $\mathcal{M}$ il montante, con $\mathcal{I}$ e $\mathcal{D}$ l'interesse e lo sconto, rispettivamente.
Inoltre, indicheremo con i il tasso unitario di interesse e con d il tasso unitario di sconto.

Esercizio: provare che $d = \frac{i}{i+1}$.

Nella pratica, spesso si suppone che identiche durate temporali di un investimento, collocate in diversi istanti temporali, generino le stesse capitalizzazioni.
Per questo motivo, di solito, si fissa $t_0 = 0$ e si utilizzano leggi di capitalizzazione con una sola variabile temporale (del tipo $m(t, C)$).

Definizione

Una funzione $m : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ **CONTINUA** si dice **legge di capitalizzazione** o **funzione montante** se:

$\alpha)$ per ogni $t > 0$ e per ogni $C, D \geq 0$,

$$m(t, C + D) = m(t, C) + m(t, D)$$

$\beta)$ per ogni $0 \leq t_1 < t_2$ e per ogni $C \geq 0$,

$$m(t_1, C) < m(t_2, C)$$

$\gamma)$ per ogni $C \geq 0$,

$$m(0, C) = C$$

Proprietà

Siano $t > 0$, $0 < C$, $0 < C_1 < C_2$. Allora risulta che:

- $C < m(t, C)$;
- $m(t, C_1) < m(t, C_2)$.

Infatti, $C = m(0, C) < m(t, C)$ *per gli assiomi* γ*) e* β *rispettivamente.*

Inoltre, $m(t, C_2) = m(t, C_2 - C_1 + C_1) = m(t, C_2 - C_1) + m(t, C_1)$, *per l'assioma* α*). Visto che* $m(t, C_2 - C_1) > 0$, *allora* $m(t, C_1) < m(t, C_2)$.

Osservazione:

La prima proprietà significa che ogni capitale investito è minore della sua capitalizzazione.

La seconda proprietà significa che, a partire da due capitali $C_1 < C_2$ investiti per la stessa durata temporale t, la capitalizzazione relativa al primo capitale C_1 è minore della capitalizzazione relativa al secondo capitale C_2.

Funzioni additive

Una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **additiva** se

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \quad g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2).$$

Alcune osservazioni:

- Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, la funzione $g(x) = \lambda \cdot x$ è **additiva**.
  Infatti, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ si ha

$$g(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 = g(x_1) + g(x_2).$$

- Il problema è capire se tale tipo di struttura additiva sia la sola possibile o meno.

Qual è la struttura di una qualsiasi funzione additiva?

Una qualsiasi funzione additiva ha sicuramente struttura del tipo $g(x) = \lambda \cdot x$? Sotto opportune ipotesi (i.e. continuità di g), la risposta è affermativa.

Teorema (Cauchy, 1821):

Considerata una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si ha che:

$$g \text{ continua e additiva} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall x \in \mathbb{R}\text{: } g(x) = \lambda x.$$

Funzioni a scindibilità moltiplicativa

Si dice che una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfa la proprietà di **scindibilità moltiplicativa** se

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \quad g(x_1 + x_2) = g(x_1) \cdot g(x_2).$$

Alcune osservazioni:

- Per ogni $\lambda > 0$, la funzione $g(x) = \lambda^x$ gode della **scindibilità moltiplicativa**.
  Infatti, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *si ha*
  $$g(x_1 + x_2) = \lambda^{x_1+x_2} = \lambda^{x_1}\lambda^{x_2} = g(x_1) \cdot g(x_2).$$
- Il problema è capire se tale tipo di struttura moltiplicativa sia la sola possibile o meno.

Qual è la struttura di una qualsiasi funzione che gode della scindibilità moltiplicativa?

Una qualsiasi funzione che gode della scindibilità moltiplicativa ha sicuramente struttura del tipo $g(x) = \lambda^x$? Sotto opportune ipotesi, la risposta è affermativa.

