

ESERCIZI DI MATEMATICA FINANZIARIA
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E MANAGEMENT UNIFE
A.A. 2015/2016

1. Esercizi 1

REGIMI SEMPLICE E COMPOSTO

Esercizio 1. A quale tasso mensile i_m deve “viaggiare” un investimento a regime composto per far aumentare il capitale investito del 21% dopo soli 2 mesi?

Soluzione. L'equazione da impostare è

$$1,21C = C \cdot (1 + i_m)^2,$$

ove i_m è il tasso mensile, da cui si ricava che

$$i_m = \sqrt{1,21} - 1 = 10\%.$$

Esercizio 2. Depositando in banca il 10 gennaio un capitale $C = 1000\text{€}$ e sapendo che il contratto prevede, all'interno del regime semplice a tui $i = 3,6\%$, una capitalizzazione degli interessi trimestrale a partire dal primo giorno di gennaio, quale montante vi spetta se uscite il 20 ottobre dello stesso anno?

Attenzione: usate la convenzione dell'anno commerciale (un anno corrisponde a 360 giorni) e considerate qualunque mese intero di durata pari a 30 giorni.

Soluzione. Il montante che vi spetta il primo aprile, denominato $M_{01/04}$, si ricava dall'equazione del regime semplice per una durata totale di 80 giorni a tasso i , ossia

$$M_{01/04} = C \cdot \left(1 + i \frac{8}{36}\right).$$

Allo stesso modo, ricavo il montante al primo ottobre, denominato $M_{01/10}$, tenendo conto che a partire dal primo aprile ho due periodi di capitalizzazione trimestrale, e il capitale iniziale é $M_{01/04}$, quindi

$$M_{01/10} = M_{01/04} \cdot (1 + i/4)^2 = C \cdot \left(1 + i \frac{8}{36}\right) \cdot (1 + i/4)^2.$$

Infine, il montante finale M si compone ulteriormente di uno spezzone di 20 giorni a regime semplice a tasso i , quindi

$$M = M_{01/10} \cdot \left(1 + i \frac{1}{18}\right) = C \cdot \left(1 + i \frac{8}{36}\right) \cdot (1 + i/4)^2 \cdot \left(1 + i \frac{1}{18}\right).$$

Inserendo i dati numerici, trovo esattamente $M = 1028,278\text{€}$.

Esercizio 3. Oggi è stato depositato in banca un capitale C pari a 100000€. La banca riconosce interessi a regime semplice al tasso 1,2% annuo. Tra 4 mesi si ritira il montante maturato e lo si riutilizza subito in un impiego alternativo, per altri 20 mesi, alle stesse precedenti condizioni ottenendo il montante M^* . Determinare a quale tasso annuo si può, con lo stesso capitale iniziale, ricavare M^* , in regime composto e durata dell'investimento pari a quella complessiva precedente.

Soluzione. Il montante ottenuto impiegando il capitale iniziale C per 4 mesi nel regime semplice al tasso annuo $i = 1,2\%$ è pari a:

$$M_1 = C(1 + i \cdot t) = 100000 \left(1 + 0,012 \cdot \frac{4}{12} \right) = 100400\text{€}.$$

Il montante ottenuto impiegando il nuovo capitale M_1 per 20 mesi nel regime semplice al tasso annuo $i = 1,2\%$ è pari a:

$$M^* = M_1(1 + i \cdot t) = 100400 \left(1 + 0,012 \cdot \frac{20}{12} \right) = 102408\text{€}.$$

Il montante ottenuto impiegando il capitale iniziale C per 24 mesi, ossia 2 anni, nel regime composto al tasso annuo i^* è pari a:

$$M = C(1 + i^*)^t = 100000(1 + i^*)^2.$$

Poiché $M = M^*$, abbiamo che:

$$100000(1 + i^*)^2 = 102408 \quad \Rightarrow \quad (1 + i^*)^2 = 1,02408$$

allora

$$i^* = \sqrt{1,02408} - 1 \approx 0,01197.$$

Dunque $i^* = 1,197\%$.

CAPITALIZZAZIONE DEGLI INTERESSI A TASSI NON COSTANTI

Esercizio 4. Un capitale investito a regime composto per 4 anni complessivi a tasso $i_1 = 2,01\%$ i primi 6 mesi, $i_2 = 6,09\%$ i due anni successivi e, infine, di nuovo a tasso i_1 negli ultimi 18 mesi, darebbe lo stesso montante, supposte invariate le altre condizioni, ad un tasso costante. Quale?

Soluzione. Da un lato abbiamo che:

$$M_1 = C(1 + i_1)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + i_2)^2 \cdot (1 + i_1)^{\frac{3}{2}} = C(1 + i_1)^2 \cdot (1 + i_2)^2,$$

mentre dall'altro

$$M_2 = C(1 + i)^4.$$

Poiché deve essere $M_2 = M_1$ si ha

$$C(1 + i)^4 = C(1 + i_1)^2 \cdot (1 + i_2)^2,$$

da cui, essendo $C \neq 0$,

$$(1+i)^4 = (1+i_1)^2 \cdot (1+i_2)^2 \Leftrightarrow i = \sqrt[4]{(1+i_1)^2 \cdot (1+i_2)^2} - 1 = \sqrt{(1+i_1) \cdot (1+i_2)} - 1$$

ossia

$$i = \sqrt{(1,0201) \cdot (1,0609)} - 1 = 0,0403 = 4,03\%.$$

Esercizio 5. Calcolare il tasso annuo di interesse al quale si investe per due anni un capitale di 1200€ in regime composto nell'ipotesi in cui all'inizio del secondo anno il tasso incognito sia diminuito dell'1% e che l'interesse prodotto nel solo secondo anno ammonti a 52€.

Soluzione. Si ha:

$$C = 1200\text{€}; \quad i_2 = i_1 - 0,01; \quad M_2 - M_1 = 52\text{€}.$$

Il montante alla fine del primo anno è pari a:

$$M_1 = C(1+i_1) = 1200(1+i_1).$$

Il montante alla fine del secondo anno è pari a:

$$M_2 = M_1(1+i_2) = 1200(1+i_1)(1+i_2) = 1200(1+i_1)(1+i_1-0,01),$$

quindi

$$M_2 = 1200(1+i_1)(0,99+i_1).$$

Deve risultare:

$$\begin{aligned} M_2 - M_1 = 52 &\Rightarrow 1200(1+i_1)(0,99+i_1) - 1200(1+i_1) = 52 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1188 + 1200 i_1 + 1188 i_1 + 1200 i_1^2 - 1200 - 1200 i_1 - 52 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1200 i_1^2 + 1188 i_1 - 64 = 0, \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$i_1 \cong 0,051 \quad i_1 \cong -1,041.$$

La seconda soluzione è non accettabile, dunque il tasso con cui si è investito il capitale è stato pari al 5,1% nel primo anno ed al 4,1% nel secondo.

REGIME MISTO

Esercizio 6. Un capitale $C = 1000\text{€}$ viene impiegato a regime misto per 4 anni e 3 mesi, fruttando un montante pari a $M = 1087,844321\text{€}$. A quale tasso è stato impiegato il capitale?

a) 2%

b) 3%

c) 4%

d) 5%

Soluzione. La formula da sfruttare è $C(1+i)^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}i\right) = M$. Per risolvere questo tipo di problema dobbiamo provare uno a uno dentro la formula

$$1000(1+i)^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}i\right) = 1087,844321$$

tutte le soluzioni a), b), c) e d): nel nostro caso, solo con $i = 2\%$ otteniamo un'identità.

Esercizio 7. Il conto X vi offre un tasso annuo di interesse $i_1 = 4\%$ per i primi sei mesi a regime semplice e successivamente, sul montante ottenuto, un tasso annuo $i_2 = 2\%$ a regime composto. Volendo investire un capitale $C = 1000\text{€}$, quale montante vi spetterà per una durata totale dell'investimento di un anno e mezzo? Il conto Y , invece, vi offre un tasso annuo di interesse $i_3 = 5\%$ per i primi cinque mesi a regime semplice e successivamente, sul montante ottenuto, un tasso annuo $i_4 = 3\%$ a regime composto. Volendo investire un capitale $C = 1000\text{€}$, quale montante vi spetterà per una durata totale dell'investimento di diciassette mesi? Infine, impiegando ora $C = 1000\text{€}$ in un regime misto per 2 anni e 3 mesi, allo stesso tasso annuo del 3%, determinare il montante ricevuto.