Teorema (Cauchy):

Considerata una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si ha che:

g continua e non identicamente nulla
g gode della scindibilità moltiplicativa

$$\Downarrow$$

$$\exists \lambda > 0 \text{ t.c. } \forall x \in \mathbb{R}: \; g(x) = \lambda^x.$$

Tale $\lambda > 0$ può essere considerato come un output della funzione esponenziale, perciò

$$\exists \delta \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \lambda = e^{\delta}.$$

Allora per ogni x risulta:

$$g(x) = \lambda^x = (e^{\delta})^x = e^{\delta x}$$

In conclusione

Assegnata una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e non identicamente nulla, risulta:

- g è additiva $\Rightarrow$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}$: $g(x) = \lambda x$;
- g gode della scindibilità moltiplicativa

$$\Downarrow$$

$\exists \delta \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}$: $g(x) = e^{\delta x}$.

Teorema di rappresentazione di una legge di capitalizzazione

Ogni legge di capitalizzazione $m(t_0, t_1, C)$ in due variabili temporali è del tipo

$$m(t_0, t_1, C) = C \cdot f(t_0, t_1).$$

Dimostrazione. Si fissino i tempi t_0, t_1 e si ponga

$$g(C) = m(t_0, t_1, C).$$

Risulta $g(C_1 + C_2) = m(t_0, t_1, C_1 + C_2) = m(t_0, t_1, C_1) + m(t_0, t_1, C_2) = g(C_1) + g(C_2)$, ovvero

$$g(C_1 + C_2) = g(C_1) + g(C_2).$$

Quindi, $g(C)$ risulta additiva; perciò

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } g(C) = \lambda C.$$

Poichè la quantità λ dipende dai tempi t_0, t_1 fissati, possiamo scrivere una relazione funzionale del tipo

$$\lambda = f(t_0, t_1).$$

Da qui l'asserto

Corollario

Ogni legge di capitalizzazione $m(t, C)$ in una sola variabile temporale è del tipo

$$m(t, C) = C \cdot f(t).$$

La funzione $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ viene detta **fattore di capitalizzazione** e gode delle seguenti proprietà:

- $f(0) = 1$.
  Infatti, per l'assioma γ) si ha $C = m(0, C) = C \cdot f(0)$.
- $f(t)$ è continua e monotona strettamente crescente.
  La continuità di f scaturisce dalla continuità di m.
  Inoltre, se $t_1 < t_2$ allora, per l'assioma β), $m(t_1, C) < m(t_2, C)$ da cui $Cf(t_1) < Cf(t_2)$. Data la non negatività di C, segue $f(t_1) < f(t_2)$.

Parte II

Capitalizzazione semplice e composta

Capitalizzazione semplice

Assegnata una funzione di capitalizzazione $m(t, C) = C\,f(t)$, si ricordi che l'interesse per unità di capitale, al tempo t è

$$\frac{\mathcal{I}}{C} = \frac{m(t, C) - m(0, C)}{C} = \frac{C\,f(t) - C\,f(0)}{C} = \frac{C(f(t) - 1)}{C} = f(t) - 1.$$

La funzione $g(t) = \frac{\mathcal{I}(t)}{C} = f(t) - 1$ risulta **additiva** se

$$g(t_1 + t_2) = g(t_1) + g(t_2)$$

ovvero se

$$f(t_1 + t_2) - 1 = [f(t_1) - 1] + [f(t_2) - 1]$$

cioè

$$f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2) - 1$$

Allora è giustificata la seguente definizione.

Definizioni e proprietà

Il fattore di capitalizzazione $f(t)$ si dice **ad interessi additivi** se:

$$f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2) - 1.$$

La legge di capitalizzazione $m(t, C) = C\, f(t)$ si dice **semplice** o **lineare** se:
il suo fattore di capitalizzazione $f(t)$ è ad interessi additivi.

Proprietà

Se $m(t, C)$ è semplice, allora

$$m(t, C) = C(1 + it),$$

dove i rappresenta il tui.

Perchè???

Proprietà

Se $m(t, C)$ è semplice, allora

$$m(t, C) = C(1 + it),$$

dove i rappresenta il tui.

Dimostrazione. Se il fattore di capitalizzazione $f(t)$ è ad interessi additivi, allora la funzione $g(t) = f(t) - 1$ gode della scindibilità additiva e risulta che

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } g(t) = \lambda t.$$

Segue che $f(t) = \lambda t + 1$. Come esprimere il valore λ? Sicuramente si può osservare che il tui i soddisfa la proprietà

$$i = \frac{m(1, C) - m(0, C)}{C} = \frac{C\, f(1) - C\, f(0)}{C} = \frac{C(\lambda + 1) - C}{C} = \lambda.$$

Da qui $f(t) = 1 + it$ e l'asserto.

Capitalizzazione composta

Un fattore di capitalizzazione $f(t)$ si dice **scindibile** se:

$$\forall t_1, t_2 > 0 \ : \ f(t_1 + t_2) = f(t_1)\, f(t_2).$$

La legge di capitalizzazione $m(t, C) = C\, f(t)$ si dice **composta** o **esponenziale** se:
il suo fattore di capitalizzazione $f(t)$ è scindibile.

Proprietà

Sia $m(t, C) = C\, f(t)$ una legge di capitalizzazione composta; allora

$$m(t_1 + t_2, C) = m(t_2, m(t_1, C)),$$

per ogni coppia di tempi t_1, t_2.

Interpretazione finanziaria

Proprietà

Sia $m(t, C) = C\, f(t)$ una legge di capitalizzazione composta; allora

$$m(t_1 + t_2, C) = m(t_2, m(t_1, C)),$$

per ogni coppia di tempi t_1, t_2.

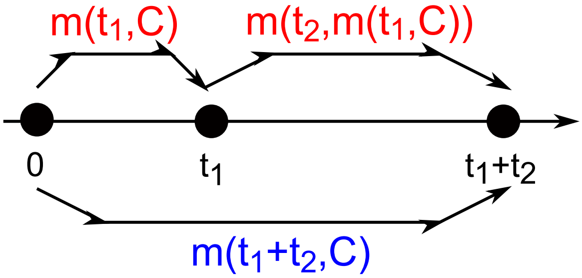
Dal punto di vista finanziario, risulta

$$\underbrace{m(t_1 + t_2, C)}_{\text{montante di } C \text{ a } t_1 + t_2} = C \cdot f(t_1 + t_2) = \underbrace{C \cdot f(t_1)}_{m(t_1, C) = \hat{C}} \cdot f(t_2) = \hat{C} \cdot f(t_2),$$

dove $\hat{C}$ rappresenta il montante di C a t_1.
Di conseguenza

$$m(t_1 + t_2, C) = m(t_2, \hat{C}) = \underbrace{m(t_2, m(t_1, C))}_{\text{montante di } m(t_1, C) \text{ a } t_2}$$

Interpretazione finanziaria



Proprietà fondamentali

Proprietà

Se $m(t, C)$ è una legge di capitalizzazione composta, allora

$$\exists \delta \in \mathbb{R} \text{ t.c. } m(t, C) = Ce^{\delta t}.$$

δ si dice **intensità istantanea di interesse** o **forza di interesse**.

Dimostrazione. Una legge composta $m(t, C) = C\,f(t)$ ha il fattore di capitalizzazione scindibile, perciò

$$f(t) = e^{\delta t}$$

dove δ è un opportuno numero reale.

Proprietà fondamentali

Proprietà

Se $m(t, C)$ è composta, allora

$$m(t, C) = C(1 + i)^t,$$

dove i rappresenta il tui.

Dimostrazione. Come esprimere il valore δ della proprietà precedente? Si calcola il tui i osservando che

$$i = \frac{m(1, C) - m(0, C)}{C} = \frac{C\,f(1) - C\,f(0)}{C} = \frac{Ce^{\delta} - C}{C} = e^{\delta} - 1.$$

Da qui $e^{\delta} = 1 + i$, allora $e^{\delta t} = (1 + i)^t$. In questo modo, segue l'asserto.