Soluzione. Il montante ottenuto investendo il capitale $C = 1000\text{€}$ per un anno e mezzo nel conto X è pari a:

$$M_X = C \cdot \left(1 + \frac{1}{2}i_1\right) \cdot (1+i_2)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = C \cdot \left(1 + 0,04 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot (1+0,02)^1 = 1040,40\text{€}.$$

Il montante ottenuto investendo il capitale $C = 1000\text{€}$ per diciassette mesi nel conto Y è pari a:

$$M_Y = C \cdot \left(1 + \frac{5}{12}i_3\right) \cdot (1+i_4)^{\frac{17}{12}-\frac{5}{12}} = C \cdot \left(1 + 0,05 \cdot \frac{5}{12}\right) \cdot (1+0,03)^1 = 1051,46\text{€}.$$

Nel regime misto, in generale, la formula da sfruttare è

$$M = C \cdot (1+i)^n \cdot (1+\alpha i)$$

dove n è il numero finito di anni e α è la frazione di anno. In questo caso, $n = 2$ e $\alpha = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, quindi

$$M = C \cdot (1+i)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}i\right) = 1000 \cdot (1,03)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}0,03\right) = 1068,86\text{€}.$$

CONFRONTO TRA REGIMI

Esercizio 8. Rispondere in maniera ben argomentata se sia più conveniente investire un certo capitale C a regime semplice a *tui* $\alpha = 4\%$ piuttosto che a regime composto a *tui* $\beta = 4,05\%$ o viceversa, non avendo informazione certa sulla durata dell'impiego se non che è compresa tra 3 e 6 mesi.

Soluzione. Si noti innanzitutto che si ha equivalenza tra i due regimi ai due tassi unitari indicati per una certa durata t^* in quanto $\beta = 0,0405 < \exp(\alpha) - 1 \cong 0,041$. A questo punto si tratta di vedere se t^* è compreso tra 3 e 6 mesi, ossia se l'equazione

$$(1 + \alpha t) = (1 + \beta)^t$$

possa avere una soluzione $t^* \in [1/4, 1/2]$. Siccome è facile vedere che $(1 + \alpha \cdot 0,25) > (1 + \beta)^{0,25}$ e $(1 + \alpha \cdot 0,5) < (1 + \beta)^{0,5}$, è evidente che effettivamente $t^* \in [1/3, 1/2]$, quindi non è possibile affermare con certezza che un regime sia più conveniente dell'altro all'interno di quel intervallo temporale.

ESERCIZIO FINALE

Esercizio 9. Un imprenditore, che ha ottenuto un prestito di 100.000 euro da rifondere in 6 mesi presso la banca XYZ, ha ottenuto la condanna della stessa per *anatocismo*, ossia pagamento degli interessi sugli interessi, vietato per legge, con ottenimento di un indennizzo pari alla differenza pagata in più rivalutata del 2% secondo il regime semplice sui sei mesi. La banca, infatti, all'interno dell'accordo di restituzione del prestito, ha imposto, oltre al regime semplice a tasso $i = 4\%$, la capitalizzazione trimestrale degli interessi, che per legge sarebbe vietata, perché costituisce, appunto, anatocismo. A quanto ammonta l'indennizzo stabilito nella sentenza all'imprenditore?

Soluzione. La cifra pagata dall'imprenditore, denotata M_1 , con capitalizzazione trimestrale degli interessi senza spezzoni per 6 mesi, ossia per due periodi di capitalizzazione, a tasso i , è data da

$$M_1 = C(1 + i/4)^2,$$

ove $C = 100.000$ e $i = 0,04$. La cifra M_2 che per legge avrebbe dovuto pagare è invece data da

$$M_2 = C(1 + i/2).$$

La differenza pagata in più è quindi

$$M_1 - M_2 = C \cdot i^2/16.$$

L'indennizzo è pertanto la rivalutazione a regime semplice a tasso $i_1 = 2\%$ per sei mesi della differenza pagata in più, ossia

$$(M_1 - M_2) \cdot (1 + i_1/2) = C \cdot i^2/16 \cdot (1 + i_1/2),$$

ossia 10,1 euro.