NB: La forza istantanea di interesse è data dalla relazione

$$\delta = \log(1 + i).$$

Confronto fra le due capitalizzazioni

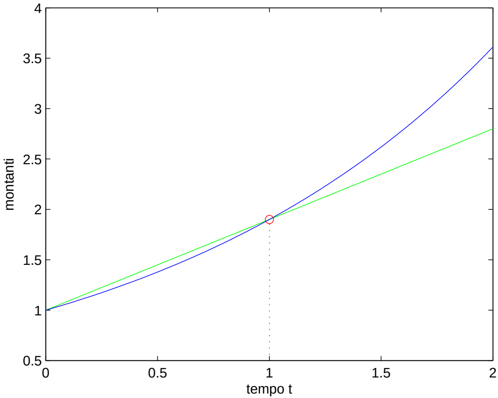
Per utilizzare le leggi di capitalizzazione nel modo più opportuno, è importante saper confrontare i due regimi di capitalizzazione differenti.

- $f_L(t) = 1 + i\,t$ rappresenta il fattore di capitalizzazione semplice;
- $f_E(t, C) = (1 + i)^t$ rappresenta il fattore di capitalizzazione composto.

Si prova che:

$$\begin{aligned} f_E(t) < f_L(t) \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < t < 1 \\ f_L(t) < f_E(t) \quad &\Leftrightarrow \quad 1 < t \\ f_L(1) = f_E(1) & \end{aligned}$$

Ad esempio...



per comodità grafica sono scelti i valori $C = 1$ e $i = 0.9$.
In verde: il montante $m_L(t, C) = 1 + i\,t$ in regime semplice.
In blu: il montante $m_E(t, C) = (1 + i)^t$ in regime composto.

Un'ulteriore differenza fra le due capitalizzazioni sta nel fatto che:

- il fattore di capitalizzazione composto $f_E(t) = (1+i)^t$ è scindibile, ovvero
$$f_E(t_1 + t_2) = f_E(t_1) f_E(t_2)$$
- il fattore di capitalizzazione semplice $f_L(t) = 1 + i\,t$ non è scindibile, infatti
$$f_L(t_1 + t_2) = 1 + i(t_1 + t_2), \qquad f_L(t_1) f_L(t_2) = 1 + i(t_1 + t_2) + i^2 t_1 t_2$$
e non è detto che tali valori coincidano.

La forza istantanea di interesse in generale

Si consideri una legge di capitalizzazione $m(t, C) = C\, f(t)$.

L'**interesse per unità di capitale**, tra gli istanti t e $t+h$, è

$$\frac{m(t+h, C) - m(t, C)}{m(t, C)} = \frac{C\, f(t+h) - C\, f(t)}{C\, f(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{f(t)}$$

Tale rapporto non dipende dal capitale iniziale C!!!

Dividendo per l'ampiezza $h > 0$ dell'intervallo temporale, si ottiene l'**interesse medio per unità di capitale** nell'intervallo $[t, t+h]$:

$$\frac{m(t+h, C) - m(t, C)}{m(t, C)} \cdot \frac{1}{h} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \cdot \frac{1}{f(t)}$$

$$\frac{m(t+h,C)-m(t,C)}{m(t,C)}\cdot\frac{1}{h}=\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\cdot\frac{1}{f(t)}$$

Passando al limite per $h \to 0^+$, si ha

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\cdot\frac{1}{f(t)}=\frac{f'(t)}{f(t)}$$

Sia

$$\delta(t)=\frac{f'(t)}{f(t)}$$

Dal punto di vista matematico, risulta

$$\delta(t)=\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{d}{dt}\log(f(t)),$$

per questo motivo $\delta(t)$ si dice **derivata logaritmica** di $f(t)$.

Dal punto di vista finanziario, bisogna osservare che:
$\delta(t)$ rappresenta il limite per $h \to 0$ dell'interesse **medio** per unità di capitale nell'intervallo $[t, t+h]$.
Quindi, nel contesto finanziario, $\delta(t)$ prende il nome di **forza istantanea di interesse**.

- Se $f_E(t) = (1+i)^t$ è il fattore di capitalizzazione composto, allora

$$\delta_E(t) = \frac{f'_E(t)}{f_E(t)} = \frac{(1+i)^t \log(1+i)}{(1+i)^t} = \log(1+i)$$

  risultato già noto!!! Si noti che, in questo caso, $\delta_E(t)$ rimane costante nel tempo.

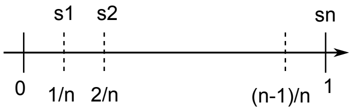
- Se $f_L(t) = 1 + i\,t$ è il fattore di capitalizzazione semplice, allora

$$\delta_L(t) = \frac{f'_L(t)}{f_L(t)} = \frac{i}{1+it}$$

  Si noti che, in questo caso, $\delta_L(t)$ varia nel tempo.

Capitalizzazione istantanea

Si supponga che il capitale $C = 1$ Euro sia depositato al tasso annuo x, in regime semplice, e che gli interessi siano capitalizzati n volte l'anno.



In sostanza, il periodo di 1 *anno viene suddiviso in* n *parti uguali; gli interessi, maturati dall'investimento fino al periodo* $(i-1)$*-esimo, non sono incassati ma l'investimento viene prolungato durante il periodo* i *per ottenere il saldo* s_i.

Capitalizzazione istantanea

Dopo il primo periodo il saldo (montante) è $s_1 = 1 + \frac{x}{n}$.

Dopo il secondo periodo il saldo è $s_2 = s_1 \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2$.

Dopo il terzo periodo il saldo è $s_3 = s_2 \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^3$.

$$\vdots$$

Dopo n periodi il saldo è $s_n = s_{n-1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Capitalizzazione istantanea

Se la capitalizzazione è istantanea, allora si opera un processo di limite per $n \to +\infty$ e il saldo istantaneo risulta

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Osservando che

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n/x}\right]^x, \qquad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n/x} = e,$$

si ottiene

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = e^x$$

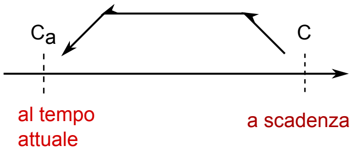
Allora, e^x rappresenta il **montante** di 1 Euro investito per 1 anno al tasso x, in **capitalizzazione continua**!!!

Parte III

Attualizzazione

Attualizzazione

L'attualizzazione pone il problema inverso della capitalizzazione.



PROBLEMA:

Un soggetto $\mathcal{E}$ possiede un credito esigibile nel futuro, i.e. esigerà C a scadenza, secondo una data legge di capitalizzazione.

Se $\mathcal{E}$ decide di cedere il credito in anticipo, in modo da avere subito disponibile il capitale $C_a < C$, allora è necessario effettuare un'operazione di **sconto** o di **attualizzazione**.

Risulta opportuno definire il concetto di **legge di attualizzazione**.

Definizione

Si dice **legge di attualizzazione** associata alla legge di capitalizzazione $m(t, C)$ la funzione

$$a : \; [0, +\infty[\times [0, +\infty[\to [0, +\infty[$$

tale che ogni valore $a(t, C)$ soddisfa la relazione

$$m(t, a(t, C)) = C$$

per ogni $t > 0, \; C > 0$.

Osservando che $m(t, a(t, C)) = a(t, C)f(t)$, si ha

$$C = a(t, C)f(t)$$

e

$$a(t, C) = C \frac{1}{f(t)}$$

Definizione e proprietà

Allora ha senso porre

$$\varphi(t) = \frac{1}{f(t)}$$

che prende il nome di **fattore di attualizzazione** o **di sconto**.

Proprietà:

- $\varphi(t)$ è continua,
  perchè $f(t)$ risulta continua;
- $\varphi(t)$ è decrescente,
  perchè $f(t)$ risulta crescente;
- $\varphi(0) = 1$,
  perchè $f(0) = 1$;
- $\varphi(t) > 0$ per ogni $t > 0$,
  perchè la stessa proprietà vale per $f(t)$.

Fattori di sconto distinti

Dato il tui i, risulta:

- $\varphi_L(t) = \dfrac{1}{1+it}$ è il fattore di attualizzazione semplice;
- $\varphi_E(t) = (1+i)^{-t}$ è il fattore di attualizzazione composto.